บทที่ 5
ทฤษฎี
(Theories)

ในบทนี้ เราจะกล่าวถึงแนวความคิดเกี่ยวกับทฤษฎี (theory) โดยเราจะอธิบายว่า formal system จะนำมาใช้ในการอธิบายถึงทฤษฎีได้อย่างไร และจะยกตัวอย่างเกี่ยวกับการแสดงทฤษฎีโดยใช้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์

5.1 Theory presentations

โดยปกติเราจะนึกถึงทฤษฎี (theory) ในลักษณะที่เป็นชุดของประโยคที่เราสร้างขึ้นมาสำหรับปรากฏการณ์ (phenomenon) อย่างใดอย่างหนึ่ง โดยที่เหตุผลพื้นฐานสามารถแสดงได้ในรูปของ axion และกฎที่อยู่ใน deductive apparatus แต่จะต้องจำไว้อย่างหนึ่งว่าไม่จำเป็นที่ทุกๆ ทฤษฎีจะต้องเป็นแบบแผน (formal) นั่นคือเราไม่ได้ระบุว่า ทฤษฎีคือแบบแผนจะเป็นเพียงบางกรณีเท่านั้นที่ทฤษฎีจะเป็นไปได้ในการเป็นแบบแผนและนำไปใช้ประโยชน์ถ้าเราต้องการจะแสดงทฤษฎีในลักษณะของ formal system แล้วล่ะก็ เราจะได้ว่า ทฤษฎีก็จะเป็น closure ของบทพิสูจน์ (theorem) ทั้งหมดของระบบ

บทพิสูจน์ใจตัวทฤษฎี จะแบ่งออกเป็น 2 ประเภทคือ

- บทพิสูจน์ที่เป็นจริงเฉพาะกับรายละเอียดพิเศษที่เกี่ยวกับปรากฏการณ์นั้น เช่น $E = MC^2$ ซึ่งเป็นทฤษฎีเกี่ยวกับความสัมพันธ์
- บทพิสูจน์ที่เป็น tautology อันเนื่องมาจากแง่ของปัญหาที่เรากำลังพิจารณา เช่นประโยค "ไฮโดรเจน เป็นก๊าซเฉื่อย" เป็น proposition

ดังนั้นประโยค "ไฮโดรเจนเป็นก๊าซเฉื่อย หรือไม่ ไฮโดรเจนไม่เป็นก๊าซเฉื่อย" เป็น tautology (โดยเหตุผลของ law of excluded middle) ซึ่งประโยคเช่นนี้ถือว่าเป็นจริงได้เลยโดย ไม่ต้องพิจารณาประโยคย่อยที่ประกอบกันขึ้นมา และประโยคนี้ก็ยังคงมีค่าเป็นจริงเสมอ สำหรับทุกทฤษฎีที่ใช้แนวความคิดเกี่ยวกับ proposition ด้วยเหตุผลนี้เองจึงได้มีการแบ่งการแสดงทฤษฎีออกเป็น 2 ส่วนคือ

CT 488 55

คือ

1. axiom และ inference rule สำหรับทฤษฎีเฉพาะ
2. logical calculus ที่ใช้หนุนทฤษฎี เช่น predicate calculus with equality

ในการเลือกใส่ logic เข้าไปในทฤษฎีเป็นเรื่องสำคัญ เนื่องจากทฤษฎีนั้นมีส่วนของคุณสมบัติที่เกี่ยวกับ logic เป็นส่วนประกอบอยู่แล้ว จะเห็นได้ว่าในด้าน software engineering นั้นบางครั้งการใช้ predicate logic with equality จึงยังไม่ใช่วิธีที่ดี ตัวอย่างเช่น ในระบบแจกแจง (distributed system) ซึ่งต้องการให้เงื่อนไขบางอย่างเป็นได้ทั้งจริง และเท็จ (ในต่างวาระ และต่างโอกาส) แต่ logic ชนิดอื่นๆ ก็ยังคงมีปัญหาในการนำมาใช้แสดงทฤษฎี ดังนั้นเราจึงยังคงใช้ predicate logic with equality ในการแสดงทฤษฎี และเมื่อเราได้รากฐานนี้แล้วเราก็จะสามารถเพิ่มแนวคิดในเรื่อง Well-founded knowledge ได้ด้วย

