6.2 คุณสมบัติบางประการของดีเทอร์มิแนนท์

(Basic Praperties of Deteminants)

คุณสมบัติที่สำคัญของดีเทอร์มิแนนท์มี 5 ประการคือ

คุณสมบัติข้อที่ 1 การเขียนดีเทอร์มิแนนท์ที่กำหนดให้เสียใหม่ โดยนำเอา row ไปเขียนเป็น Solumn หรือนำเอา Column ไปเขียนเป็น row จะไม่ทำให้ค่าของดีเทอร์มิแนนท์เปลี่ยนแปลง กล่าวคือ $|A| = |A'|$ ซึ่งหมายความว่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ A จะเท่ากับดีเทอร์มิแนนท์ของทรานซโพสของเมทริกซ์ A

ตัวอย่างที่ 1

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 12 = -10$$

ตัวอย่างที่ 2

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

คุณสมบัติข้อที่ 2 การสลับที่กันของ row สอง row (หรือ column สอง column) จะทำให้เครื่องหมายของค่าของดีเทอร์มิแนนท์เปลี่ยนเป็นตรงข้าม แต่ค่าตัวเลขไม่เปลี่ยนแปลง

ตัวอย่างที่ 1

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

แต่เมื่อเรานำเอา row ที่ 1 มาเขียนเป็น row ที่ 2 และเอา row ที่ 2 ไปเขียนเป็น row ที่ 1 จะทำให้เครื่องหมายของดีเทอร์มิแนนท์เปลี่ยนเป็นตรงข้ามดังนี้

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = -(ad-bc)$$

ตัวอย่างที่ 2

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 15$$

แต่เมื่อเราเขียนเสียใหม่โดยเอา column ที่ 3 ไปเขียนเป็น column ที่ 1 และนำเอา column ที่ 1 ไปเขียนเป็น column ที่ 3 จะได้ดังนี้

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -15$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าเครื่องหมายเปลี่ยนเป็นตรงข้าม

คุณสมบัติข้อที่ 3 ถ้าเราคูณ row ใด row หนึ่ง (หรือ column ใด column หนึ่ง) ด้วย Scalar k จะทำให้ค่าของดีเทอร์มิแนนท์เปลี่ยนเป็น k เท่าของค่าเดิม

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ดีเทอร์มิแนนท์ A คือ

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

เมื่อคูณด้วย Scalar k จะได้

$$k\,|A| = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \text{(คูณเข้ากับ row ที่ 1)}$$

$$= k(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$$

$$= \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$ (คูณเข้ากับ column ที่ 1)

$$= k\,(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u>

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 15$$

เมื่อเราคูณ $|A|$ ด้วย 3 เข้าไปใน row ที่ 1 จะได้

$$3\,|A| = \begin{vmatrix} 12 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 45$$

ซึ่งมีค่าเป็น 3 เท่าของดีเทอร์มิแนนท์ A

<u>ข้อสังเกต</u> การคูณดีเทอร์มิแนนท์ด้วย Scalar ต่างกันกับการคูณเมทริกซ์ด้วย Scalar กล่าวคือ ในการคูณเมทริกซ์ด้วย Scalar เราต้องนำเอา Scalar คูณเข้าไปในทุก ๆ Element of Matrix แต่ในการคูณดีเทอร์มิแนนท์เราคูณ Scalar เข้าไปใน row ใด row หนึ่งเท่านั้น

<u>คุณสมบัติข้อที่</u> 4 ถ้าเราบวก (หรือลบ) row ใด row หนึ่ง (หรือ column ใด column หนึ่ง) ด้วยจำนวนเท่าของอีก row ใด row หนึ่ง (หรือ column ใด column หนึ่ง) จะไม่ทำให้ค่าของดีเทอร์มิแนนท์เปลี่ยนแปลง

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

ถ้าเราบวก row ที่ 1 ด้วย k เท่าของ row ที่ 2 จะได้

$$|A| = \begin{vmatrix} a + kc & b + kd \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= ad + kcd - bc - kcd$$

$$= ad - bc$$

จะเห็นได้ว่าค่าของ A ยังคงเท่าเดิม

<u>คุณสมบัติข้อที่ 5</u> ถ้า row ใด row หนึ่ง (หรือ column ใด column หนึ่ง) เป็นจำนวนเท่าของอีก row ใด row หนึ่ง (หรือ column ใด column หนึ่ง) ค่าของดีเทอร์มิแนนท์จะเท่ากับศูนย์ หรือในกรณีพิเศษถ้า row ใด row หนึ่ง (หรือ column ใด column หนึ่ง) เหมือนกับอีก row ใด row หนึ่ง (หรือ column ใด column หนึ่ง) ค่าของดีเทอร์มิแนนท์จะเท่ากับศูนย์

