บทที่ 2
ระบบแบบแผน
(Formal system)

ระบบแบบแผน (formal system)

งานด้าน AI จะมีการนำเอาคณิตศาสตร์เข้ามาเกี่ยวข้องอันเนื่องมาจากเหตุผล 2 ประการ คือ หนึ่ง คณิตศาสตร์ จัดว่าเป็นภาษาชนิดหนึ่ง ซึ่งสามารถนำมาใช้ในการอธิบาย และพิจารณาหาข้อสรุปได้ และ สอง คณิตศาสตร์ มีกฎเกณฑ์ที่นำมาใช้จัดการกับรูปแบบสัญลักษณ์ได้ด้วยเหตุผลดังกล่าวนี้เอง formal systems จึงมีส่วนเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์

formal systems จะประกอบด้วยองค์ประกอบ 2 ส่วนคือภาษาแบบแผน (formal language) และกลไกการสืบสมมติฐาน (deductive apparatus) ซึ่งเป็นองค์ประกอบที่ทำให้เกิดการสร้าง (generating) และจัดการ (manipulating) กับรูปแบบสัญลักษณ์ได้ และ formal systemS จะมีประโยชน์มากหากเรามีการกำหนดความหมาย (semantics) ให้กับรูปแบบสัญลักษณ์ดังกล่าวด้วย

2.1 ภาษาแบบแผน (formal languages)

ภาษาแบบแผนประกอบด้วยส่วนประกอบ 2 ส่วน คือ

1. ตัวอักขระ (alphabet) คือบรรดาสัญลักษณ์ที่กำหนดให้มีในภาษา
2. กฎการใช้ภาษา (systax) คือกฎเกณฑ์ที่ระบุถึงการนำสัญลักษณ์มาใช้ในการอธิบายถึง formal languages นั้นเราจะใช้รูปแบบที่เรียกว่า meta language ในการอธิบายนั้นคือการอธิบายถึงอักขระจะใช้เครื่องหมายวงเล็บปีกกาครอบบรรดาสัญลักษณ์ที่จะมาเป็นอักขระใน formal language ของเรา ตัวอย่างเช่น ภาษาที่ใช้อธิบายเลขจำนวนเต็ม จะมีอักขระดังนี้ {0,1,2,...,9} ส่วนภาษาที่ใช้อธิบายเลขทศนิยมเช่น '3.1459' จะมีอักขระดังนี้ {0, 1, 2, 3 ,... 8, 9 .} เป็นต้น

เมื่อกำหนดอักขระแล้ว ต่อมาก็คือการกำหนดกฎเกณฑ์ของการนำอักขระมาใช้หรือเรียกว่า syntax นั่นเอง ภาษา 2 ภาษา อาจมีอักขระที่ใช้เหมือนกัน แต่สิ่งที่ทำให้ภาษาทั้ง 2 แตกต่างกันก็คือ กฎเกณฑ์การใช้ภาษานั่นเอง การนำอักขระมาใช้ร่วมกันทำให้เกิดเป็น string ของภาษาและ string ของภาษาใดก็ตามที่เกิดหรือสร้างขึ้นมาตามกฎเกณฑ์ (systax) อย่างถูกต้องจะ

CT 488 15

ภาษาและ string ของภาษาใดก็ตามที่เกิดหรือสร้างขึ้นมาตามกฎเกณฑ์ (systax) อย่างถูกต้องจะ

เรียกว่า Well-form formulat หรือ Wff ตัวอย่างเช่น กำหนดภาษา L ซึ่งประกอบด้วยอักขระ {*,#} และ syntax ของภาษา L มีดังนี้

"A Wff in L is any finite string of zero of more * symbols, followed by between one and four # symbols, or a string of one or more * symbols with no # symbols following."

เราจะได้ว่า Wff ของ L จะได้แก่

****##

**####

***********#

###

*****

ส่วน string ไม่เป็น Wff ได้แก่

**##*

##*

จะเห็นว่าการกำหนด syntex โดยการใช้ภาษาอังกฤษดังตัวอย่างนี้ อาจทำให้เกิดการตีความที่ผิดพลาดได้ ทำให้การสร้าง string มีปัญหาว่าใช้ Wff หรือไม่

เพื่อให้เกิดความเข้าใจใน syntax ของ formal languages ได้ดีขึ้น จึงมีการใช้ meta language (ซึ่งรูปแบบจะคล้ายกับ BNF-form) ในการอธิบายดังตัวอย่างของการอธิบายถึง syntax ที่ใช้ในการสร้างเลขทศนิยมของ formal language ภาษาหนึ่ง ซึ่งมีอักขระ {0,1,2,…,9,.} จะเป็นดังนี้

UNSIGNED REAL = UNSIGNED INTEGER , DECIMAL FRACTION;

DECIMAL FRACTION = ".", UNSIGN INTEGER;

UNSIGNED INTEGER = DIGIT | DIGIT, UNSIGNED INTEGER;

DIGIT = "0" | "1" | "2" | …| "9";

