บทที่ 2

ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเมทริกซ์

INTRODUCTION TO MATRIX ALGEBRA

บทที่ 2
ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเมทริกซ์
(Introduction to Matrix Algebra)

ในปัจจุบันนี้เมทริกซ์เป็นคณิตศาสตร์ที่สำคัญประเภทหนึ่งที่นำมาใช้ประโยชน์มากในวิชาเศรษฐศาสตร์ ประโยชน์สำคัญที่เราได้จากเมทริกซ์ก็คือการใช้วิธีการของเมทริกซ์ในการแก้สมการเส้นตรง ซึ่งเราจะพบอยู่บ่อย ๆ ในการวิเคราะห์ปัญหาทางเศรษฐศาสตร์ เช่น การวิเคราะห์หาราคาและปริมาณดุลยภาพของตลาดสินค้า การวิเคราะห์หาผลกระทบของการเก็บภาษีประเภทต่าง ๆ และการวิเคราะห์เกี่ยวกับตารางอินพุท-เอ้าท์พุท (Input-Output Table) เป็นต้น

ประโยชน์ของเมทริกซ์ในการแก้สมการเส้นตรงก็คือ

1) เมทริกซ์ทำให้เราสามารถเขียนระบบสมการเส้นตรงได้อย่างกระทัดรัด (Compact Way of Writing) กล่าวคือ ในกรณีที่การวิเคราะห์ปัญหาทางเศรษฐศาสตร์จำเป็นต้องใช้ระบบสมการเส้นตรง (Linear Equation System) ซึ่งประกอบด้วยจำนวนสมการและจำนวนตัวแปรมากมาย เช่น มีสมการ n สมการ มีตัวแปร n ตัว เราจะเขียนสมการเหล่านี้ได้ก็ต้องเสียพื้นที่ในการเขียนมาก แต่ถ้าเราใช้วิธีการของเมทริกซ์ เราจะสามารถเขียนระบบสมการนั้นได้โดยใช้พื้นที่เพียงบรรทัดเดียว ดังจะเห็นได้จากตัวอย่างข้างล่างนี้

$$
\begin{aligned}
& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = d_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = d_2 \\
(2.1)\quad & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots\cdots + a_{3n}x_n = d_3 \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots\cdots + a_{nn}x_n = d_n
\end{aligned}
$$

จากสมการต่าง ๆ ใน (2.1) นี้ เราสามารถเขียนในรูปของเมทริกซ์ได้คือ

$$
(2.2) \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}
$$

ซึ่งจะเขียนให้กระทัดรัดได้คือ

$$
(2.3) \qquad AX = D
$$

โดยที่

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
$$

และ $D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$

ฉะนั้นเราจะเห็นได้ว่า การใช้วิธีการของเมทริกซ์เขียนแทนระบบสมการเส้นตรง จะทำให้เราเขียนได้อย่างกระทัดรัดมากดังใน (2.3)

2) เมทริกซ์จะสามารถทำให้เราทดสอบได้ว่า เราจะสามารถหาค่าของตัวแปร (Solution) ในระบบสมการเส้นตรงได้หรือไม่ โดยอาศัยการพิจารณาจากค่าของดีเทอร์มิแนนท์ ซึ่งเราจะได้พิจารณากันต่อไปในบทนี้

3) เมทริกซ์ช่วยให้เรามีวิธีการในการหาค่าของตัวแปรในระบบสมการเส้นตรงได้ง่ายขึ้น (ถ้าระบบสมการเส้นตรงที่กำหนดให้นั้น ๆ สามารถหาค่าของตัวแปรได้)

เมื่อเราทราบว่าเมทริกซ์เป็นสิ่งที่มีประโยชน์มากในการวิเคราะห์ปัญหาทางเศรษฐศาสตร์เช่นนี้ เราก็ควรที่จะให้ความสนใจศึกษาต่อไปถึงรายละเอียดเกี่ยวกับเรื่องราวต่าง ๆ ของเมทริกซ์ว่า มันคืออะไร มีคุณสมบัติอย่างไรและนำมาใช้ประโยชน์ได้อย่างไร ในตอนต่อไปนี้จะขอกล่าวถึงคำนิยามของเมทริกซ์และเวคเตอร์ก่อน

