และ(2) เมื่อนำเอานัลเมทริกซ์ไปคูณเข้ากับเมทริกซ์ใด ๆ ก็ตามจะทำให้เมทริกซ์นั้น ๆ กลายเป็นนัลเมทริกซ์ด้วย (แต่ Dimension ของนัลเมทริกซ์ผลคูณไม่จำเป็นต้องเท่ากับ Dimension ของนัลเมทริกซ์ที่นำไปคูณนั้น) กล่าวคือ

$$\underset{(m\times n)}{A}\ \underset{(n\times p)}{0} = \underset{(m\times p)}{0} \quad \text{และ} \quad \underset{(q\times m)}{0}\ \underset{(m\times n)}{A} = \underset{(q\times n)}{0}$$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u>

$$A + 0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A$$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u>

$$\underset{(3\times 2)}{A}\ \underset{(2\times 3)}{0} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \underset{(3\times 3)}{0}$$

4.3 <u>ข้อแปลกเกี่ยวกับพีชคณิตของเมทริกซ์</u>

(Idiosyncraciee of Matrix Algebra)

พีชคณิตของเมทริกซ์ (Algebra of Matrices)มีอยู่บางประการที่แตกต่างจากพีชคณิตของเลขคณิต (Algebra of Number)กล่าวคือ

1) ในพีชคณิตของเลขคณิต เราพบว่า $ab = ba$ เสมอ แต่ในพีชคณิตของเมทริกซ์เราพบว่า $AB \neq BA$ เสมอไป มีบางกรณีเท่านั้นที่ $AB = BA$ เช่น ถ้ากำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

เราจะได้ว่า
$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 13 & 12 \end{bmatrix}$$

และ
$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 13 & 12 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $AB = BA$

2) ในพีชคณิตของเลขคณิตพบว่า $ab = 0$ ต่อเมื่อ a หรือ b เท่ากับศูนย์ แต่ในพีชคณิตของเมทริกซ์เราจะพบว่าในบางกรณี $AB = 0$ ทั้ง ๆ ที่ A และ B ไม่ได้เป็นนัลเมทริกซ์ (Null Matrix หรือ Zero Matrix) ตัวอย่างเช่น

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

3) ในพีชคณิตของเลขคณิตเราพบว่า ถ้า $cd=ce$ (โดยที่ $c\neq 0$) เราจะสรุปได้ว่า $d = e$ ด้วย แต่ในพีชคณิตของเมทริกซ์เราพบว่า ถ้า $CD = CE$ เราจะไม่สามารถสรุปได้ว่า $D = E$ เช่น กำหนดให้

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

เราจะพบว่า
$$CD = CE = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 15 & 24 \end{bmatrix}$$

5 <u>ทรานซโพสและอินเวอร์ส</u>

(Transposes and Inverses)

ในการศึกษาเมทริกซ์เราจะพบกับคำว่าทรานซโพส และอินเวอร์ส ฉะนั้นเราจำเป็นต้องทำความเข้าใจกันว่า Transpose of Matrix หมายความว่าอย่างไรและ Inverse of Matrix หมายความว่าอย่างไร

5.1 นิยามของ Transpose of Matrix

Transpose of Matrix หมายถึงการเขียนเมทริกซ์ที่กำหนดให้เสียใหม่ โดยเปลี่ยนตำแหน่งของ row แต่ละ row ของเมทริกซ์ที่กำหนดให้ให้เป็นแต่ละ Column ของเมทริกซ์ใหม่ กล่าวคือ เอา row ที่ 1 ของเมทริกซ์ที่กำหนดให้เขียนเป็น Column ที่ 1 ของเมทริกซ์ใหม่, เอา row ที่ 2 ของเมทริกซ์ที่กำหนดให้เขียนเป็น Column ที่ 2 ของเมทริกซ์ใหม่, เอา row ที่ 3 ของเมทริกซ์ที่กำหนดให้เขียนเป็น Column ที่ 3 ของเมทริกซ์ใหม่ ฯลฯ

ตัวอย่าง สมมติว่าเมทริกซ์ที่กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & -5 \\ 7 & -9 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