เมื่อเราได้ตกลงใจที่จะใช้ logic เป็นพื้นฐานในการแสดงทฤษฎีแล้ว เราก็ต้องมาจำกัด formal language ของเราเพื่อให้มีแต่ คำ (term) และ predicate name ที่ซึ่งจะมีความหมายในตัวทฤษฎีของเราเท่านั้น

ตัวอย่างในการสร้างทฤษฎีเกี่ยวกับครอบครัว SMITH ซึ่งมีรายละเอียดของครอบครัวดังนี้

"ครอบครัว SMITH มีผู้ชาย 3 ชื่อคือ JOHN,BILL และ HARRY

HARRY เป็นพ่อของ JOHN และ JOHN เป็นพ่อของ BILL"

เริ่มแรกเราต้องมีการสร้างภาษาที่จะใช้ ซึ่งมีลักษณะดังนี้

PERSON = "HARRY" | "BILL" | "JOHN" |
"FATHER (", PERSON , ")"|
"GRANDFATHER (", PERSON, ")";

จากนั้นเราจะเพิ่ม axion ที่จะใช้ในทฤษฎีของเรานี้ เข้าไปใน inference system ของ predicate calculus ในรายละเอียดต่อไปนี้

<u>AXIOM 1</u> FATHER(JOHN) = HARRY

<u>AXIOM 2</u> FATHER(BILL) = JOHN

<u>AXIOM 3</u> $\forall$ X•FATHER(FATHER(X)) = GRANDFATHER(X)

จากนี้เราก็จะสามารถพิสูจน์เกี่ยวกับ บทพิสูจน์ต่อไปนี้ได้

<u>THEOREM 5.1</u> แสดงว่า

$\vdash$ HARRY = GRANDFATHER(BILL)

PROOF

1. FATHER(JOHN) = HARRY	axiom
2. FATHER(BILL) = JOHM	axiom
3. FATHER(FATHER(BILL)) = HARRY	1,2, substitution
4. $\forall$ X•FATHER(FATHER(X)) = GRANDFATHER(X)	axiom
5. FATHER(FATHER(BILL)) = GRANDFATHER(BILL)	4, $\forall$ - elimination
6. HARRY = GRANDFATHER(BILL)	3,5, substitution

QED

ทฤษฎีข้างต้นนี้ เป็นทฤษฎีที่มีประสิทธิภาพมากทั้งนี้เพราะเราสามารถใช้ทฤษฎีนี้กับบรรพบุรุษชายคนอื่นๆ ของ JOHN, BILL และ HARRY ได้(คือไม่ได้ใช้เฉพาะกับทั้ง 3 คนนี้เท่านั้น) และเนื่องจากทฤษฎีดังกล่าวนี้ แสดงไว้ในรูปของ formal system ดังนั้นทฤษฎีนี้จึงสามารถกำหนดความหมายได้มากกว่า 1 รูปแบบ

การกำหนดความหมายของทฤษฎี โดยที่ axiom ทุกตัวของทฤษฎีนั้นมีค่าเป็นจริงหมดเรียกว่า **model of the theory** ซึ่งเป็นการกำหนดความหมายรูปแบบที่เราสนใจ เมื่อมีการสร้างทฤษฎีขึ้นมาใช้ต้องมีการกำหนดรูปแบบของ model ให้ด้วยอย่างน้อย 1 รูปแบบ ในการสร้างทฤษฎีนั้นอาจเกิดปัญหาในเรื่อง incompleteness ซึ่งเราสามารถทำให้ทฤษฎีนั้นสมบูรณ์ (enrich) ขึ้นได้โดยการเพิ่ม axiom เข้าไปเพื่ออุดช่องว่างที่ทำให้เกิดความไม่สมบูรณ์ แต่วิธีนี้ต้องมีความระมัดระวังด้วยเพราะอาจทำให้เกิดปัญหาเรื่อง inconsistency ได้เช่นกัน