1 คำนิยามของเมทริกซ์และเวคเตอร์

(Definition of Matrices* and Vectors)

1.1 คำนิยามของเมทริกซ์ จากตัวอย่างใน(2.2) เราพอจะให้คำนิยามของเมทริกซ์ได้ว่า เมทริกซ์ คือ กลุ่มของเลขจำนวนจริง หรือกลุ่มของตัวพารามิเตอร์ (Parameters) หรือกลุ่มของตัวแปร (Variables) ที่ถูกจัดอยู่ในรูปของสี่เหลี่ยมมุมฉากแล้วกั้นด้านหน้าและด้านหลังด้วยวงเล็บใหญ่ หรือในบางกรณีก็ใช้วงเล็บปีกกา วงเล็บเล็กหรือเส้นคู่ขนานแทนวงเล็บใหญ่ดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} ; \quad A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Bmatrix}$$

* Matrices เป็นคำพหูพจน์, Matrix เป็นคำเอกพจน์

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \text{"}22 & a_{23} \\ \text{"}31 & a_{32} & \$3 \end{pmatrix} ; \quad A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$$

เมทริกซ์ทั้ง 4 ชุดข้างต้นนี้มีความหมายเหมือนกัน คือหมายถึงเมทริกซ์ A

เราอาจเขียน Matrix ให้อยู่ในรูปที่กระทัดรัดได้คือ

(2.4) $$A = \left[a_{ij} \right] \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3, \ldots, m \\ j = 1, 2, 3, \ldots, n \end{pmatrix}$$

ซึ่งหมายความว่า Matrix A นี้มีแถวนอน (row) จำนวน m แถว และมีแถวตั้ง (column) จำนวน n แถว

เราสามารถทราบได้ว่า เมทริกซ์ชุดหนึ่ง ๆ มีกี่ row และกี่ column ได้โดยดูจาก Dimension of Matrix ฉะนั้น Dimension of Matrix คือสัญลักษณ์ (Symbol) ที่บอกให้ทราบว่า Matrix มีกี่ row และมีกี่ Column เช่น ถ้าเมทริกซ์ A มี Dimension 3×2(อ่านว่า ไดเมนชั่นสามคูณสองหรือ Dimension three by two) เราเขียนเป็นสัญลักษณ์โดยเอา 3×2 เขียนไว้ในวงเล็บเป็น subscript ของ A เช่น $A_{(3 \times 2)}$แสดงว่าเมทริกซ์ A ประกอบด้วย 3 row และ 2 column

จาก (2.4) เราจะบอกได้ว่าเมทริกซ์ A มี Dimension เท่ากับ $(m \times n)$และ a_{ij} เราเรียกว่า Element of Matrix ซึ่งคือ องค์ประกอบของเมทริกซ์นั่นเอง Element of Matrix นี้อาจเป็นเลขจำนวนจริงหรือตัวพารามิเตอร์ หรือตัวแปรก็ได้ แล้วแต่จะกำหนดขึ้นให้เหมาะสมกับกรณีอย่างเช่นใน (2.2) เป็นต้น

เมทริกซ์ที่มีจำนวน row และ column เท่ากันเราเรียกว่า Square Matrix เช่น

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \; ; \quad B \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

1.2 <u>คำนิยามของเวคเตอร์</u> เราอาจให้คำนิยามได้ว่า เวคเตอร์ (Vector) คือเมทริกซ์ที่มี row เดียว หรือ column เดียว เมทริกซ์ที่มี row เดียวเราเรียกว่า <u>Row Vactor</u> ส่วนเมทริกซ์ที่มี column เดียวเราเรียกว่า <u>Column Vector</u> การเขียนสัญญลักษณ์ของ row vector เช่น

$$U = [u_1 \; , \; u_2 \; , \; u_3 \; , \ldots , \; u_n]$$

หมายความว่า Vector U เป็น row vector และมี dimension เท่ากับ n คือมี element จำนวน n ตัว

