บทที่ 3
Propositional calculus

ในบทนี้ เราจะพิจารณาถึง formal system ที่ถูกพัฒนาขึ้นมาเพื่อใช้ในการอธิบายถึงความเป็นจริง เป็นเท็จ ของประโยคชนิดพิเศษ ที่เรียกว่า **proposition** โดยเริ่มจากการอธิบายว่า proposition คืออะไร จากนั้นเราจะแนะนำ interpretation รูปแบบ Wff. ในรูป ความเป็นจริงของ prositions ท้ายสุดจะเป็นการให้ deductive apparatus เพื่อทำให้เกิดเป็น formal system ที่เรียกว่า propositional calculus

3.1 Proposition

proposition คือ ประโยคที่มีเหตุผลที่พิจารณาได้ว่าเป็นจริง หรือเท็จ อย่างใดอย่างหนึ่ง (คือไม่อาจเป็นได้ทั้งจริง หรือ เท็จในเวลาเดียวกัน) ซึ่งดูเหมือนจะเป็นการง่ายที่จะพิจารณา แต่จริงๆ แล้วไม่เป็นเช่นนั้นเลย เพราะประโยคบางประโยคสามารถบ่งถึง proposition ได้ต่างกัน ขึ้นอยู่กับว่าใครเป็นผู้ใช้ เช่น ประโยค "รถของฉันสีขาว" หรือ "พรุ่งนี้ฝนจะตก""

ดังนั้นเพื่อให้การพิจารณา proposition ง่ายขึ้น เราจะพิจารณาเฉพาะส่วนของภาษาที่มีความมีเหตุมีผลประกอบอยู่เท่านั้น นอกจากนี้เรายังต้องแน่ใจได้อีกว่าส่วนของภาษาที่เรากำลัง สนใจอยู่นั้น ต้องเป็นไปตามกฎ 2 ข้อคือ

<u>LAW 1</u> (excluded middle)

proposition จะต้องเป็นจริง หรือ เท็จเท่านั้น

<u>LAW 2</u> (contradiction)

proposition จะเป็นจริงและเท็จ ไม่ได้

<u>ตัวอย่าง</u> propositions ได้แก่

"กรุงเทพฯ เป็นเมืองหลวงของไทย"

"ประเทศไทยอยู่ทวีปอเมริกา"

CT 488 23

ตัวอย่าง ของประโยคที่ไม่เป็น propositionS

"เธอหิวข้าวไหม"

การแสดง proposition สามารถแสดงได้โดยการนำความเป็นจริง มาจากความจริงของ propositions อื่น เช่น

"John is cold and wet"

สามารถพิจารณาได้เป็น

"John is cold and John is wet"

ทำให้การพิจารณาความเป็นจริงของ proposition ทำได้ 2 กรณี คือ

Compound proposition คือ การพิจารณา proposition เกิดจากการพิจารณา proposition ย่อยๆ ที่มีอยู่

Simple proposition คือ การพิจารณา proposition ที่ไม่พิจารณาย่อยเหมือน compound proposition ทำให้เกิดกฎเกี่ยวกับ compound proposition

LAW 3 (truth functionality)

- The truth value of a compound proposition is uniquely determined by the truth value of its constituent parts.

นั่นคือการพิจารณาค่าความจริงของ compound proposition ทำได้โดยการพิจารณาค่าความจริงของบรรดา simple proposition ที่รวมกันอยู่ใน compound proposition นั้น

3.2 Propositional logic

คือ formal language ที่ใช้ในการอธิบายถึง propositions โดย Wff ของ propositiona; logic จะถูกตีความในลักษณะของความเป็นจริง (truth values)

ตัวอย่างของ propositional logic

ALPHABET = $\{P,Q,R,\ldots,P_1,P_2,\ldots,\wedge,\vee,\Rightarrow,\Leftrightarrow,\neg\}$

SYNTAX :

SENTENCE = "P" | "Q" | "R" | … | "P_1", "Q_1" |…| " $\neg$ ",SENTENCE

| "(",SENTENCE, " $\vee$ ",SENTENCE, ")"

| "(",SENTENCE, " $\wedge$ ",SENTENCE, ")"

| "(",SENTENCE, "$\Rightarrow$ ",SENTENCE, ")"

| "(",SENTENCE, "$\Leftrightarrow$ ",SENTENCE, ")"