ตัวอย่างของการเพิ่มความสมบูรณ์ (enrichment) ให้กับทฤษฎี โดยใช้ตัวอย่างจากทฤษฎีของครอบครัว SMITH เราจะเพิ่ม axiom ใหม่เข้าไปโดย axiom ใหม่นี้จะระบุว่า พ่อคือคนที่มีอายุมากกว่าลูก นั่นคือเราจะสนใจเรื่อง "แก่กว่า" ซึ่งจะใช้สัญลักษณ์ ">" แทน ดังนั้น

HENRY > BILL แสดงถึงเหตุผลที่ว่า HENRY แก่กว่า BILL

CT 488

57

AXIOM 4 $\forall X \bullet FATHER(X) > X$

ในการใช้ axiom นี้จะต้องมีสิ่งเพิ่มเติมเสียก่อน นั่นคือ

AXIOM 5 $\forall X \forall Y \forall Z \bullet (X>Y) \wedge (Y>Z) \Rightarrow (X>Z)$

ซึ่งสามารถเขียนอีกรูปหนึ่งได้เป็น

$\forall X,Y,Z \bullet (X>Y) \wedge (Y>Z) \Rightarrow (X>Z)$

ผลจากการเพิ่ม axiom ดังกล่าว ทำให้เราพิสูจน์ผลที่เราต้องการได้มากขึ้นจากทฤษฎีข้างต้น เช่น

$\vdash \forall X \bullet GRANDFATHER(X)>X$

โดยการพิสูจน์จะเป็นแบบ informal proof นั่นคือเราจะไม่ใช้การทำ derivation อย่างเคย แต่จะเป็นการใช้ประโยคที่เหมาะสมกับการพิสูจน์ แล้วอธิบายด้วยภาษาอังกฤษ เพื่อเป็นแนวทางให้เราทำการพิสูจน์แบบ formal proof ได้ภายหลังนั่นเอง โดยการพิสูจน์ดังกล่าวจะมีการใช้ตัวย่อ f และ g แทนคำว่า FATHER และ GRANDFATHER ตามลำดับ เราเริ่มการพิสูจน์จาก axiom

$\forall X \bullet f(X)>X$

จากนั้นก็เปลี่ยนให้อยู่ในเทอมของ a และ f(a) จะได้

$f(a) > a$ และ $f(f(a)) > f(a)$

ต่อมาก็ใช้ axiom 5

$(X>Y) \wedge (Y>Z) \Rightarrow (X>Z)$

ซึ่งให้

$f(f(a)) > a$

และเนื่องจากเราทราบว่า $f(f(a)) = g(a)$ โดย axiom 3 ดังนั้น

$g(a) > a$

นี่คือตัวอย่างของ informal proof ซึ่งดูแล้วจะสั้นและง่ายกว่า formal proof

5.2 Uses of theories

ในด้าน computer science นั้นการแสดง formal theory จะมีวิธีการหลักอยู่ 2 วิธี คือ

1. การสร้างแบบจำลองของจริง (modeling the real world)
2. การกำหนดวัตถุจำลอง (specifying artifacts)

ข้อแตกต่างระหว่างวิธีทั้งสองนั้นยากที่จะกล่าว และไม่มีผลต่อกลไกของปัญหาแต่ในส่วนนี้เราจะพูดถึงการ modeling