เราจะได้ว่า Transpose of A คือ

$$A' = A^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 5 & 2 & -9 \\ 7 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

และ Transpose of B คือ

$$B' = B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

เราใช้ A' หรือ A^T เป็นสัญญลักษณ์แทน Transpose of A

และเราใช้ B' หรือ B^T เป็นสัญญลักษณ์แทน Transpose of B

ฉะนั้นจะสังเกตได้ว่าสัญลักษณ์ของ Transpose ของเมทริกซ์ใดก็ตามได้จากการเขียนเครื่องหมาย Prime (') หรือตัวทีตัวใหญ่ (T) ลงบนชื่อของเมทริกซ์ที่กำหนดให้นั้น ๆ

เป็นที่น่าสังเกตว่าเมทริกซ์ใหม่ที่ได้จากการ Transpose เมทริกซ์ที่กำหนดให้ อาจจะมี Dimension เหมือนเดิมกับ Dimension ของเมทริกซ์ที่กำหนดให้หรืออาจแตกต่างไปก็ได้ กล่าวคือ ถ้าเมทริกซ์ที่กำหนดให้เป็น Square Matrix เราจะได้ว่า Dimension ของ Transpose Matrix จะเหมือนเดิม แต่ถ้า Matrix ที่กำหนดให้ไม่เป็น Square Matrix เราจะได้ว่า Dimension ของ Transpose Matrix จะแตกต่างไปจาก Dimension ของ Matrix ที่กำหนดให้นั้น จากตัวอย่างข้างต้นเราจะเห็นได้ว่า Dimension ของ A' เท่ากับ Dimension ของ A แต่ Dimension ของ B' ไม่เท่ากับ Dimension ของ B

สำหรับ Square Matrix บางชนิดเมื่อเรา Transpose มันแล้วจะเหมือนกับเมทริกซ์เดิมทุกประการ Square Matrix ชนิดนี้เราเรียกว่า Symmetric Matrix กล่าวคือ ถ้า A เป็น Symmetric Matrix เราจะพบว่า $A' = A$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

เมื่อทรานสโพสแล้วจะได้ว่า

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น A เป็น Symmetric Matrix

ข้อสังเกตสำหรับ Symmetric Matrix ก็คือ Element of Matrix ที่อยู่ 2 ข้างของแนว Diagonal จะเหมือนกัน นั่นคือ ถ้าเราเปรียบแนว Diagonal เหมือนกับกระจกเงา และสมมติว่า Element of Matrix ที่อยู่ทางด้านมุมล่างซ้าย

เป็นวัตถุวางอยู่หน้ากระจกเงา เราจะพบว่าElement of Matrix ที่อยู่ในส่วนมุมบนขวานั้นจะเป็นเงาของ Element of Matrix ที่อยู่ที่มุมล่างซ้ายนั่นเอง

5.2 <u>คุณสมบัติของ Transpose</u>

คุณสมบัติที่สำคัญของ Transpose มี 3 ประการ คือ

(1) $(A')' = A$

หมายความว่า Transpose ของ Transposed Matrix เราจะได้เมทริกซ์เดิม

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 9 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 5 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

และ $(A')' = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 9 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้น $(A')' = A$

(2) $(A + B)' = A' + B'$

หมายความว่า Transpose ของผลบวกของเมทริกซ์ จะเท่ากับผลบวกของ Transposed Matrices

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

เราจะได้ว่า

$$A + B = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \qquad (A+B)' = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$$

และ

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \qquad B' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

และจะได้ว่า

$$A' + B' = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $(A + B)' = A' + B'$

$$(3)\ (AB)' = B'A'$$

หมายความว่า Transpose ของผลคูณจะเท่ากับผลคูณของ Transposed Matrices แต่สลับที่กัน (คือสลับที่จาก AB เป็น BA)

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

เราจะได้ว่า

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 4 \\ 13 & 16 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(AB)' = \begin{bmatrix} 11 & 13 \\ 12 & 16 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

และ

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B'A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 13 \\ 12 & 16 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $(AB)' = B'A'$