ประโยคของ proposition logic นี้ ได้แก่

$(P \vee Q)$

$\neg P$

$(\neg P \Rightarrow \neg\neg Q$

การ interpretation ของภาษาตัวอย่างนี้ ก็คือ

P,Q,R,…จะแสดงถึง ค่าที่เป็นจริง ของ simple propositions

$\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ จะหมายถึง **connectives symbols** ที่ใช้สร้าง compound proposition จาก simple propositions นั่นเอง

การกำหนดค่าความจริงให้กับ compound proposition เช่น $(A \Leftrightarrow B)$ จะขึ้นอยู่กับค่าของ simple proposition ที่นำมาเชื่อมกัน วิธีการนิยมใช้กำหนดความหมายของ compound proposition คือการใช้ truth table

A	(A)	A
T	T	T
F	F	T

คือตัวอย่างของการกำหนดค่าความจริงให้กับ simple proposition

A	B	AB	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

คือ การใช้ truth table กำหนดค่าความจริงให้กับ compound proposition โดยเราจะแสดงให้เห็นถึงความเป็นไปได้ของการ กำหนดความหมายในทุกๆ กรณี

ตัวอย่าง การใช้ truth table แสดงความเป็นไปได้ในกำหนดความหมาย ของ

$\neg((P \vee Q) \Rightarrow Q)$

P	Q	$(P \vee Q)$	$(P \vee Q) \Rightarrow Q$	$\neg((P \vee Q) \Rightarrow Q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

Connectives

$\neg P$ เรียกว่าเป็น negation ของ P

$P \wedge Q$ เรียกว่าเป็น conjunction ของ P และ Q

$P \vee Q$ เรียกว่าเป็น disjunction ของ P และ Q

$P \Rightarrow Q$ เรียกว่าเป็น implication ของ P และ Q

$P \Leftrightarrow Q$ เรียกว่าเป็น double implication ของ P และ Q

Negation

ถ้า P หมายถึง ความเป็นจริงของ proposition, $\neg P$ จะหมายถึงความเป็นเท็จของ proposition นั้น เช่น proposition

P = "all cats are mammals"

$\neg P$ = "not all cats are annimals".

Conjunction

หมายถึงการ "AND" นั่นเอง ใช้กับ proposition ที่มีการกำหนดความหมาย 2 อย่าง เช่น P = "it is rairing และ Q = "John is wearing a hat" ดังนั้น $P \wedge Q$ = "it is raining and john is wearing a hat".

Disjunction

หมายถึงการ "OR" นั่นเอง $P \vee Q$ จะสามารถกำหนดความหมายได้เหมือนกับค่าความเป็นจริงของ compound proposition "P OR Q OR BOTH P AND Q"

ถ้าประโยค P = “John drinks tea” และ Q = “John drinks coffee” $P \vee Q$ = “John drinks tea or john drinks coffee” ซึ่งหมายความว่า John ดื่มกาแฟ หรือ John อาจดื่มชา หรือดื่มทั้งกาแฟและชา ก็ได้

Implication

หมายถึง “IF.....THEN.....” นั่นเอง ซึ่งจะสามารถกำหนดความหมายได้ง่ายในรูปของ truth table นั่นคือ $A \Rightarrow B$ จะเป็นจริง เมื่อ ทั้ง A และ B เป็นจริง หรือ เมื่อ A เป็นเท็จ โดยที่ B จะเป็นจริง หรือเป็นเท็จก็ได้

ดังนั้นประโยค “แมวเป็นสุนัข”$\Rightarrow$“คนบินได้” จะตีความได้ว่าเป็นความจริงในกรณีดังกล่าวนี้ เราไม่ถือว่าเป็นความผิดของ formal language แต่เป็นความเลินเล่อในการใช้ภาษา

Double implication

$P \Leftrightarrow Q$ จะเป็นจริง เมื่อทั้ง P และ Q เป็นจริง หรือเมื่อทั้ง P และ Q เป็นเท็จ นั่นคือ $\Leftrightarrow$ จะตีความหมายเป็นจริงได้ เมื่อทั้ง 2 ข้างมีค่าอย่างเดียว

3.3 Classifying sentences

ประโยคบางรูปสามารถตีความได้อย่างแน่นอนว่าเป็นจริงเสมอ หรือ เท็จเสมอ อันเนื่องมาจากรูปแบบ เช่น $(A \vee \neg A)$ จะเป็นจริงเสมอ