<u>ตัวอย่าง</u>

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ a & b \end{vmatrix} = 2ab - 2ab = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2a & a \\ 2b & b \end{vmatrix} = 2ab - 2ab = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0$$

7 **การหาอินเวอร์สเมทริกซ์** (Finding the Inverse Matrix)

ในหัวข้อ 2.5.3 ได้พูดถึงคำนิยามของอินเวอร์สเมทริกซ์ไว้แล้วว่า อินเวอร์สของเมทริกซ์ A (ถ้า A มีอินเวอร์ส) ก็คือ เมทริกซ์ที่เมื่อ pre-multiply หรือ post-multiply เข้ากับเมทริกซ์ A แล้วได้ Identity Matrix กล่าวคือ

$$A^{-1} A = AA^{-1} = I$$

ฉะนั้นในที่นี้ขอให้เรามาพิจารณากันต่อไปว่าจะหาอินเวอร์สได้อย่างไร

ก่อนอื่นขอยกสูตรในการหาอินเวอร์สมาให้ทราบเสียก่อนว่าเป็นอย่างไร ซึ่งสูตร คือ

$$A^{-1} = \frac{\text{Adjoint A}}{|A|}$$

โดยที่ Adjoint A หรือ Adj.A คือ Transpose ของ Cofactor Matrix A ซึ่งหาได้ดังนี้

สมมติว่า เมทริกซ์ A ที่กำหนดให้ คือ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$ และเป็น Non-Singular Matrix

เราจะได้ว่า Cofactor Matrix ของ Matrix A คือ

$$C = \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{12}| & |C_{13}| \\ |C_{21}| & |C_{22}| & |C_{23}| \\ |C_{31}| & |C_{32}| & |C_{33}| \end{bmatrix}$$

โดยที่ $|C_{ij}|$ เป็น cofactor ของ a_{ij} $\left(i = 1, 2, 3 \right)$

ฉะนั้น เมื่อเราทรานซโพส Cofactor Matrix A จะได้ Adjoint A ดังนี้

$$\text{Adj } A = C' = \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{21}| & |C_{31}| \\ |C_{12}| & |C_{22}| & |C_{32}| \\ |C_{13}| & |C_{23}| & |C_{33}| \end{bmatrix}$$

ฉะนั้น เราจะได้ว่า Inverse of Matrix A คือ

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{21}| & |C_{31}| \\ |C_{12}| & |C_{22}| & |C_{32}| \\ |C_{13}| & |C_{23}| & |C_{33}| \end{bmatrix}$$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงหาอินเวอร์สของ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u> ก่อนอื่นเราต้องทดสอบเสียก่อนว่า เมทริกซ์ที่กำหนดให้มานั้นเป็น Non-Singular Matrix หรือไม่ ถ้าเป็น Non-Singular Matrix เราก็สามารถหาอินเวอร์สได้ แต่ถ้าไม่เป็น Non-Singular Matrix (คือ เป็น Singular Matrix) เราก็ไม่สามารถหาอินเวอร์สได้

การทดสอบว่าเมทริกซ์ที่กำหนดให้นั้นเป็น Non-Singular Matrix หรือไม่เราพิจารณาจากค่าของดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์นั้น ถ้าค่าของดีเทอร์มิแนนท์ต่างจากศูนย์เมทริกซ์นั้นจะเป็น Non-Singular Matrix แต่ถ้าค่าดีเทอร์มิแนนท์เท่ากับศูนย์แสดงว่าเมทริกซ์นั้นเป็น Singular Matrix และไม่มี Inverse

จาก $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ เราได้ว่า $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

จะเห็นได้ว่า มีค่าต่างจากศูนย์ แสดงว่าเมทริกซ์ A ที่กำหนดให้นั้นเป็น Non-Singular Matrix และสามารถหาอินเวอร์สได้

เมื่อเราได้ทดสอบแล้วว่าเราสามารถหาอินเวอร์สของ A ได้ ฉะนั้น เราก็ดำเนินการในขั้นต่อไปคือ หา Adjoint A จากคำนิยามของ Adjoint A คือ Transpose of Cofactor Matrix A ซึ่งจากเมทริกซ์ A เราหา Cofactor Matrix A ได้คือ

$$C = \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{12}| \\ |C_{21}| & |C_{22}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}$$