5.3 นิยามของอินเวอร์ส (Definifion of Inverse)

Inverse ของเมทริกซ์ คือ เมทริกซ์ใดก็ตามที่เมื่อนำไปคูณเข้าข้างหน้า (pre-multiply) หรือคูณเข้าข้างหลัง (post-multiply) ของเมทริกซ์ที่กำหนดให้แล้วได้ Identity Matrix กล่าวคือ สมมติว่า A เป็นเมทริกซ์ที่กำหนดให้และสามารถหา Inverse ของ A ได้ เราจะได้ว่า

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

โดยที่ A^{-1} เป็นสัญญลักษณ์ที่ใช้สำหรับ Inverse ของเมทริกซ์ A

ข้อที่น่าสัง.กตสำหรับอินเวอร์สเมทริกซ์ คือ

1) ไม่จำเป็นเสมอไปว่า Square Matrix จะมีอินเวอร์ส Square Matrix จะมี Inverse ก็ต่อเมื่อ Square Matrix นั้นเป็น Non-Singulare Matrix(Square Matrix จะเป็น Non-Singular Matrix ต่อเมื่อ Determinant ของเมทริกซ์นั้นมีค่าต่างจากศูนย์ ซึ่งเราจะได้กล่าวถึงในตอนต่อไป)

2) ถ้า A^{-1} เป็นจริง เรากล่าวได้ว่า A เป็น Inverse ของ A^{-1} ด้วย กล่าวคือ A และ A^{-1} จะเป็น Inverse ซึ่งกันและกัน

3) ถ้า A มี Dimension $n \times n$ และมี Inverse เราจะได้ว่า Dimension ของ A^{-1} และของ I จะต้องเป็น $n \times n$ ด้วย

4) ถ้า A เป็น Square Matrix และมี Inverse เราจะพบว่ามีเมทริกซ์เพียงชุดเดียวเท่านั้นที่เป็น A^{-1} ซึ่งอาจพิสูจน์ได้ดังต่อไปนี้

สมมติว่า B เป็น Inverse ของ A ดังนั้น

$$AB = BA = I$$

และสมมติต่อไปว่า C เป็นเมทริกซ์อีก ชุดหนึ่งที่ทำให้ $AC = CA = I$

ถ้าเรา pre-multiply $AB=I$ ด้วย C เราจะได้ว่า

$$CBA = CI \quad (=C)$$

แต่เราได้สมมติไว้แล้วว่า $CA = I$ เพราะฉะนั้นเราจึงเขียน $CBA = C$ เสียใหม่ได้คือ

$$IB = C \quad \text{หรือ} \quad B = C$$

ฉะนั้น แสดงว่า $B=C$ เป็นเมทริกซ์เดียวกันและเป็น Inverse ของ A

5) ถ้าเราทราบว่า $AA^{-1}=I$ เราจะสรุปได้ว่า $A^{-1}A=I$ ด้วย ซึ่งสามารถพิสูจน์ให้เห็นจริงได้ดังต่อไปนี้

ถ้า $AA^{-1}=I$ และถ้าสมมติว่าเมทริกซ์ B เป็นเมทริกซ์ชุดหนึ่งที่ Pre-multiply เข้ากับ A แล้วได้ I นั่นคือ

$$BA = I, \quad B = A^{-1}$$

เมื่อเรา post-multiply ทั้งสองข้างของ $BA=I$ ด้วย A^{-1} จะได้ว่า

$$(BA)A^{-1} = IA^{-1}$$

$$B(AA^{-1}) = IA^{-1} \quad \text{(associative law)}$$

$$BI = IA^{-1} \quad (AA^{-1}=I \text{ ตามข้อสมมติ})$$

เพราะฉะนั้น $B = A^{-1}$

นั่นคือ $A^{-1}A = I$

เราจึงสรุปได้ว่า ถ้า $AA^{-1}=I$ เราจะได้ว่า $A^{-1}A = I$ ด้วย

หรือในทำนองเดียวกันถ้า $A^{-1}A = I$ เราจะได้ว่า $AA^{-1} = I$ ด้วย

5.4 คุณสมบัติของอินเวอร์ส

คุณสมบัติที่สำคัญของ Inverse Matrix มี 3 ประการ คือ

1) $(A^{-1})^{-1} = A$

2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3) $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