$(A \vee \neg A)$ จะเป็นเท็จเสมอ

Tautology คือประโยคที่มีค่าเป็นความจริงเสมอ สำหรับการตีความในทุกๆ ส่วนของประโยคนั้น เช่น $(A \vee \neg A)$

Inconsistent คือ ประโยคที่มีค่าเป็นความเป็นเท็จเสมอ โดยไม่สนใจถึงค่าเป็นจริงของส่วนของประโยคนั้น เช่น $(A \wedge \neg A)$

Consistency คือ ประโยคที่มีค่าเป็นจริง หรือ เท็จ ก็ได้ ขึ้นอยู่กับการกำหนดความหมายที่ แตกต่างกันไปของส่วนของประโยคนั้นเช่น

$\neg((S \vee T) \Rightarrow T)$

3.4 Semantic turnstile

ถ้ากำหนด กลุ่มประโยค P และเมื่อใดก็ตามที่ P เป็นจริง ซึ่งทำให้ประโยค W เป็นจริงด้วย เรากล่าวได้ว่า W เป็น **semantic conseuence** ของ P หรือเขียนเป็น $P \models W$ โดย เครื่องหมาย $\models$ เรียกว่า semantic turnstile

<u>ตัวอย่าง</u> $P, P \Rightarrow Q \models Q$

P	Q	$P \Rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

เราจะได้ว่า ถ้า P และ $P \Rightarrow Q$ เป็นจริง Q ก็จะเป็นจริงด้วย ในกรณีที่ P เป็นกลุ่มประโยคที่ว่างเปล่า $P \models W$ จะเขียนได้เป็น $\models W$ นั่นคือ W จะเป็นจริงในทุกกรณี นั่นคือ W เป็น tautology นั่นเอง

3.5 Equivalence

ประโยค 2 ประโยค จะเป็น equivalent ถ้าและเพียงถ้าค่าความเป็นจริงของทั้งสอง ตรงกัน ภายใต้การ interpretation ทุกๆ กรณี ถ้า A เป็น equivalent กับ B เราจะเขียนในรูปของการใช้ metasymbol ได้เป็น $A \equiv B$

<u>ตัวอย่าง</u> $(P \Rightarrow Q) \equiv \neg(P \wedge \neg Q)$

ซึ่งแสดงได้ในรูปของ truth table

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q$	$(P \wedge \neg Q)$	$\neg(P \wedge \neg Q)$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	F	T

ในเรื่องของ equivalence นี้ไม่ค่อยจะแพร่หลายทางด้าน logic นัก ทั้งนี้ก็เพราะ $A \equiv B$ ก็คือ กรณีของ $A \Leftrightarrow B$ นั่นเอง

3.6 Proposition calculs

เราได้กล่าวถึงภาษาที่เป็น formal language คือ propositional logic และการให้ความหมายซึ่งทำให้เราสามารถแสดงค่าความเป็นจริงของ proposition มาแล้ว (โดยการใช้ truth table อธิบาย) ซึ่งการอธิบายโดย truth table ทำให้เราสามารถพิจารณาการให้ความหมายกับ propositional symbolS ได้ทุกกรณีที่เป็นไปได้ เช่น ถ้าเรามี propositional symbols 2 ตัว คือ P และ Q การกำหนดค่าความเป็นจริงที่เกิดขึ้น เมื่อพิจารณาจาก truth table จะเป็น

P	Q
T	T
T	F
F	T
F	F

ซึ่งเป็นการพิจารณาที่ถือว่าเป็นธรรมชาติโดยทั่วไป แต่อย่างไรก็ตาม ถ้าเรามีการใช้ propositional symbols หลายๆ ตัว ตาราง truth table ก็จะมีขนาดใหญ่เกินไป (คือเกิด combinnation ถึง 2^n นั่นเอง) เมื่อ propositional logic เป็นภาษาที่ให้รูปแบบพื้นฐานในการพิจารณา proposition แล้ว สิ่งต่อมาที่เราต้องการก็คือ การให้กลไกล deductive apparatus เพื่อให้เกิดการมีเหตุผลในระดับที่เป็นระดับโครงสร้าง (syntactic level) ของภาษา (คือก่อนมีการให้ความหมายนั่นเอง)