เมื่อเรา Transpose C จะได้ Adj:A คือ

$$\text{Adj. } A = C' = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

จากสูตรการหาอินเวอร์สเราได้ว่า

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj. } A}{|A|}$$

เพราะฉะนั้น เมื่อแทนค่าในสูตรจะได้

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/3 & \text{[illegible]} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงหาอินเวอร์สของเมทริกซ์ B

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u> <u>ขั้นที่ 1</u> ทดสอบว่าเมทริกซ์ที่กำหนดให้ว่าเป็น Non-Singular Matrix หรือไม่

จากเมทริกซ์ B ที่กำหนดให้เราหา B ได้คือ

$$|B| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -9 - 6 - 84 = -99 \neq 0$$

ซึ่งมีค่าต่างจากศูนย์ ฉะนั้น Matrix B เป็น Non-Singular Matrix และสามารถหาอินเวอร์สได้

<u>ขั้นที่ 2</u> หา Cofactor ของเมทริกซ์ B ได้คือ

$$C = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} -21 & 9 & -6 \\ -5 & -12 & 8 \\ 7 & -3 & -31 \end{bmatrix}
$$

เพราะฉะนั้น $\text{Adj.}B = C'$ $= \begin{bmatrix} -21 \; -69 \; -31 \; -37 \; -5 \; -11 \end{bmatrix}$

และอินเวอร์สของเมทริกซ์ B คือ

$$
B^{-1} = \frac{\text{Adj } B}{|B|} = \frac{1}{-99}\begin{bmatrix} -21 & 7 & -5 \\ 9 & -3 & -12 \\ -6 & -31 & 8 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 21/99 & -7/99 & 5/99 \\ -9/99 & 3/99 & 12/99 \\ 6/99 & 31/99 & -8/99 \end{bmatrix}
$$

จากตัวอย่างทั้งสองตัวอย่างข้างต้นนี้ ผู้อ่านสามารถแสดงให้เห็นจริงได้ว่า

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$ และ $BB^{-1} = B^{-1}B = I$ ตามลำดับ

เราได้ทราบสูตรในการหาอินเวอร์สและวิธีการหาอินเวอร์สแล้ว ฉะนั้นในตอนต่อไปนี้เราควรมาทำความเข้าใจว่าสูตรในการหาอินเวอร์สนั้นได้มาอย่างไร ซึ่งจะขอกล่าวถึงดังต่อไปนี้

สมมติให้เมทริกซ์ A เป็น Non-Singular Matrix ซึ่งมีลักษณะดังนี้

$$\underset{(n\times n)}{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

เราสามารถหา Cofactor Matrix A ได้คือ

$$C = \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{12}| & \cdots & |C_{1n}| \\ |C_{21}| & |C_{22}| & \cdots & |C_{2n}| \\ |C_{n1}| & |C_{n2}| & \cdots & |C_{nn}| \end{bmatrix}$$

และเมื่อ Transpose จะได้ Adj A ดังนี้

$$Adj.A = C' = \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{21}| & \cdots & |C_{n1}| \\ |C_{12}| & |C_{22}| & \cdots & |C_{n2}| \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ |C_{1n}| & |C_{2n}| & \cdots & |C_{nn}| \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก มี Dimension($n \times n$) และ C' มี Dimension ($n \times n$)
เพราะฉะนั้น เราสามารถ post-multiply A ด้วย C' ได้ ดังนี้

$$AC' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{21}| & \cdots & |C_{n1}| \\ |C_{12}| & |C_{22}| & \cdots & |C_{n2}| \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ |C_{1n}| & |C_{2n}| & \cdots & |C_{nn}| \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=i}^{n} a_{ij} |C_{ij}| & \sum_{j=i}^{n} a_{ij} |C_{2j}| & \cdots & \sum_{j=i}^{n} a_{ij} |C_{nj}| \\ \sum_{j=i}^{n} a_{2j} |C_{1j}| & \sum_{j=i}^{n} a_{2j} |C_{2j}| & \cdots & \sum_{j=i}^{n} a_{2j} |C_{nj}| \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=i}^{n} a_{nj} |C_{1j}| & \sum_{j=i}^{n} a_{nj} |C_{2j}| & \cdots & \sum_{j=i}^{n} a_{nj} |C_{nj}| \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & |A| \end{bmatrix} = |A| \; I_n$$ (เอาตัวร่วม $|A|$ ออก)