Theory of boxes

ในตอนนี้ เราจะพิจารณา formal theory โดยใช้ predicate calculus ในส่วนของ equality เป็นพื้นด้าน logic รายละเอียดของระบบนี้ก็คือ โลกที่เราสนใจ มีกล่องอยู่ 3 ใบ ชื่อว่า กล่อง a , กล่อง b ,กล่อง c และมีโต๊ะอยู่ 1 ตัว ชื่อว่า โต๊ะ t กล่องแต่ละใบอาจจะตั้งอยู่โดดๆ บนโต๊ะ หรือ อาจจะวางซ้อนอยู่บนกล่องใบอื่น คุณสมบัติทั่วๆ ไปของโลกนี้ ซึ่งอธิบายโดยใช้ predicates 2 ตัว คือ ABOVE(X,Y) และ ON(X,Y) ซึ่งแสดงถึง X อยู่เหนือ หรือ อยู่บน Y ตามลำดับ โดย ABOVE มีคุณสมบัติดังนี้

<u>AXIOM 1</u> $\forall$ X,Y,Z•(ABOVE(X,Y) $\wedge$ ABOVE(Y,Z) $\Rightarrow$ ABOVE(X,Z)

ต่อมาเราสรุปว่า ถ้ากล่องวางอยู่บนสิ่งใด หมายถึง กล่องอยู่เหนือสิ่งนั้น

<u>AXIOM 2</u> $\forall$ X,Y•ON(X,Y) $\Rightarrow$ ABOVE(X,Y)

เราจะมาจัดวางกล่องในรูปแบบเฉพาะดังนี้ กล่อง a และ c อยู่บนโต๊ะ ส่วนกล่อง b อยู่บน a

<u>AXIOM 3</u> ON(a,t)

<u>AXIOM 4</u> ON(c,t)

<u>AXIOM 5</u> ON(b,a)

นี่คือการกำหนด formal theory เกี่ยวกับ box ซึ่งในตอนนี้เราสามารถใช้ทฤษฎีนี้ในการให้เหตุผลเกี่ยวกับสถานการณ์รูปแบบต่างๆ ที่จัดไว้อย่างมีแบบแผน ซึ่งการนำ formality แบบนี้มาใช้เป็น ขั้นตอนแรกในเรื่องที่เกี่ยวกับ reasoning process และการแสดง formal theory ในรูปแบบเช่นนี้เป็นเรื่องน่าสนใจในด้าน AI ด้วย

ตัวอย่าง A theory of a dastardly deed

ทฤษฎีนี้ถูกสร้างขึ้นมาเพื่อโลกที่มีปัญหาด้านอาชญากรรม โดยสถานการณ์เป็นดังนี้

TOM และ HARRY คือผู้ถือกุญแจ

มีคนขโมยเงินไปโดยการเปิดประตู

วิธีเดียวที่จะเปิดประตูได้คือ โดกุญแจ

เราเริ่มทฤษฎีนี้ โดยการกำหนดส่วนประกอบทางด้านภาษา พร้อมทั้งการกำหนดความหมาย ดังนี้

S(X)	แสดงถึงX ขโมยเงิน
D(X)	แสดงถึงX เปิดประตู
K(X)	แสดงถึงX มีกุญแจ
t	แสดงถึงTOM
h	แสดงถึงHARRY

จากนั้นเราจะจับสถานการณ์ที่เกิดขึ้นในรูปที่เป็นแบบแผน ในลักษณะของการกำหนด axiom ดังนี้

AXIOM 1 $\forall X \bullet D(X) \Rightarrow K(X)$

AXIOM 2 $\exists X \bullet S(X) \wedge D(X)$

AXIOM 3 $\forall X \bullet (K(X) \Rightarrow (X=t) \wedge (X=h))$

ตอนนี้ เราก็จะอยู่ในจุดที่เราสามารถพิสูจน์ได้แล้วว่า ไม่ ก็ เป็นคนขโมยเงิน โดยการพิสูจน์จะเป็นดังนี้

THEOREM 5.2 แสดงว่า

$\vdash S(t) \vee S(h)$

PROOF.