จากคุณสมบัติข้อที่หนึ่ง กล่าวได้ว่า อินเวอร์สของอินเวอร์สเมทริกซ์จะได้เมทริกซ์เดิม

จากคุณสมบัติข้อที่ 2 กล่าวได้ว่า อินเวอร์สของผลคูณจะเท่ากับผลคูณของอินเวอร์สเมทริกซ์แต่สลับที่กัน

จากคุณสมบัติข้อที่ 3 กล่าวได้ว่า อินเวอร์สของทรานซโพสเมทริกซ์จะเท่ากับทรานซโพสของอินเวอร์ส
เมทริกซ์

สำหรับคุณสมบัติข้อที่ 1 นั้น สามารถเห็นได้ชัดแจ้งแล้วว่าเป็นจริง เพราะฉะนั้นจะขอพิสูจน์เฉพาะคุณสมบัติข้อที่ 2 และ 3 ดังต่อไปนี้

<u>พิสูจน์คุณสมบัติข้อที่ 2</u>

กำหนดให้ AB เป็นเมทริกซ์ผลคูณซึ่งสามารถหาอินเวอร์สได้คือ C เพราะฉะนั้น $CAB = I$ เมื่อเรา post-multiply $CAB=I$ ทั้ง 2 ข้างด้วย $B^{-1}A^{-1}$ จะได้ว่า

$$CABB^{-1} = IB^{-1}A^{-1} \quad (=B^{-1}A^{-1})$$

สำหรับเทอมทางด้านซ้ายมือเราจะเขียนได้ใหม่คือ

$$\begin{aligned} CABB^{-1}A^{-1} &= CA(BB^{-1})A^{-1} \\ &= CAIA^{-1} \\ &= CAA^{-1} = CI = C \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $C = B^{-1}A^{-1}$

นั่นคือ Inverse of AB คือ $B^{-1}A^{-1}$

หรือ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

<u>พิสูจน์คุณสมบัติข้อที่ 3</u>

สมมติให้ A' เป็น transpose of matrix A ที่กำหนดให้
และสมมติว่า D เป็น Inverse ของ A'
เพราะฉะนั้น เราจะได้ว่า $DA' = I$
แต่เราทราบแล้วว่า $(AA^{-1})' = I' = I$

ฉะนั้นเราจึง เขียน DA' เสียใหม่ได้คือ

$$DA' = I = (AA^{-1})' = (A^{-1})'A'$$

และเมื่อ post-mulitiply ทั้งสองข้างด้วย $(A')^{-1}$ จะได้ว่า

$$DA'(A')^{-1} = (A^{-1})'A'(A')^{-1}$$

หรือ
$$D = (A^{-1})'$$

นั่นคือ
$$(A')^{-1} = (A^{-1})'$$

5.5 การใช้ Inverse Matrix ในการแก้สมการเส้นตรง

สมมติว่าเรามีระบบสมการเส้นตรงซึ่งสามารถเขียนในรูปของเมทริกซ์ได้คือ

$$Ax = d$$

โดยที่ A คือ เมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์ของ x (Coefficient Matrix)

x คือ Vector ของตัวแปร x

d คือ Vector ของตัวคงที่

เมื่อเรา pre-multiply $Ax=d$ ทั้งสองข้างด้วย A^{-1} (ถ้าสมมติว่า A มี Inverse) เราจะได้ว่า

$$A^{-1}Ax = A^{-1}d$$

หรือ
$$Ix = A^{-1}d$$

$$x = A^{-1}d$$

ซึ่งจะได้ว่า Vector ของตัวแปร x เท่ากับ Vector ของตัวคงที่ $A^{-1}d$ เพราะฉะนั้น element ของ Vector x แต่ละตัวจะเท่ากับ element แต่ละตัวที่สอดคล้องกันของ Constant Vector ดังนั้น เราจึงบอกได้ว่า x แต่ละตัวมีค่าเท่ากับเท่าไร