โดยตัวอย่างของ Wff ที่ได้คือ 3.14159,0.5,2.0,.468 เป็นต้น

2.2 ความหมาย (semantic)

ขั้นต่อมาของ formal languages ก็คือการให้ความหมาย ซึ่งก็คือการกำหนดความหมายให้กับ Wff นั่นเอง เราเรียกว่าเป็นการตีความ (interpretation) ให้กับ Wff โดยการกำหนดค่าที่อยู่ในขอบเขตที่เราสนใจให้กับ Wff นั้นเอง ตัวอย่างเช่น จากภาษา L เรากำหนดการตีความ I1 โดยใช้

* หมายถึง 5

หมายถึง 1

และสัญลักษณ์ที่เรียงต่อกันหมายถึงการบวกกัน จะได้ว่า

I1 (###) หมายถึง 1 + 1 + 1 หรือ 3

I1 (**##) หมายถึง 5 + 5 + 1 +1 หรือ 12

และถ้าให้การตีความ I2 นั้น

I2 (*) หมายถึง 10

I2 (#) หมายถึง 2

โดยสัญลักษณ์ที่เรียงต่อกัน หมายถึงการบวกกัน จะได้ว่า

I2 (###) จะหมายถึง 2 + 2 + 2 หรือ 6

I2 (**##) จะหมายถึง 10 + 10 + 2 + 2 หรือ 24

จะเห็นได้ว่า การที่เราใช้รูปแบบที่มีแบบแผนในการแสดงถึงการตีความที่แตกต่างกับ string ที่เหมือนกันได้ จัดว่าเป็นประสิทธิภาพที่ดีของภาษาแบบแผน (formal languages) และนี่คือสาเหตุของการนำคณิตศาสตร์ ซึ่งถือว่าเป็น formal language ชนิดหนึ่งมาใช้ในงานด้าน AI

2.3 ระบบอนุมาน (inference systems)

ในหัวข้อ 1.1 เราได้อธิบายถึงการกำหนด formal language ในลักษณะที่ strings ของภาษา (ที่สร้างจาก alphabet) ไม่มีความหมายแต่อย่างใดซึ่งต่อมาในหัวข้อ 1.2 เราจึงได้มีการกำหนดความหมายให้กับ string ดังกล่าว โดยการกำหนดการตีความ (interpretation) ให้กับภาษา ทำให้เราสามารถใช้ formal notation นั้น ไปอธิบาย สิ่งอื่นๆ ได้ ดังนั้นในหัวข้อนี้เราจะพูดถึงการนำ formal strings ไปใช้โดยการวิเคราะห์ โครงสร้างทาง syntax ของ strings เหล่านั้น (นั่นคือเราไม่สนใจถึงความหมายของ strings เหล่านั้น นั่นเอง) โดยการเพิ่มวิธีการที่เรียกว่า (deductive apparatus) ให้กับ formal language ซึ่งทำให้เกิด formal system ขึ้น

แต่มีข้อกำหนดสำคัญที่เกี่ยวกับ deductive apparatus นั่นคือ deductive apparatus จะไม่มีการอ้างถึงการตีความ ที่เฉพาะเจาะจงของ formal language แต่จะอ้างถึง Wffs ในลักษณะที่เป็นรูปแบบทาง syntax ที่ไม่มีความหมาย โดยการกำหนดดังกล่าวจะทำให้เราสามารถดำเนินการเกี่ยวกับ symbol (ในรูปของ string) โดยที่ไม่จำเป็นต้องพิจารณาว่า symbol นั้นหมายถึงอะไร อย่างเช่นในทางคณิตศาสตร์ เราสามารถนำเอาเลข 2 จำนวนมาบวกกัน โดยไม่จำเป็นต้องระบุว่า เลข 2 จำนวนดังกล่าวหมายถึงอะไร คือเราทราบว่า 2 + 3 = 5 (นี่คือการเอา symbol มาใช้) เราอาจจะให้ symbol นี้หมายถึง ส้ม 2 ผลรวมกับส้ม 3 ผล เป็นส้ม 5 ผลก็ได้ หรืออาจจะเป็นบ้าน 2 หลังสร้างเพิ่มอีก 3 หลัง รวมเป็นบ้าน 5 หลังก็ได้เช่นกัน

deductive apparatus ประกอบด้วยองค์ประกอบ 2 ส่วนคือ

1. <u>Axion</u> : คือWffs ที่สามารถเขียนขึ้นมาได้โดยไม่ต้องมีการอ้างถึง Wffs อื่นๆ ที่มีในภาษา

2.<u>Inference rules</u> : คือกฎที่ทำให้เราสามารถสร้าง Wffs ของภาษาขึ้นมาได้ในลักษณะที่เรียกว่าเป็น immediate consequence ของWffs ตัวอื่น

<u>ตัวอย่าง</u> ของ formal system

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> ของ formal system

กำหนด alphabet ของภาษา คือ {*, ◊ ,**O**}

syntax ของภาษาคือ

SENTENCE = STRING OF STARS, "◊",STRING OF STARS, "**O**";

STRING OF STARS = "*" | STRING OF STARS ,"*";

และส่วน deductive APPARARUS ประกอบด้วย

<u>AXIOM</u> * ◊ * O **

<u>RULE</u> "IF a ◊ b **O** c is a given Wff, where a,b and c are strings of stars, then a ◊ b***O** c* is an immediate consequence of it."