เหตุที่ในแนว Diagonal ของเมทริกซ์ผลคูณ AC' เป็น $|A|$ เพราะเป็นไปตามวิธีการหาค่าของดีเทอร์มิแนนท์โดยวิธี Laplace Expansion เช่น

$\sum_{j=i}^{n} a_{1j} |C_{1j}|$ คือ ค่าของ $|A|$ เมื่อยึดเอา row ที่ 1 เป็นหลัก

$$\sum_{j=i}^{n} a_{2j} \; |c_{2j}|$$ คือ ค่าของ $|A|$ เมื่อยึดเอา row ที่ 2 เป็นหลัก

$$\sum_{j=i}^{n} a_{nj} \; |c_{nj}|$$ คือ ค่าของ $|A|$ เมื่อยึดเอา row ที่n เป็นหลัก

ส่วน element ที่อยู่นอกแนว Diagonal มีค่าเป็นศูนย์ เพราะว่าโดยคุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนท์ เราจะได้ว่า ใน row ใด row หนึ่ง (หรือ column ใด column หนึ่ง) ผลบวกของผลคูณของ element of Determinant กับ cofactor ที่ไม่ใช่ cofactor ของ element นั้น ๆ จะมีค่าเท่ากับศูนย์ (ผู้อ่านสามารถพิสูจน์ได้เองว่าจริงหรือไม่)

เนื่องจากเราได้สมมติแล้วว่า เมทริกซ์ A เป็น Non-Singular Matrix ฉะนั้นค่าของ $|A|$ จะต้องไม่เท่ากับศูนย์ ฉะนั้นเมื่อเราหารตลอด $AC' = A\ I$ ด้วย (A) จะได้

$$\frac{AC'}{|A|} = \frac{|A|\ I}{|A|} = I$$

$$\frac{AC'}{|A|} = I$$

โดยเรา pre-multiply ทั้งสองข้างด้วย A^{-1} จะได้

$$A^{-1}A\ \frac{C'}{|A|} = A^{-1}\ I$$

$$I\ \frac{C'}{|A|} = A^{-1}\ I$$

$$\frac{C'}{|A|} = A^{-1}$$

หรือ $A^{-1} = \frac{C'}{|A|} = \frac{Adj. A}{|A|}$

ซึ่งเป็นสูตรในการหา A^{-1} ตามที่เราต้องการ

8 <u>แรงค์ของเมทริกซ์</u> (Rank of Matrix)

Rank ของเมทริกซ์ใดเมทริกซ์หนึ่ง คือ จำนวนที่มากที่สุดของ row ที่เป็นอิสระต่อกัน (Linearly Independent Rows ของเมทริกซ์นั้น หรือ คือจำนวนที่มากที่สุดของ column ที่เป็นอิสระต่อกัน (Linearly Independent Columns ในเมทริกซ์นั้นซึ่งจำนวน row ที่เป็นอิสระต่อกันจะเท่ากันกับจำนวน column ที่เป็นอิสระต่อกันด้วย

ฉะนั้น ในเมทริกซ์ซึ่งมี Dimension $(m \times n)$ จะมี Rank ได้มากที่สุดเท่ากับ m หรือ n ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับว่าจำนวนไหนน้อยกว่ากัน กล่าวคือ ถ้า $m \times n$ จำนวน Rank ที่มากที่สุดที่เป็นไปได้คือ m แต่ถ้า $n \times m$ จำนวน Rank ที่มากที่สุดที่เป็นไปได้คือ n

โดยอาศัยคุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนท์ประการหนึ่งที่กล่าวว่า ในดีเทอร์มิแนนท์ใดดีเทอร์มิแนนท์หนึ่ง ถ้า row ใด row หนึ่งขึ้นอยู่กับอีก row ใด row หนึ่ง (คือเป็น Linearly Dependent Rows) ค่าของดีเทอร์มิแนนท์จะเท่ากับศูนย์ หรือ column ใด column หนึ่งขึ้นอยู่กับอีก column ใด column หนึ่ง (คือเป็น Linearly Dependent Columns) ค่าของดีเทอร์มิแนนท์จะเท่ากับศูนย์ เราจึงสามารถหา Rank ของเมทริกซ์ที่กำหนดได้ง่ายขึ้น กล่าวคือ จำนวน Rank ของเมทริกซ์ใด ๆ จะเท่ากับจำนวน Order ที่มากที่สุดของดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์นั้นที่มีค่าต่างจากศูนย์