การแก้สมการเส้นตรงด้วย Inverse Matrix นี้เป็นหลักสำคัญของการแก้สมการเส้นตรง

ด้วยวิธีการของ Cramer's Rule ซึ่งจะได้กล่าวถึงต่อไปในหัวข้อ 2.9

เนื่องจากในการหา Inverse หรือทดสอบว่าเมทริกซ์ที่กำหนดให้มี Inverse หรือไม่ เราจำเป็นต้องใช้ความรู้เกี่ยวกับเรื่อง Determinant ด้วย ฉะนั้น ขอให้เราศึกษาเรื่องของ Determinant ในหัวข้อต่อไปนี้

6 <u>นิยามของดีเทอร์มิแนนท์</u> (Definition of Determinant)

ดีเทอร์มิแนนท์ คือ เลขจำนวนจริงที่ถูกนิยามขึ้นให้มีความสัมพันธ์โดยเฉพาะกับ square matrix ที่กำหนดให้ กล่าวคือ ถ้า A เป็น square matrix ที่กำหนดให้เราจะได้ว่า A เป็น Determinant ของเมทริกซ์ A

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> กำหนดให้ A เป็น square matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

เราจะได้ว่า Determinant of A คือ

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \text{Scalar}$$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> สมมติว่า A และ B เป็นเมทริกซ์ที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

เราสามารถคำนวณหาค่า Determinant ของ A และ B ได้ คือ

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = (3)(9) - (7)\ (5) = -8$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (4)(4)-(2)(3) = 10$$

ข้อสังเกตสำหรับความแตกต่างระหว่าง Determinant กับ Matrix คือ

1) Determinant จะต้องเป็น Square เสมอ(คือมีจำนวน row และ Column เท่ากัน) แต่สำหรับ Matrix จะเป็น Square หรือไม่ก็ได้

2) สำหรับ Determinant เราใช้เส้นตรงตั้งฉากเป็นเส้นปิดหัวท้าย แต่ Matrix เราใช้วงเล็บใหญ่ปิดหัวท้าย

3) สำหรับ Determinant เราสามารถหาค่าออกมาเป็นตัวเลขได้ แต่สำหรับเมทริกซ์เราไม่สามารถหาค่าออกมาเป็นตัวเลขได้ คงเป็นกลุ่มของตัวเลขเช่นนี้ตลอดไป

4) สำหรับ Determinant เราใช้ "Order" บอกจำนวน row และ Column ของ Determinant ว่าเท่ากับเท่าไร แต่ในเมทริกซ์เราใช้คำว่า "Dimension" เป็นตัวบอกจำนวน row และ Column ของเมทริกซ์นั้น ๆ เช่น

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$ แสดงว่า Order of Determinant A = 2

$$|B| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$ แสดงว่า B มี order เท่ากับ 3

6.1 <u>การหาค่าของ Determinant</u> (Evaluation of Determinant)

การหาค่าของ Determinant มีวิธีการที่สำคัญ 2 วิธี คือ วิธี Cross-diagonal Multiplication และวิธี Laplace Expansion ซึ่งจะได้กล่าวถึงเป็นลำดับไปดังต่อไปนี้

<u>Cross-diagonal Multiplication</u> เป็นวิธีการหาค่าของดีเทอร์มิแนนท์ ในกรณีที่

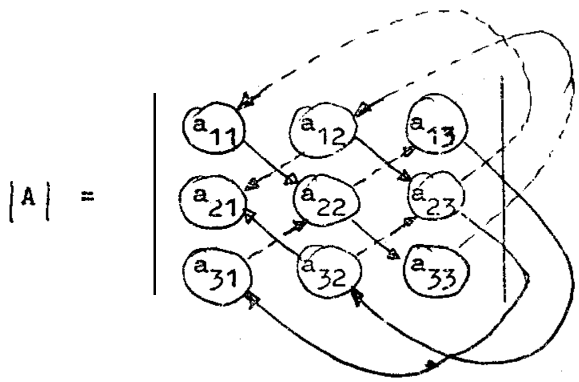
ดีเทอร์มิแนนท์นั้นมี Order ไม่เกิน 3(คือมีไม่เกิน 3 row 3 column) ถ้าดีเทอร์มิแนนท์มี Order เกิน 3 เราไม่สามารถใช้วิธีการของ Cross-diagonal Multiplication ได้ แต่ต้องใช้วิธีการของ Laplace Expansion แทน