ส่วน Column Vector เช่น

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \\ v_n \end{bmatrix}$$

หมายความว่า Column vector v ประกอบด้วย n element และมี dimension เท่ากับ n การเขียน Column vector นี้ในบางกรณีจะเขียนอยู่ในแนวนอน เช่น

$$V' = [v_1 \; , \; v_2 \; , \; v_3 \; , \ldots , \; v_n]$$

โดยใช้เครื่องหมาย ' (prime) เขียนไว้เหนือตัว v

ข้อสังเกต การบอก dimension ของ vector เราใช้เลขตัวเดียวก็พอแล้ว เช่น U_n หมายถึง row vector U ที่มี dimension เท่ากับ n คือมี element n ตัว เป็นต้น

ส่วน Column vector ก็เป็นไปในทำนองเดียวกัน

2 พีชคณิตของเมทริกซ์ (The Algebra of Matrices)

พีชคณิตของเมทริกซ์คือ เงื่อนไขหรือวิธีการต่าง ๆ ของเมทริกซ์ที่เกี่ยวกับการเท่ากันของเมทริกซ์ (Equality of Matrices) การ บวก การลบและการคูณเมทริกซ์(สำหรับการหารเราไม่ใช้ในกรณีของเมทริกซ์ แต่เราจะใช้ Inverse of Matrix แทน ซึ่งเราจะได้กล่าวถึงต่อไปในเรื่องของ (Inverse Matrix) ฉะนั้นในตอนนี้จะขอกล่าวถึงการเท่ากัน การบวก การลบ และการคูณเมทริกซ์ก่อน

2.1 การเท่ากันของเมทริกซ์ (Equality of Matrices)

เมทริกซ์ 2 ชุด เช่น $A = [a_{ij}]$ และ $B = [b_{ij}]$ จะเท่ากันก็ต่อเมื่อเมทริกซ์ทั้ง 2 ชุดนั้นมี dimension เท่ากัน(คือมีจำนวน row และจำนวน column เท่ากัน) และ element of matrix ของเมทริกซ์แต่ละชุดที่อยู่ ณ ตำแหน่ง row และ column เดียวกันต้องเหมือนกัน หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งได้ว่า $A = B$ ต่อเมื่อ $[a_{ij}] = [b_{ij}]$ ทุก ๆ ค่าของ i และ j ดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} b & a \\ d & q \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & \\ 2 & \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \neq$$

435 0_9 1 4

และในกรณีที่เราเขียนว่า

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

จะหมายความว่า $x = 4$, $y = 5$,และ $z = 6$

2.2 <u>การบวกและการลบเมทริกซ์</u> (Addition and Subtraction of Matriees)

ในตอนแรกจะขอกล่าวถึงการบวกเมทริกซ์ก่อน เพราะว่าการบวกและการลบเมทริกซ์นั้นมีเงื่อนไขและวิธีการเหมือนกัน ต่างกันที่เครื่องหมายเท่านั้น เมื่อเราเข้าใจวิธีการบวกเมทริกซ์แล้วเราก็สามารถเข้าใจการลบเมทริกซ์ได้โดยปริยาย

<u>การบวกเมทริกซ์</u> การบวกเมทริกซ์มีเงื่อนไขคือ เมทริกซ์ 2 ชุดที่จะนำมาบวกกันนั้นจะต้องมี dimension เท่ากัน สำหรับวิธีการบวกทำได้โดยเอา element of matrix ที่อยู่ ณ ตำแหน่งเดียวกัน(ของเมทริกซ์แต่ละชุด)มาบวกเข้าด้วยกัน