1	$\exists X \bullet S(X) \wedge D(X)$	axiom 2
2	$S(a) \wedge D(a)$	assumption
3	$S(a)$	2, $\wedge$ - elimination
4	$D(a)$	2, $\wedge$ - elimination

5	$\forall X \bullet D(X) \Rightarrow K(X)$	axiom 1
6	$D(a) \Rightarrow K(a)$	5, $\forall$ - elimination
7	$K(a)$	4,6, $\Rightarrow$ - elimination
8	$\forall X \bullet (K(X) \Rightarrow (X=t) \wedge (X=h))$	axiom 3
9	$K(a) \Rightarrow (a=t) \wedge (a=h)$	8, $\forall$ - elimination
10	$(X=t) \vee (X=h)$	7,9, $\Rightarrow$ - elimination
11	$a=t$	assumption
12	$S(t)$	3,11, substitution
13	$S(t) \vee S(h)$	12, $\vee$ - introduction
14	$a=h$	assumption
15	$S(h)$	3,14, substitution
16	$S(t) \vee S(h)$	15, $\vee$ - introduction
17	$S(t) \vee S(h)$	10-16, $\vee$ - elimination
18	$S(a) \wedge D(a) \Rightarrow S(t) \vee S(h)$	2-17, $\Rightarrow$ - introduction
19	$\forall X \bullet S(X) \wedge D(X) \Rightarrow S(t) \vee S(h)$	18,- introduction
20	$S(t) \vee S(h)$	1-20, $\exists$ - elimination

QED

5.3 กรณีศึกษา (case study)

<u>ตัวอย่าง</u> **Logic-based financial advisor**

นี่เป็นตัวอย่างของการประยุกต์ใช้ predicate calculus ในการ represent และ seasom เกี่ยวกับ problem domains โดยเน้นการใช้ predicate calculus ในการออกแบบ

Financial advisor:

หน้าที่การทำงานของ financial advisor ก็คือ ช่วยผู้ใช้ (user) ในการตัดสินใจว่า จะลงทุนโดยการซื้อหุ้น หรือ ฝากธนาคาร อย่างไรก็ตาม บางครั้งอาจมีการแนะนำให้ผู้ใช้ลงทุนทั้ง 2 อย่างเลยก็ได้ คำแนะนำในการลงทุนนั้น จะพิจารณาจาก

1. รายได้ (income)

2. ยอดเงินฝาก (saving)

โดยมีข้อกำหนดดังนี้

1. ถ้าผู้ใช้มีเงินฝากไม่พอ (inadequate saving) ผู้ใช้ต้องฝากเงินเข้าบัญชีก่อนไม่ว่าจะมีรายได้เท่าใดก็ตาม
2. ถ้าผู้ใช้มีเงินฝากเพียงพอ (adequate saving) และมีรายได้เพียงพอ (adequate income) ผู้ใช้ควรเสี่ยงที่จะลงทุนในการซื้อหุ้น
3. ถ้าผู้ใช้มีรายได้ต่ำ (low income) แต่มียอดเงินฝากเพียงพอ อาจจะมีการแบ่งรายได้เพื่อนำไปฝาก และซื้อหุ้นด้วย เพื่อเป็นการเพิ่มยอดเงินฝาก และยังอาจได้รับกำไรจากการลงทุน

ยอดเงินฝากที่เพียงพอ (adequate saving) จะพิจารณาจากจำนวนบุตรที่ผู้ใช้จะต้องดูแล โดยมีกฎว่าผู้ใช้จะต้องมีเงินฝากอย่างน้อย $ 5000 สำหรับบุตรแต่ละคน (ในธนาคาร)

รายได้ที่เพียงพอ (adequate income) จะต้องเป็นรายได้ที่แน่นอน (steady income) และจะต้องมีจำนวนอย่างต่ำปีละ $ 15000 รวมกับรายได้เพิ่มเติม $ 4000 สำหรับบุตรแต่ละคน