<u>กรณีที่ 1</u> ดีเทอร์มิแนนท์มี Order= 2 เรามีหลักในการหาค่าของดีเทอร์มิแนนท์ดังนี้

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \text{Scalar}$$

กล่าวคือ เราเอา element ที่เชื่อมด้วยลูกศรชี้ลงคูณกันแล้วให้เครื่องหมายเป็นบวก และให้ผลคูณของ element ที่เชื่อมด้วยลูกศรที่ทะแยงขึ้นมีเครื่องหมายเป็นลบ ฉะนั้นเราจึงได้ $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

<u>กรณีที่ 2</u> ดีเทอร์มิแนนท์มี Order = 3 เรามีหลักในการหาค่าของ Determinant ดังในรูปที่ 2.4



<u>รูปที่ 2.4</u>

การหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ด้วยวิธี Cross-diagonal Multiplication

จากรูปที่ 2.4 เราได้ว่า

$$|A| = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{32}\,a_{21}$$

$$- a_{31}\,a_{22}\,a_{13} - a_{32}\,a_{23}\,a_{11} - a_{33}\,a_{12}\,a_{21}$$

ซึ่ง $a_{11}\,a_{22}\,a_{33}$ ได้จาก $a_{11} \rightarrow a_{22} \rightarrow a_{33}$ คูณกัน, ให้เครื่องหมายเป็น +

$a_{12}\,a_{23}\,a_{31}$ ได้จาก $a_{12} \rightarrow a_{23} \rightarrow a_{31}$ คูณกัน, ให้เครื่องหมายเป็น +

$a_{13}\,a_{32}\,a_{21}$ ได้จาก $a_{13} \rightarrow a_{32} \rightarrow a_{21}$ คูณกัน, ให้เครื่องหมายเป็น +

$a_{31}\,a_{22}\,a_{13}$ ได้จาก $a_{31} \rightarrow a_{22} \rightarrow a_{13}$ คูณกัน, ให้เครื่องหมายเป็น -

$a_{32}\,a_{23}\,a_{11}$ ได้จาก $a_{32} \rightarrow a_{23} \rightarrow a_{11}$ คูณกัน, ให้เครื่องหมายเป็น -

$a_{33}\,a_{12}\,a_{21}$ ได้จาก $a_{33} \rightarrow a_{12} \rightarrow a_{21}$ คูณกัน, ให้เครื่องหมายเป็น -

จะสังเกตได้ว่า เราจะให้เครื่องหมายของผลคูณของ element ที่เชื่อมโยงด้วยลูกศรทึบเป็นเครื่องหมายบวก(+) และให้เครื่องหมายของผลคูณของ element ที่เชื่อมโยงด้วยลูกศรเส้นประเป็นเครื่องหมายลบ(-)

ตัวอย่าง

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (4)(7)(-2) \quad (2)(0)(3) \quad (3)(5)(-1)$$

$$-(3)(7)(3) - (5)(0)(4) -(-2)(2)(-1)$$

$$= -56 \quad 0-15 - 63 - 0 - 4$$

$$= - 138$$

Laplace Expansion Method

วิธี Laplace Expansion ใช้หาค่าของ Determinant ที่มี order เท่าไรก็ได้ วิธีการหาค่าของ Determinant ด้วยวิธีนี้ คือ เลือกเอา row ใด row หนึ่ง (หรือ Column ใด Column หนึ่ง) เป็นหลัก แล้วนำเอา element ใน row (หรือใน column) ที่เราเลือกเอาเป็นหลักนั้นคูณเข้ากับ Cofactor ของมัน เสร็จแล้วเอาผลคูณที่ได้นั้นมาบวกเข้าด้วยกัน ก็จะได้ค่าของดีเทอร์มิแนนท์ตามต้องการ