<u>ตัวอย่างที่ 1</u>

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 3+2 \\ 4+3 & 5+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u>

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{bmatrix}.$$

ฉะนั้นในรูปทั่วไป (general form)เราสามารถเขียนได้ว่า

$$\left[a_{ij}\right] + \left[b_{ij}\right] = \left[c_{ij}\right] \qquad \text{โดยที่ } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

ซึ่ง dimension ของ c_{ij} จะเท่ากันกับ dimension ของ a_{ij} และ b_{ij}

<u>การลบเมทริกซ์</u> มีเงื่อนไขและวิธีการเหมือนกันกับการบวกเมทริกซ์ แต่ต่างกันที่เครื่องหมายเท่านั้น เราอาจเขียน general form ได้คือ

$[a_{ij}] - [b_{ij}] = [c_{ij}]$ โดยที่ $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u>

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-0 & 7-5 \\ 4-5 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u>

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \\ a_{31} - b_{31} & a_{31} - b_{32} \end{bmatrix}$$

2.3 <u>การคูณเมทริกซ์</u>

การคูณเมทริกซ์แบ่งออกเป็น 2 กรณีด้วยกัน คือ การคูณเมทริกซ์ด้วยเลขจำนวนจริง (scalar)และการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

<u>การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลล่าร์</u> (Scalar Multiplication) ทำได้โดยนำเอาตัวเลข (scalar)ที่กำหนดให้คูณเข้าไปในทุก ๆ element of matrix ที่กำหนดให้

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> กำหนดให้ Matrix A คือ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$ และ Scalar ที่กำหนดให้คือ k

เมื่อเรานำเอา scalar k คูณเข้ากับ Matrix A จะได้ดังนี้

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{bmatrix}$$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u>

เมทริกซ์ที่กำหนดให้คือ $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

Scalar ที่กำหนดให้คือ k

เราจะได้ว่า

$$kB = \begin{bmatrix} kb_{11} & kb_{12} \\ kb_{21} & kb_{22} \end{bmatrix}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u>

$$3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(3) & (2)(3) \\ (3)(3) & (4)(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

<u>การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์</u> (Multiplication of Matrices)

เมทริกซ์ 2 ชุดจะคูณกันได้ก็ต่อเมื่อจำนวน column ของเมทริกซ์นำ (Lead Matrix) เท่ากับจำนวน row ของเมทริกซ์ตาม (Lag Matrix) เช่น เมทริกซ์ A มี dimension เท่ากับ $m \times n$ และ เมทริกซ์ B มี dimension เท่ากับ $p \times q$ เมทริกซ์ผลคูณ AB จะเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อ $n = p$ คือ จำนวน column ของเมทริกซ์ A จะต้องเท่ากันกับจำนวน row ของเมทริกซ์ B ทั้งนี้ก็เพราะว่า A เป็นเมทริกซ์นำ(เพราะว่าอยู่หน้า B) และ B เป็นเมทริกซ์ตาม(เพราะว่าอยู่หลัง A)

แต่ในกรณีที่เราต้องการหาผลคูณ BA เราจะหาได้ก็ต่อเมื่อ $q = m$ เพราะในที่นี้ B เป็นเมทริกซ์นำและ A เป็นเมทริกซ์ตาม

<u>ตัวอย่าง</u>

$$\underset{(1\times 2)}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}, \quad \underset{(2\times 3)}{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

ในกรณีนี้เราจะหาผลคูณ AB ได้ แต่จะหาผลคูณ BA ไม่ได้ (เหตุที่หาไม่ได้เพราะจำนวน column ของ B ซึ่งเป็นเมทริกซ์นำไม่เท่ากันกับจำนวน row ของ A ซึ่งเป็นเมทริกซ์ตาม)