การเพิ่ม deductive apparatus ให้กับ propositional logic นี้ทำให้เราได้ formal system ขึ้นมาใช้ ซึ่งเราจะเรียกว่า propositional calculus ในขณะที่เราสามารถใช้ภาษาใดๆ ในการแสดงถึง proposition ได้(ในที่นี้เราเลือก propositional logic) เราก็สามารถเลือกใช้ deductive apparatus ใดๆ ก็ได้เช่นกัน ดังนั้นในที่นี้เราจะเลือกใช้ deductive apparatus ที่เรียกว่า natural deductive system

กฎ (rule) ที่ใช้ใน deductive apparatus จะเป็นดังนี้

$\wedge$ - introduction

$$\frac{A, B}{B \wedge A}$$

$\wedge$ -elimination

$$\frac{A \wedge B}{A, B}$$

$\vee$ -introduction

$$\frac{A}{A \vee B}$$

$\neg$ - elimination

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

$\Rightarrow$ -elimination

$$\frac{A, A \Rightarrow B}{B}$$

$\Leftrightarrow$ - elimination

$$\frac{A \Leftrightarrow B}{A \Rightarrow B, B \Rightarrow A}$$

$\Leftrightarrow$ - introduction

$$\frac{A \Rightarrow B, B \Rightarrow A}{A \Leftrightarrow B}$$

โดย A และ B หมายถึง proposition ซึ่งเป็นได้ทั้ง simple และ compound

กฎเหล่านี้อยู่ในรูปของ metalanguage อย่างง่ายๆ โดยกฎจะถูกแบ่งออกเป็น 2 ส่วน ด้วยเส้นตรงในแนวขวาง ส่วนบนจะประกอบด้วยบรรดาประโยคต่างๆ ส่วนล่างจะประกอบด้วยประโยคเพียงประโยคเดียว โครงสร้างดังกล่าวนี้มีความหมายคือ ถ้าเรามีประโยคซึ่งอยู่ส่วนบนแล้วเราจะได้ประโยคส่วนล่างเป็น immediate consequence ทันที นอกจากนี้เรายังมีการตั้งชื่อให้กับกฎเหล่านี้เพื่อใช้เป็นสิ่งอ้างอิง เมื่อนำกฎนั้นมาใช้

ระบบนี้ มีแนวความคิดเกี่ยวกับการกำหนดกฎสำหรับใช้แนะนำ และกำจัด connective symbolS ทั้ง 5 ตัวคือ $\wedge, \vee, \Leftrightarrow$ นอกจากนี้ระบบนี้ไม่มีการใช้ axiom แต่จะใช้กฎที่มีอยู่ในการพิสูจน์ theorem

ตัวอย่างการใช้กฎ

$\boxed{\text{DERIVATION 3.1}}$ แสดงว่า

$P \wedge Q \vdash P \vee Q$

<u>DERIVATION</u>:

1	$P \wedge Q$	premise
2	P	1, $\wedge$ - elimination
3	PQ	2, $\vee$ - introduction

จากตัวอย่างนี้ เราจะพบว่าการสืบสมฎฐาน (derivation) นั้นค่อนข้างจะง่าย แต่โดยทั่วไปแล้ว การ derivation จะไม่ง่ายเช่นนี้ นั่นคือ เราจะต้องใช้ความพยายามทุกๆ วิธีที่จะทำการ derive เพื่อให้ได้ผลตามที่เราต้องการนั่นเอง

$\boxed{\text{DERIVATION 3.2}}$ แสดงว่า

$P, Q, (P \wedge Q) \rightarrow R \vdash R$

<u>DERIVATION</u>

1	P	premise
2	Q	premise
3	$(P \wedge Q) \Rightarrow R$	premise
4	$P \wedge Q$	1,2, $\wedge$ - introduction
5	R	3,4, $\Rightarrow$ – elimination

CT 488 31

DERIVATION 3.3 แสดงว่า

$P, P \Leftrightarrow Q \vdash Q$

<u>DERIVATION</u>

1	P	premise
2	$P \Leftrightarrow Q$	premise
3	$P \Rightarrow Q$	2, $\Leftrightarrow$ - elimination
4	Q	1,3, $\Rightarrow$ - elimination