เพื่อสร้างระบบ advice ดังกล่าวเราจึงใช้ predicate calculus ดังนี้

1. กำหนดองค์ประกอบหลักก่อน ในที่นี้ก็คือ

SAVING(ADEQUATE)

SAVING(INADEQUATE)

INCOME(ADEQUATE)

INCOME(INADEQUATE)

2. กำหนดข้อสรุป ก็คือ การลงทุน (investment) ซึ่งได้แก่ stock,saving หรือ combiantion โดยการพิจารณาจะอยู่ในรูปของการ implication

SAVING(INADEQUATE) $\Rightarrow$ INVESTMENT(SAVING)

SAVING(ADEQUATE) $\wedge$ INVESTMENT(ADEQUATE) $\Rightarrow$ INVESTMENT-(STOCKS)

SAVING(ADEQUATE) $\wedge$ INCOME(INADEQUATE) $\Rightarrow$ INVESTMENT-(COMBINATION)

3. ต่อมา advisor จะต้องพิจารณาถึงว่า saving และ income ของผู้ใช้เป็นอย่างไร (inadequate) หรือ (adequate) ซึ่งก็ยังคงใช้การ implication เหมือนเดิม แต่ต้องมีการคำนวณบางอย่างเกิดขึ้นโดยการใช้ function ช่วยในการคำนวณ นั่นคือ

minimum adequate saving โดยเรียก fn. นี้ว่า MINISAVING

MINISAVING(x) หมายถึง x คือจำนวนบุตร และจะให้ค่ากลับมาเป็น 5000*x ซึ่งทำให้เกิดกฎต่อไปนี้

$\forall x \cdot$ AMOUNTSAVED(x) $\wedge \exists y \cdot$ (DEPENDENTS(y) $\wedge$

$\neg$GREATER(x, MINISAVING(y))) $\Rightarrow$ SAVING(ADEQUATE)

และ

$\forall x \cdot$ AMOUNTSAVED(x) $\wedge \exists y \cdot$ (DEPENDENTS(y) $\wedge$

$\neg$GREATER(x, MINISAVING(y))) $\Rightarrow$ SAVING(INADEQUATE)

โดย MINISAVING(x) = 5000*x

AMOUNTSAVED(x) คือ จำนวนยอดเงินฝาก

DEPENDENTS(y) คือ จำนวนบุตรของผู้ใช้

GREATER(x,y) หมายถึง x IS GREATER THAN y.

เช่นเดียวกับ fn. ที่ชื่อ MININCOME ซึ่งกำหนดดังนี้

MININCOME(x) = 15000 + (4000*x)

คือ MINICOME จะใช้ยอดรายได้ของผู้ใช้ โดยต้องทราบ x ซึ่งก็คือจำนวนบุตร และ predicate ที่ซึ่ง EARNING จะแสดงถึงสถานะของรายได้ของผู้ใช้

กฎที่เกี่ยวข้องคือ

$\forall x \cdot$ EARNING(x, STEADY) $\wedge \exists y \cdot$ (DEPENDENTS(y) $\wedge$

$\neg$GREATER(n, MININCOME(y))) $\Rightarrow$ INCOME(ADEQUATE)

$\forall x \cdot$ EARNING(x, STEADY) $\wedge \exists y \cdot$ (DEPENDENTS(y) $\wedge$

$\neg$GREATER(n, MININCOME(y))) $\Rightarrow$ INCOME(INADEQUATE)

$\forall x \cdot$ EARNING(x,STEADY) $\Rightarrow$ INCOME (INADEQUATE)

ในการให้คำปรึกษาผู้ใช้ advisor จะต้องทราบรายละเอียดของผู้ใช้ นั่นคือ AMOUNTSAVED,EARNING และ DEPENDENTS ตัวอย่างเช่น ผู้ใช้รายหนึ่งมีรายละเอียดส่วนตัวดังนี้

MOUNTSAVE(22000).

EARNING(25000,STEADY).