สำหรับวิธีการคูณ อาจอธิบายได้โดยใช้ตัวอย่างประกอบดังนี้

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$

เราสามารถหาผลคูณ AB ได้คือ

$$AB = C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{bmatrix}$$

โดยที่ C เป็นเมทริกซ์ผลคูณของ AB และ c_{11}, c_{12}, c_{13} เป็น element ของเมทริกซ์ C ซึ่งหาได้โดย

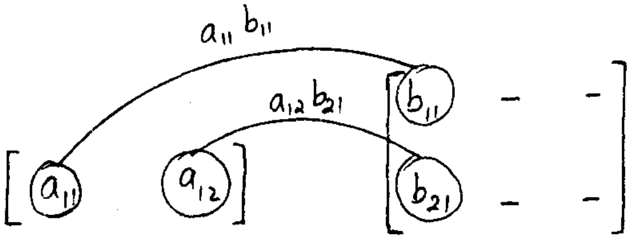
$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$ (จาก row ที่ 1 ของ A, column ที่ 1 ของ B)

$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$ (จาก row ที่ 1 ของ A, column ที่ 2 ของ B)

$c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23}$ (จาก row ที่ 1 ของ A, column ที่ 3 ของ B)

ซึ่งเราจะสังเกตได้ว่า c_{ij} เกิดจากผลบวกของผลคูณ (a sum of product) ของ element ของเมทริกซ์นำ row ไหนกับของเมทริกซ์ตาม column ไหน

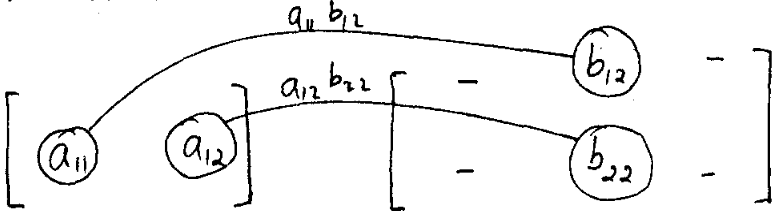
การหาค่าของ c_{11}, c_{12}, และ c_{13} อาจแสดงได้ดังในรูปที่ 2.1, รูปที่ 2.2 และรูปที่ 2.3 ตามลำดับต่อไปนี้



<u>รูปที่ 2.1</u>

การหา c_{11}

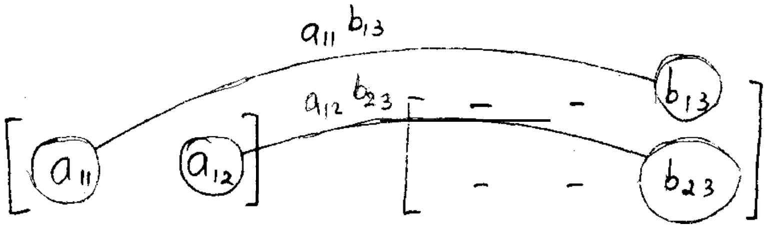
เราจะได้ว่า $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$



<u>รูปที่ 2.2</u>

การหา c_{12}

เราจะได้ว่า $c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$



<u>รูปที่ 2.3</u>

การหา c_{13}

เราจะได้ว่า $c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23}$

ตัวอย่างที่ 1

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}) & (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}) \\ (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & (a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}) \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+0+8) & (5+14+16) \\ (5+0+18) & (25+49+36) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 35 \\ 23 & 110 \end{bmatrix}$$

ข้อสังเกต จำนวน dimension ของเมทริกซ์ผลคูณจะเท่ากับจำนวนของ row ของเมทริกซ์นำคูณด้วยจำนวน column ของเมทริกซ์ตาม เช่น $A_{(2\times3)}\ B_{(3\times4)} = C_{(2\times4)}$ โดยที่ c คือเมทริกซ์ผลคูณ

3 กฎเกี่ยวกับการสลับที่ การจับคู่ และการกระจาย

(Commutative , Associative , and Distributive Laws)