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้เมทริกซ์ A คือ

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 4 & 8 & 9 \\ 8 & 4 & -15 \end{bmatrix}$$

จากเมทริกซ์ ที่กำหนดให้นี้ จะสังเกตได้ว่ามี Dimension (3×3) ฉะนั้น จำนวน Rank ที่มากที่สุด ที่จะเป็นไปได้คือ 3 แต่ Rank จะเท่ากับ 3 จริงหรือไม่ เราต้องทดสอบดูโดยพิจารณาจากค่าของดีเทอร์มิแนนท์ A ที่มี Order เท่ากับ 3 ดูก่อนว่าต่างจากศูนย์หรือไม่ ถ้าต่างจากศูนย์ แสดงว่าเมทริกซ์ A มี Rank เท่ากับ 3 แต่ถ้าไม่ต่างจากศูนย์แสดงว่าเมทริกซ์ A ต้องมี Rank น้อยกว่า 3 ซึ่งอาจเป็น 2 หรือ 1 ก็ได้ เราก็ต้องทดสอบต่อไป

จากเมทริกซ์ A เราหา $|A|$ ได้ดังนี้

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 4 & 8 & 9 \\ 8 & 4 & -15 \end{vmatrix} = -600 + 504 + 48 - 192 - 180 + 420$$

$$= 972 - 972 = 0$$

ฉะนั้น แสดงว่า Rank ของ A จะต้องน้อยกว่า 3

เราก็ทดสอบต่อไปใหม่โดยพิจารณาจาก Sub-determinant A ที่มี order เท่ากับ 2 ดังนี้

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} \qquad \text{(ตัดเอา Row ที่ 3 และ column ที่ 3 ออกไป)}$$

$$= 40 - 28 = 12 \neq 0$$

ซึ่งได้ค่าต่างจากศูนย์ แสดงว่า Rank ของเมทริกซ์ A เท่ากับ 2 (คือ Order ที่มากที่สุดของ Determinant ที่มีค่าต่างจากศูนย์)

โดยทำนองเดียวกันนี้เราอาจตัดเอา Row อื่นและ Column อื่นออกไปให้เหลือเพียง 2 row กับ 2 column แล้ว เราหาค่าของดีเทอร์มิแนนท์ดู จะได้ว่า ค่าของดีเทอร์มิแนนท์ต่างจากศูนย์ ซึ่งทำให้เราสามารถสรุปได้ว่า Rank ของเมทริกซ์ A เท่ากับ 2 จริง

9 <u>การแก้สมการเส้นตรงด้วยเครเมอร์ซรูล</u> (Cramer's Rule)

Cramer's Rule เป็นวิธีการหาค่าของตัวแปรในระบบสมการเส้นตรงโดยอาศัยหลักของอินเวอร์สเมทริกซ์ ที่มาของวิธีการ Cramer's Rule สามารถอธิบายได้ดังนี้

สมมติว่า เรามีสมการเส้นตรงอยู่ n สมการ และมีตัวแปรอยู่ n ตัว เราสามารถเขียนในรูปของเมทริกซ์ได้คือ $Ax = d$ โดยที่ A มี dimension เท่ากับ (n n) และเป็น Non-Singular Matrix และเราสามารถหาค่าของตัวแปรได้คือ

$$x = A^{-1}d = \frac{1}{|A|}(\text{Adj } A)\, d$$

ซึ่งหมายความว่า

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{21}| & \cdots & |C_{n1}| \\ |C_{12}| & |C_{22}| & \cdots & |C_{n2}| \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ |C_{1n}| & |C_{2n}| & \cdots & |C_{nn}| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d_1|C_{11}| + d_2|C_{21}| + \cdots + d_n|C_{n1}| \\ d_1|C_{12}| + d_2|C_{22}| + \cdots + d_n|C_{n2}| \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d_1|C_{1n}| + d_2|C_{2n}| + \cdots + d_n|C_{nn}| \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} \sum_{j=i}^{n} d_i \; |C_{i1}| \\ \sum_{j=i}^{n} d_i \; |C_{i2}| \\ \sum_{i=1}^{n} d_i \; |C_{in}| \end{bmatrix}$$