กฎบางข้อ มีการนำ assumption มาใช้ ซึ่งจะเป็นการใช้ภายใต้การ derivation เองไม่เกี่ยวกับ premise แต่อย่างใด การใช้ assumption มาทำการ derive นี้ก็เพื่อให้ได้ผลที่เฉพาะเจาะจงตามที่ถูกกำหนดไว้เป็น assumption การทกง่านของ assumption จะต้องอยู่ภายในขอบเขต (SCOPE) นั่นคือ assumption จะมีขอบเขตการใช้งานเริ่มจากบรรทัดที่มีการกำหนดมันขึ้นมาใช้จนถึงบรรทัดที่เป็นกฎที่มันระบุ ซึ่ง assumption จะต้องถูกใช้ภายในขอบเขตของมันเท่านั้น

กฎที่เกี่ยวข้องกับการใช้ assumption จึงต้องมีการเปลี่ยนแปลงให้เหมาะสม กำหนดให้ S หมายถึง บรรดาประโยคต่างๆ ที่ผ่านการสืบสมมติฐานมาแล้ว ,A และ B เป็น assumption ซึ่งอยู่ภายในขอบเขตที่กำหนดกฎที่ใช้คือ

$\vee$ - elimination

$$\frac{S, A \vdash C,\ S, B \vdash C,\ A \vee B}{C}$$

$\Rightarrow$ - introduction

$$\frac{S, A \vdash B}{A \Rightarrow B}$$

$\neg$ - introduction

$$\frac{S, A \vdash B,\ S, A \vdash \neg B}{\neg A}$$

<u>ตัวอย่าง</u> DERIVATION 3.4

จงแสดงว่า $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$

<u>DERIVATION</u> :

1	$P \Rightarrow Q$	premise
2	$Q \Rightarrow R$	premise
3	P	assumption
4	Q	1,3, $\Rightarrow$ - elimination
5	R	4,2,- elimination
6	PR	3,4,5 $\Rightarrow$ – elimination

THEOREM 3.1 พิสูจน์ว่า

$\vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)(Q \vee R)$

PROOF

1	$(P \wedge Q)(P \wedge R)$	assumption
2	$(P \wedge Q)$	assumption
3	Q	2, $\wedge$ - elimination
4	$Q \vee R$	3, $\vee$ - introduction
5	$(\neg P \wedge R)$	assumption
6	R	5, $\wedge$ - elimination
7	$Q \vee R$	6, $\vee$ - introduction
8	$Q \vee R$	2-7 $\vee$ - elimination
9	$(P \wedge Q)(P \wedge R) \Rightarrow (Q \vee R)$	1-9,- introduction

DERIVATION 3.5

แสดงว่า

$$P \Rightarrow Q \vdash \neg(P \wedge \neg Q)$$

DERIVATION

1	$P \Rightarrow Q$	premise
2	$P \wedge \neg Q$	assumption
3	P	2, $\wedge$ - elimination
4	Q	1,3, $\Rightarrow$ - elimination
5	$\neg Q$	2, $\wedge$ - elimination
6	$\neg(P \wedge \neg Q)$	2-5, $\neg$ - introduction

ตัวอย่างนี้เป็นตัวอย่างการ proof by contradiction

DERIVATION 3.6

แสดงว่า

$$P, \neg P \vdash Q$$

DERIVATION

1	$\neg Q$	assumption
2	P	premise
3	P	premise
4	$\neg\neg Q$	1-3, $\neg$ - introduction
5	Q	4, $\neg$ - elimination

ตัวอย่างของการ proof by contradiction อีกตัวอย่างหนึ่งคือ

THEOREM 3.2

พิสูจน์ว่า

$$\vdash P \vee \neg P$$

PROOF

1	$\neg(P \vee \neg P)$	assumption
2	P	assumption
3	$P \vee \neg P$	2, $\vee$ - introduction
4	$\neg(P \vee \neg P)$	1, $\vee$ - introduction

5	$\neg P$	2-4, $\neg$ - introduction
6	$P \vee \neg P$	5, $\vee$ - introduction
7	$\neg\neg(P \vee \neg P)$	1-6, $\neg$ - introduction
8	$P \vee \neg P$	7, $\neg$ - elimination

DERIVATION 3.7 แสดงว่า

$$P \Rightarrow Q \vdash \neg P \vee Q$$

<u>DERIVATION</u>

1	$P \Rightarrow Q$	premise
2	$P \vee \neg P$	theorem 2.2
3	P	assumption
4	Q	3,4, $\Rightarrow$ - elimination
5	$\neg P \vee Q$	4, $\vee$ - introduction
6	$\neg P$	assumption
7	$\neg P \vee Q$	6, $\vee$ - introduction
8	$\neg P \vee Q$	2-7, $\vee$ - elimination