ในกรณีพีชคณิตของตัวเลข (The algebra of numbers) เราพบว่า การบวก การลบ และการคูณเป็นไปตามกฎของการสลับที่ (Commutative Law) กฎการจับคู่ (Associative Law) และกฎของการกระจาย (Distributive Law) ซึ่งแสดงให้เห็นได้ดังต่อไปนี้

กฎการสลับที่กันของการบวก (Commutative Law of Addition)

คือ $a + b = b + a$

กฎการสลับที่กันของการคูณ (Commutative Law of Multiplication)

คือ $ab = ba$

กฎการจับคู่กันของการบวก (Associative Law of Addition)

คือ $(a + b) + c = a + (b + c)$

กฎการจับคู่กันของการคูณ (Associative Law of Multiplication)

คือ $(ab)c = a(bc)$

กฎการกระจาย (Distributive Law) คือ

$$a(b + c) = ab+ac$$

แต่ในกรณีของพีชคณิตของเมทริกซ์ (The Algebra of Matrices) กฎต่าง ๆ ข้างต้นนี้ไม่เป็นจริงเสมอไป(โดยเฉพาะอย่างยิ่งกฎการสลับที่กันของการคูณ) ซึ่งเราจะพิจารณากันดังต่อไปนี้

การบวก (หรือลบ) เมทริกซ์ จะเป็นไปตามกฎของการสลับที่กันและกฎของการจับคู่กัน ดังต่อไปนี้

Commutative Law : $A + B = B + A$

ตัวอย่าง กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

เราจะพบว่า $A + B = B + A = \begin{bmatrix} 6 & 11 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$

Associative Law : $(A + B) + C = A + (B + C)$

ตัวอย่าง กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

เราจะได้ว่า $(A + B) + C = \begin{bmatrix} 6 & 11 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 13 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$

และได้ว่า $A + (B + C) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 13 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า $(A + B) + C = A + (B + C)$

การคูณเมทริกซ์ จะไม่เป็นไปตามกฎของการสลับที่กันของการคูณ กล่าวคือ

$AB \neq BA$ (ยกเว้นบางกรณีของ Square Matrix)

ตัวอย่าง กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

เราได้ว่า $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 31 & 14 \end{bmatrix}$

แต่ $BA = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 14 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$

จะเห็นได้ว่า $AB \neq BA$

แต่การคูณเมทริกซ์ด้วย scalar จะเป็นไปตามกฎของการสลับที่กัน นั่นคือ $kA = Ak$ ถึงแม้ว่าโดยกรณีทั่ว ๆ ไปการคูณเมทริกซ์จะไม่เป็นไปตามกฎของการสลับที่กัน แต่การคูณเมทริกซ์ก็ยังเป็นไปตามกฎของการจับคู่กัน กล่าวคือ

Associative Law : (AB) C = A (BC)

ตัวอย่าง กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

เราจะได้ว่า $x'Ax = x'(Ax) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} x_1 \\ a_{22} x_2 \end{bmatrix} = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2$

และ $(x'A) x = \begin{bmatrix} a_{11} x_1 & a_{22} x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า $x' (Ax) = (x'A) X$

การคูณของเมทริกซ์นอกจากจะเป็นไปตามกฎของการจับคู่กันแล้ว ยังเป็นไปตามกฎของการกระจายอีกด้วย กล่าวคือ

Distributive Law : A (B + C) = AB + AC [Premultiplication by A]

(B + C)A = BA + CA [Postmultiplication by A]

4 ไอเดนติตี้เมทริกซ์และนัลเมทริกซ์

(Identity Matrices and Null Matrices)

4.1 ไอเดนติตี้เมทริกซ์ (Identity Matrices) คือ Square Matrix ที่มี Element of Matrix ทุกตัวในแนว Diagonal เป็นเลขหนึ่ง และ Element ที่เหลือเป็นเลขศูนย์ (Zero) สัญลักษณ์ที่ใช้สำหรับ Identity Matrices คือ I_n โดยที่ n นั้นบอกให้เราทราบว่า Identity Matrix นั้นมี Dimension เท่ากับเท่าไร ดังตัวอย่างต่อ