ฉะนั้น เราจึงได้ว่า

$x_1 = \frac{1}{|A|} \sum_{i=1}^{n} d_i \, |C_{i1}|$ $\qquad$ $x_2 = \frac{1}{|A|} \sum_{i=1}^{n} d_i \, |C_{i2}|$

$x_3 = \frac{1}{|A|} \sum_{i=1}^{n} d_i \, |C_{i3}|$ $\qquad$ $x_4 = \frac{1}{|A|} \sum_{i=1}^{n} d_i \, |C_{i4}|$

เรื่อยไปจนกระทั่ง $x_4 = \frac{1}{|A|} \sum_{i=1}^{n} d_i \, |C_{in}|$

จะสังเกตได้ว่า $\sum_{i=1}^{n} d_i \, |C_{i1}|$ จะเป็นค่าของดีเทอร์มิแนนท์ที่เกิดจากการนำเอา Constant Vector ไปแทนใน column ที่ 1 ของ $|A|$

$\sum_{i=1}^{n} d_i \, |C_{i2}|$ จะเป็นค่าของดีเทอร์มิแนนท์ที่เกิดจากการนำเอา Constant Vector d ไปแทนใน column ที่ 2 ของ $|A|$

$\sum_{i=1}^{n} d_i \, |C_{i3}|$ จะเป็นค่าของดีเทอร์มิแนนท์ที่เกิดจากการนำเอา Constant

Vector d ไปแทนใน Column ที่ 3 ของ $|A|$

ฉะนั้นเราจึงสรุปได้ว่า ถ้าเราต้องการหาค่าของตัวแปร x_i เราก็นำเอา Constant Vector d ไปแทนลงใน Colum j^{th} ของ $|A|$ ซึ่งจะกลายเป็นดีเทอร์มิแนนท์ใหม่ คือ $|A_j|$ แล้วเราหาร $|A_j|$ ด้วย $|A|$ ก็จะได้ค่าของตัวแปร x_j ตามต้องการ ซึ่งสามารถเขียนแสดงให้เห็นได้ดังนี้

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \boxed{d_1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & d_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & d_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(Columnjth ที่แทนที่ด้วย d)

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงหาค่าของตัวแปรจากสมการต่อไปนี้

$$2x_1 + x_2 = 24$$

$$3x_1 + 2x_2 = 8$$

<u>วิธีทำ</u> จากสมการข้างต้นเราเขียนในรูปของเมทริกซ์ได้คือ

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \end{bmatrix}$$

โดยวิธี Cramer's Rule จะได้ว่า

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 24 & 1 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-48 - 8}{-4 - 3} = \frac{-56}{-7} = 8$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 24 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{16 - 72}{-4 - 3} = \frac{-56}{-7} = 8$$

นั่นคือ $x_1 = 8$ และ $x_2 = 8$

<u>ตัวอย่างที่</u> 2 จงใช้ Cramer's Rule แก้สมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 \quad &= 2 \\ 3x_2 + 2x_3 &= 16 \\ 5x_1 \quad + 3x_3 &= 21 \end{aligned}$$

วิธีทำ จากสมการที่กำหนดให้สามารถเขียนในรูปของเมทริกซ์ได้คือ

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 16 \\ 21 \end{bmatrix}$$

โดยวิธีการ Cramer's Rule จะได้ว่า

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 21\ 16 & 3\ 0 & 2\ 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{24}{8} = 3$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 6 & 16 & 23 \end{vmatrix}}{8} = \frac{32}{6} = 4$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 16 \\ 5 & 0 & 21 \end{vmatrix}}{8} = \frac{16}{8} = 2$$

นั่นคือ $x_1 = 3$ $x_2 = 4$ $x_3 = 2$

รายชื่อหนังสือที่ควรอ่านเพิ่มเติม

Allen, R.G.D. Mathematical Aralyeis for Economists. Macmillan & Co., Ltd., 1971. ch. 18

Alman, Clopper Jr. Matrix Methods in Economics. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1967 ch. 1.

Ayres, Frank Jr. Matrices : Theory and Problems. Schaum's Outline Series. McGraw-Hill Book Company, 1962, ch. 1,7, and LO

Chiang, Alpha C. Fundamental Methods of Mathematical Economics. 2nd, ed. McGraw-Hill Rogkusha, Ltd., 1974 ch. 4 and 5

Read, Ronald G. A Mathematical Background for Economists and Social Scientists. Prentice - Hall, Inc., 1972. ch. 14