การ proof และ derivation ไม่จำกัดอยู่กับรูปแบบของ proposition symbols ที่ใช้ ตัวอย่างเช่น theorem 3.2

$$\vdash P \vee \neg P$$

เราสามารถใช้ประโยคที่เป็น compound proposition แทนที่สัญลักษณ์ที่ใช้ใน theorem ได้นั่นคือ

$$\vdash (P \Rightarrow (Q \vee \neg R)) \vee \neg(P \Rightarrow (Q \vee \neg R))$$

การ derivation อีกรูปแบบหนึ่งที่สามารถกระทำได้คือ การนำเอา derivation ที่เสร็จแล้วมาใช้ในการทำ derivation ของรูปแบบอื่น นั่นคือ ถ้าเรามี $S \vdash W$ และเรากำลังทำการ derive อีกรูปแบบหนึ่งซึ่งเกี่ยวข้องกับ S เราสามารถอ้างถึง W ได้โดยไม่ต้องแสดงว่าได้ W มาอย่างไร ผลที่ถูกนำมาใช้ในการ proof และ dervation นี้เรียกว่า "lemmas"

<u>ตัวอย่าง</u> DERIVATION 3.8

กำหนด DERIVATION (หรือ lemma)

$$P \Rightarrow Q \vdash \neg P \vee Q$$

แสดงว่า

$$(R \vee S) \Rightarrow (T \Leftrightarrow V) \quad (\neg(R \vee S) \vee (T \Leftrightarrow V) \vee W$$

<u>DERIVATION</u>

1	$(R \vee S) \Rightarrow (T \Leftrightarrow V)$	premise
2	$\neg(R \vee S) \vee (T \Leftrightarrow V)$	given derivation (lemma)
		$R \vee S$ replace P
		$T \Leftrightarrow V$ replace Q
3	$(\neg(R \vee S) \vee (T \Leftrightarrow V)) \vee W$	2, $\vee$ - introduction

3.7 Consistency และ completeness

propositional calculus มีคุณสมบัติ 2 ประการ ที่ทำให้เป็น ที่เป็น formal system ประโยชน์นั่นคือ

1. consistency
2. completeness

ซึ่งอธิบายได้ดังนี้

Completeness

ถ้า P หมายถึงชุดของประโยคแล้ว เราจะได้ว่า formal system เป็น complete โดยพิจารณาจากการให้ความหมาย ถ้าเมื่อใดก็ตามที่ $P \models W$ เราได้ว่า $P \vdash W$ นั่นก็คือถ้าเรากำหนดความหมายให้กับ P และ W อย่างมีเหตุผล เราจะได้เหตุผลเช่นกันในการกำหนด syntax ใน formal system ของเรา

Consistency

ถ้า P หมายถึงชุดของประโยคแล้ว เราจะได้ว่า formal system เป็น consistent โดยพิจารณาจากการให้ความหมาย ถ้าเมื่อใดก็ตามที่ P W แล้วเราจะได้ $P \models W$ นั่นก็คือเราสามารถกล่าวได้ว่าถ้าเราสามารถ derive รูปแบบบางอย่างได้อย่างเป็นทางการ เราก็จะสามารถให้ ความหมายกับบรรดาประโยคต่างๆ ที่เกี่ยวข้องซึ่งจะนำมาซึ่งผลสรุปอย่างเดียวกันเลย

คุณสมบัติเกี่ยวกับ consistency นี้ทำให้เราอธิบายความหมายของการทำ derivation ใน propositional calculus ได้ นั่นคือถ้าเราสามารถ derive ในรูปแบบของ เราจะได้ว่า $P \models W$ ด้วย นั่นคือ ถ้าประโยคทั้งหมดของ P ถูกกำหนดความหมายให้เป็นจริง ประโยคต่างๆ ของ W ก็จะเป็นจริงด้วย

3.8 Reducing formality

ผลของ completeness และ consistency ทำให้เราสามารถเปลี่ยนไปมาระหว่างการ proof และ derivation ของ syntax กับ การให้ความหมายที่เป็นจริงและเป็นเท็จทาง semantic ดังนั้น "equivalence" จึงสามารถนำมาใช้ในความหมายดังนี้