ไปนี้

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก Identity Matrix เป็นลักษณะของ Square Matrix ฉะนั้นจึงสามารถขยาย Dimension ของมันออกไปได้ตามที่เราต้องการ ดังนั้นโดยทั่วไปเราจะใช้สัญลักษณ์ว่า I ก็ได้

<u>คุณสมบัติที่สำคัญของ Identity Matrix</u> ประการหนึ่งก็คือ เมื่อนำไปคูณกับ Matrix ใด ๆ ก็ตามจะไม่ทำให้ Matrix นั้น ๆ เปลี่ยนแปลง คือมันทำหน้าที่คล้าย ๆ กับเลขหนึ่งในเลขคณิตนั่นเอง* กล่าวคือ

$$IA = AI = A$$

<u>ตัวอย่าง</u> สมมติว่า

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

เราจะได้ว่า

$$IA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix} = A$$

และ

$$AI = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix} = A$$

คุณสมบัติประการที่ 2 ของ Identity Matrix คือ ถ้า Identity Matrix อยู่ระหว่างกลางของเมทริกซ์ 2 ชุดที่คูณกันจะไม่ทำให้ผลคูณของเมทริกซ์เปลี่ยนแปลง กล่าวคือ

---

* ในเลขคณิตหรือในพีชคณิตของเลข เราจะได้ว่า 1 (a) = a (1) = a หรือ (a) (1) (b) = (a)(b) คือมันจะไม่ทำให้เทอมที่ถูกคูณด้วยเลขหนึ่งเปลี่ยนแปลง

$$\underset{(m\times n)}{A}\ \underset{(n\times n)}{I}\ \underset{(n\times p)}{B} = (AI)B = \underset{(m\times n)}{A}\ \underset{(n\times p)}{B}$$

คุณสมบัติประการที่ 3 ของ Identity Matrix คือ เมื่อนำเอา Identity Matrix คูณเข้ากับตัวของมันเองจะกี่ครั้งก็ตามจะไม่ทำให้ Identity Matrix เปลี่ยนแปลง นั่นคือ

$$(I_n)^2 = I_n \ ; \ (I_n)^3 = I_n$$

หรือ $(I_n)^k = I_n \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$

ฉะนั้น Identity Matrix จึงเป็น Idempotent Matrix ด้วย เพราะว่า <u>Idempotent Matrix</u> คือ เมทริกซ์ใด ๆ ที่เมื่อคูณกับตัวของมันเองกี่ครั้งก็ตามจะไม่ทำให้ตัวมันเองเปลี่ยนแปลง นั่นคือ $AA = A$

2.4.2 <u>นัลเมทริกซ์</u> (Null Matrices or Zero Matrices)

นัลเมทริกซ์ คือ เมทริกซ์ใด ๆ ก็ตามที่มีอีลิเมนต์ทุกตัวเป็นเลขศูนย์ ฉะนั้น นัลเมทริกซ์จะเป็น Square Matrix หรือไม่ก็ได้ สัญลักษณ์ที่ใช้สำหรับนัลเมทริกซ์ก็คือเลขศูนย์นั่นเอง

<u>ตัวอย่าง</u>

$$\underset{(2\times 2)}{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \underset{(3\times 2)}{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>คุณสมบัติของนัลเมทริกซ์</u> เหมือนกับคุณสมบัติของเลขศูนย์ในวิชาเลขคณิต กล่าวคือ (1) เมื่อนำเอานัลเมทริกซ์ไปบวกเข้าหรือลบออกจากเมทริกซ์ใด ๆ จะไม่ทำให้เมทริกซ์นั้น ๆ เปลี่ยนแปลง นั่นคือ

$$\underset{(m\times n)}{A} + \underset{(m\times n)}{0} = \underset{(m\times n)}{0} + \underset{(m\times n)}{A} = \underset{(m\times n)}{A}$$