DEPENDENTS(3).

จากนั้น เราสามารถสรุปได้ว่า

1. SAVING(INADEQUATE) $\Rightarrow$ INVESTMENT(SAVING).

2. SAVING(ADEQUATE) $\wedge$ INCOME(ADEQUATE) $\Rightarrow$ INVESTMENT(STOCK).

3. SAVINT(ADEQUATE) $\wedge$ INCOME(INADEQUATE)

$\Rightarrow$ INVESTMENT (COMBINATION).

4. $\forall$ xA•MOUNTSAVED(x) $\wedge$ $\exists$y• (DEPENDENTS(y) $\wedge$

GREATER(x,MINSAVING(y)) $\Rightarrow$)SAVING(ADEQUATE).

5. $\forall$ x•AMOUNTSAVED(x) $\wedge$ $\exists$y• (DEPENDENTS(y)

$\wedge$ $\neg$GREATER(x,MINSAVING(y))) $\Rightarrow$ SAVING(INADEQUATE).

6. $\forall$ x•EARNING(x,STEADY) $\wedge$ $\exists$y• (DEPENDENTS(y)

$\wedge$ $\neg$GREATER(x,MININCOME(y))) $\Rightarrow$ INCOME(ADEQUATE).

7. $\forall$ x•EARNING(x,STEADY) $\wedge$ $\exists$y• (DEPENDENTS(y)

$\wedge$ $\neg$GREATER(x,MININCOME(y))) $\Rightarrow$ INCOME(INADEQUATE).

8. $\forall$ x•EARNING(x,STEADY) $\Rightarrow$ INCOME(INADEQUATE).

ข้อ 1 – 8 คือกฎที่จะใช้ในการทำงาน เพื่อจะใช้งานจริง เช่น มีผู้เข้ามาขอคำแนะนำโดยมีข้อกำหนดคือ มีบุตร 3 คน มีเงินฝาก 2,200 บาท และมีเงินเดือนประจำ เดือนละ 25,000 บาท เราจะสร้างความรู้เพิ่มเติมดังนี้

9. AMOUNTSAVED(22000).

10. EARNING(25000,STEADY).

11. DEPENDENTS(3).

ซึ่งความรู้ข้อ 9 – 11 จะนำไปใช้คำนวณเพื่อหาค่า

MINSAVING(x) = 5000*x

MINICOME = 15000 + (4000*x)

จากข้อกำหนดทั้งหมด เราจะได้ว่าจากข้อ 10,11 เราได้

EARNING(25000,STEADY) $\wedge$ DEPENDENTS(3)

$\wedge$ $\neg$GREANTER(25000,MINICOME(3)) $\Longrightarrow$ INCOME(INADEQUATE).

เพราะการทำงานของ fn. ที่ชื่อ MINICOME(3) ได้ว่า

EARNING(25000,STEADY) $\wedge$ DEPENDENTS(3)

$\wedge$ $\neg$GREANTER(25000,27000)) $\Longrightarrow$ INCOME(INADEQUATE).

เพราะฉะนั้นเราได้กฎข้อ 12 เพิ่มขึ้น

12. INCOME(INADEQUATE)

ในทำนองเดียวกันเราสามารถใช้กฎข้อ 9,11 และฟังก์ชัน MINSAVING มาสรุปได้ว่า

AMOUNTSAVED(22000) $\wedge$ DEPENDENTS(3)

$\wedge$ GREATER(22000,MINSAVING(3)) $\Longrightarrow$ SAVING(ADEQUATE).

เพราะการหาค่า เราจะได้ว่า

AMOUNTSAVED(22000) $\wedge$ DEPENDENTS(3)

$\wedge$ GREATER(22000,15000) $\Longrightarrow$ SAVING(ADEQUATE).

เราได้กฎข้อ13. คือ

13. SAVING(ADEQUATE)

ซึ่งทำให้เราสรุปได้ว่า

INVESTMENT(COMBINATION).