ถ้า $A \equiv B$ แล้ว เราจะได้ว่า $A \models B$ และ $B \models A$ ซึ่งผลต่อเนื่องที่ตามมาอันเนื่องมาจากคุณสมบัติของ completeness ก็คือ $A \vdash B$ และ $B \vdash A$ ด้วย

ดังนั้นสำหรับทุกๆ equivalence จะเกิด derivation ที่สัมพันธ์กันเกิดขึ้นเสมอทั้งๆ ที่เราไม่รู้ว่าเป็นไปได้อย่างไร นั่นคือทำให้เกิดทางลัดในการ proof และ derivation อันเนื่องมาจาก Equivalence เราเรียกลักษณะนี้ว่าเป็น **well-founder knowledge**

ตัวอย่างเช่น

theorem 2.3 กำหนด equivalences (คือ lemma) ต่อไปนี้

$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ และ $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \vee \neg B$

พิสูจน์ว่า

$\vdash (P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$

PROOF

1	$(P \Rightarrow Q) \vee (P \Rightarrow Q)$	theorem 2.2
2	$(P \Rightarrow Q)$	assumption
3	$(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$	2, $\vee$ - introduction
4	$\neg(P \Rightarrow Q)$	assumption
5	$\neg(\neg P \vee Q)$	4,by given lemma
6	$\neg\neg P \wedge \neg Q$	5,by given lemma
7	$\neg Q$	6, $\wedge$ - elimination
8	$\neg Q \vee P$	7, $\vee$ - introduction

9	$Q \Longrightarrow P$	8,by given lemma
10	$(P \Longrightarrow Q) \vee (Q \Longrightarrow P)$	- introduction
11	$(P \Longrightarrow Q) \vee (Q \Longrightarrow P)$	1-10,- elimination

จากการ proof ในลักษณะนี้ทำให้เราสามารถเลี่ยงการใช้ truth table ในการตรวจความเป็นจริง (tautology) เช่นการตรวจสอบ

ถ้า $\vdash A$ จริงแล้ว เราจะได้ $\models A$ จริงด้วย

ความสัมพันธ์ระหว่างการ proof และ derivation สามารถกำหนดในลักษณะของ $\Longrightarrow$ ดังนี้

ถ้า $A \vdash B$ แล้วเราจะได้ว่า $\vdash A \Longrightarrow B$ และถ้า $\vdash A \Longrightarrow B$ แล้วเราก็จะได้ $A \vdash B$

อีกรูปแบบหนึ่งซึ่งเป็นประโยชน์สำหรับการใช้ประโยคในรูปของ AB ก็คือ

<u>ตัวอย่าง</u> DERIVATION 2.9 (vacuous $\Longrightarrow$ introduction) แสดงว่า

$\neg P \vdash P \Longrightarrow Q$

<u>DERIVATION</u>

1	$\neg P$	premise
2	P	assumption
3	$\neg Q$	assumption
4	$\neg\neg Q$	1-3, $\neg$ - introduction
5	Q	4, $\neg$ - elimination
6	$P \Longrightarrow Q$ 2-5, $\Longrightarrow$ - introduction	

นั่นคือ การยอมให้เราทำ proof หรือ derivation ให้กับประโยคในรูป $A \Longrightarrow B$ ได้เมื่อเรามีการกำหนดในรูป $\neg A$ ไว้ก่อนแล้ โดยเราไม่ต้องสนใจถึงรูปประโยค B ของ แต่อย่างใด

ความสามารถในการทำงานของ reduce formality ในลักษณะของ well-founded knowledge และการนำผลของการ derive มาใช้ในกรณีที่เหมาะสม ถือว่าเป็นวิธีการทำงานอย่างหนึ่งทางคณิตศาสตร์ ถ้าผลการทำงานอย่างหนึ่งไม่สามารถนำมาอ้างอิงได้คือทุกครั้งที่ต้องการใช้

รูปแบบดังกล่าวต้องมีการ proof หรือ derivation ใหม่ทั้งหมด คณิตศาสตร์ก็จะไม่กลายมาเป็นเครื่องมือที่มีประโยชน์เหมือนดังเช่นปัจจุบัน

กฎเกี่ยวกับ equivalence ใน propositional logic

Commutative properties

$$A \wedge B \equiv B \wedge A$$

$$A \vee B \equiv B \vee A$$

Associative properties

$$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$$

Distributive properties

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

DE MORGAN'S ruleS

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$$

Double negation property

$$\neg\neg A \equiv A$$

CT 488

39