หลักในการพิจารณาว่าควรจะเลือกเอา row ใด(หรือ column ใด) เป็นหลักนั้น คือ พิจารณาดูว่า row ใด(หรือ column ใด) มี element of matrix เป็นศูนย์มากที่สุดก็ให้เลือกเอา row นั้น(หรือ column นั้น) เป็นหลัก แต่ในกรณีที่ไม่มี row ใด(หรือ column ใด) มี element เป็นเลขศูนย์เลยก็ให้พิจารณาดูว่า row ไหน(หรือ column ไหน) มี element เป็นเลขจำนวนน้อยมากจำนวนเราก็เลือกเอา row นั้น(หรือ columnนั้น) เป็นหลัก เหตุที่เป็นเช่นนี้เพราะว่าจะทำให้การคิดเลขง่ายขึ้น เช่น ถ้า row (หรือ column) ที่เราเลือกเอาเป็น row(หรือ column)หลักนั้นมี element เป็นเลขศูนย์หลายจำนวนก็จะทำให้จำนวนเทอมที่ต้องคิดเลขจะมีน้อยลง เพราะว่าเมื่อนำเอา element ที่เป็นศูนย์นั้นคูณเข้ากับ Cofactor ของมันก็จะทำให้เทอมนั้นเป็นศูนย์

สำหรับคำว่า Cofactor นั้น หมายถึง Minor ที่ถูกกำหนดเครื่องหมายให้ กล่าวคือ

$$|C_{ij}| = (-1)^{ij}|M_{ij}|$$

โดยที่ $|C_{ij}|$ หมายถึง Cofactor ของ element a_{ij}

$|M_{ij}|$ หมายถึง Minor ของ element aij

i หมายถึง row ลำดับที่ i , (i=1,2,3,. . .)

j หมายถึง Column ลำดับที่ j (j= 1, 2,3,...)

คำศัพท์ที่ต้องทำความเข้าใจต่อไปก็คือ คำว่า "Minor" เราอาจให้คำนิยาม "Minor" ได้ว่า Minor คือ ดีเทอร์มิแนนท์ส่วนย่อย (Sub-Determinant) ของดีเทอร์มิแนนท์ที่กำหนดให้ที่สอด

คล้องกันกับ element of matrix ที่เราพิจารณาถึง ผู้อ่านอาจเข้าใจความหมายของ Minor ได้มากขึ้นถ้าพิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 (การหา Minor)

สมมติว่าดีเทอร์มิแนนท์ A ที่กำหนดให้คือ

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

เราจะได้ว่า Minor ของ a_{11} คือ $|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$

Minor ของ a_{21} คือ $|M_{21}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{32}a_{12}$

Minor ของ a_{31} คือ $|M_{31}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}$

Minor ของ a_{12} คือ $|M_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}$

Minor ของ a_{13} คือ $|M_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$

Minor ของ a_{33} คือ $|M_{33}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

ในทำนองเดียวกันนี้ เราก็สามารถหา Minor ของ element ของเมทริกซ์ A นี้ได้

จากตัวอย่างข้างต้นนี้ เราจะสังเกตได้ว่า Minor ของ element ใดก็ตามก็คือ Sub-Determinant ที่เหลือจากการขีดฆ่าเอา row และ column ที่ element นั้นปรากฏอยู่ออก เช่น ถ้าเราต้องการหา Minor ของ a_{11} เราก็ขีดฆ่าเอา row ที่ 1 และ column ที่ 1 ออก ที่เหลือจะกลายเป็น Minor ของ a_{11} ดังรูปที่ 2.5

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

<u>รูปที่ 2.5</u>

การหา Minor ของ a_{11}

<u>ตัวอย่างที่</u> 2 (การหา Cofactor)

จากคำนิยามของ Cofactor เราทราบแล้วว่า Cofactor คือ Minor ที่ถูกกำหนดเครื่องหมายให้ กล่าวคือ

$$|C_{ij}| = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

ฉะนั้น จากดีเทอร์มิแนนท์ ในตัวอย่างที่ 1 เราสามารถหา Cofactor ของ element ของ element ดีเทอร์มิแนนท์ A ได้ทุก element เช่น

Cofactor ของ a_{11} คือ $|C_{11}| = (-1)^{1+1} |M_{11}| = (-1)^2 |M_{11}|$

$$= (+) \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{22}\, a_{33} - a_{32}\, a_{23}$$

Cofactor ของ a_{21} คือ $|C_{21}| = (-1)^{2+1}|M_{21}| = (-1)^3 |M_{21}|$

$$= (-)\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= -(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13})$$

Cofactor ของ a_{31} คือ $|C_{31}| = (-1)^{3+1}|M_{31}| = (-1)^4|M_{31}|$

$$= (+)\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}$$

ในทำนองเดียวกัน เราก็สามารถหา Cofactor ของ element ตัวอื่น ๆ ได้

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> (การหาค่าของ Determinant)

สมมติว่า Determinant A ที่กำหนดให้ คือ

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

และสมมติว่าในการหาค่า $|A|$ นี้เราใช้วิธี Laplace Expansion โดยเลือกเอา row ที่ 1 เป็นหลัก จะได้ดังนี้

$$|A| = a_{11}|C_{11}| + a_{12}|C_{12}| + a_{13}|C_{13}|$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}|M_{11}| + a_{12}(-1)^{1+2}|M_{12}| + a_{13}(-1)^{1+3}|M_{13}|$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23}$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}$$

หรือในกรณีที่เราเลือกเอา row ที่ 2 เป็นหลักจะได้ดังนี้

$$|A| = a_{21}|C_{21}| + a_{22}|C_{22}| + a_{23}|C_{23}|$$

$$= a_{21}(-1)^{2+1}|M_{21}| + a_{22}(-1)^{2+2}|M_{22}| + a_{23}(-1)^{2+3}|M_{23}|$$

$$= -a_{21}|M_{21}| + a_{22}|M_{22}| - a_{23}|M_{23}|$$

$$= -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})$$

$$= -a_{21}a_{12}a_{33} + a_{32}a_{13}a_{21} + a_{22}a_{11}a_{33} - a_{22}a_{31}a_{13} - a_{13}a_{11}a_{32} + a_{23}a_{31}a_{12}$$

จะเห็นได้ว่า ไม่ว่าเราจะเลือกเอา row ที่ 1 หรือ row ที่ 2 เป็นหลักก็จะได้ค่าของดีเทอร์-มิแนนท์ A เหมือนกัน ซึ่งโดยหลักแล้วเราจะเลือก row ใดหรือ column ใดเป็นหลักก็ได้ดังได้กล่าวไว้ในตอนต้นแล้ว

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> กำหนดให้ดีเทอร์มิแนนท์ คือ

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

จงหาค่าของ A

จากการพิจารณา A ที่กำหนดให้ จะเห็นได้ว่าเราควรเลือกเอา column ที่ 2 เป็นหลัก เพราะว่าเมื่อเปรียบเทียบกับ row ที่ 1 แล้ว column ที่ 2 จะคิดเลขได้ง่ายกว่า เพราะฉะนั้นจะได้ว่า

$$|A| = 0\,|C_{12}| + 3\,|C_{22}| + 1\,|C_{32}|$$

$$= 0(-1)^{1+2}\,|M_{12}| + 3(-1)^{2+2}\,|M_{22}| + 1(-1)^{3+2}\,|M_{32}|$$

$$= (-)\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 3(+)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \; 1(-)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(-10-2) + 3(-8-4) + (4-10)$$

$$= 12 - 36 - 6 = -30$$

ฉะนั้น เราจึงสรุปได้ว่า ถ้าดีเทอร์มิแนนท์ A มี Order=n เราสามารถหาค่าโดยวิธี Laplace Expansion ได้ดังนี้

ถ้ายึดเอา row ที่ 1 เป็นหลัก จะได้ว่า

$$|A| = \sum_{j=i}^{n} a_{ij}\,|C_{ij}|$$

ถ้ายึดเอา column ที่ j เป็นหลัก จะได้ว่า

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,|C_{ij}|$$