(การกำหนด deductive apparatus ในตัวอย่างนี้เป็นการใช้ภาษาอังกฤษเป็น metalanguage)

ในการใช้ inference rule ใน deductive apparatus นั้นจะขึ้นอยู่กับการจัดรูปแบบของ Wffs เพื่อระบุถึง a,b และ c ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงแสดงว่า * ◊ **** **O** ***** เป็น immediate consequence ของWff.

*◊ *** **O** **** ใน formal system ตัวอย่าง 1

1. * ◊ ***O**** เป็น Wff.

(ดังนั้น a คือ *

b คือ ***

c คือ ****

และ a ◊ b * O c * เป็น immediate conseuence (ตาม rule))

นั่นคือ * ◊ **** O ***** เป็น immediate consequence ส่วนการให้ความหมายของ formal system ในรูปของ interpretation อาจเป็นดังนี้

<u>ตัวอย่าง 3</u> การ interpretation formal system ในตัวอย่าง 1

ให้ * หมายถึง 1, ** หมายถึง 2, *** หมายถึง 3... ให้ ◊ หมายถึง +

ให้ O หมายถึง =

ดังนั้น ประโยคจะสามารถกำหนดได้ในรูปแบบของ a + b = c ซึ่งอาจเป็นจริง หรือ เท็จ ก็ได้ส่วน axiom จะกลายเป็น 1 + 1 = 2

และ inference rule จะพิจารณาได้เป็น

ถ้า a + b = c แล้วจะได้ว่า a + (b + 1) = (c + 1)

2.4 การพิสูจน์และทฤษฎี (proofs and theorems)

<u>**Proof**</u> ของ formal system,f ,หมายถึงลำดับอย่างจำกัดของ Wff ที่อยู่ใน formal language ที่เกี่ยวข้อง นั่นคือ Wff อาจเป็น axiom ของ f หรือ Wff อาจเป็น immediate consequence ของ Wff ตัวหนึ่ง หรือ หลายๆ ตัวที่ได้ถูกอ้างถึงมาแล้ว (โดยพิจารณาจาก inference rules)

<u>**Theorem**</u> ของ formal language,f , หมายถึง Wff ที่สามารถพิสูจน์ได้ใน formal system, f เป็น axioms ทุกตัวของ formal system, f , เป็น theorem ของ f ด้วย

<u>ตัวอย่าง 4</u> จาก formal system ในตัวอย่าง 1 เรา ได้ว่า theorem คือ

* ◊ **** O *****

<u>**พิสูจน์**</u>

1. * ◊ * O **	axiom
2. * ◊ ** O ***	ใช้ inference rule กับข้อ 1
3. * ◊ *** O ****	ใช้ inference rule กับข้อ 2

4. * ◊**** O *****　　　　　　ใช้ inference rule กับข้อ 3

QED

จะเห็นได้ว่าแต่ละบรรทัดของการพิสูจน์ จะแบบเป็น 3 ส่วนคือ

1. หมายเลขบรรทัด เพื่อใช้ในการอ้างถึง
2. Wff
3. การให้เหตุผล

จากตัวอย่างข้างต้น เราจะสังเกตได้ว่า การพิสูจน์ theorem ดังกล่าว ทำให้เราได้ theorem เพิ่มขึ้นอีก 2 ตัว * ◊** O *** และ * ◊*** O **** และจะเห็นได้อีกว่าการพิสูจน์ข้างต้น เราสนใจแต่เพียงโครงสร้างทาง syntax ของ Wff เท่านั้นคือ เราไม่สนใจความหมายใดๆ ของ Wff เลย แต่อย่างไรก็ตามบางครั้งเราอาจต้องการทราบว่า theorem นั้นมีความหมายอย่างไรในการ interpretation ในรูปแบบเฉพาะบางอย่างของ formal system

<u>ตัวอย่าง</u> จากการ interpretation ตามตัวอย่าง 3 เราสามารถกำหนดความหมายของ theorem จากตัวอย่าง 4 ได้เป็น 1 + 4 = 5

ซึ่งจะพบว่าจะตรงกับการ interpretation ของ axiom และ inference rule ที่จริงแล้ว theorem ใดๆ ก็ตามที่เราสามารถพิสูจน์โดยใช้ formal system ดังกล่าวใน ตัวอย่างข้างต้น และ interpretation ด้วยวิธีเดียวกัน จะเป็นประโยคที่เป็นจริงเสมอเราสามารถกล่าวได้ว่า formal system นี้ consistent กับการตีความ ซึ่งการตีความทุกๆ วิธีไม่จำเป็นต้องมีคุณสมบัติของ consistency เสมอไป นั่นคือการ ตีความบางอย่างอาจจะ ให้ผลเป็นจริงบ้าง เท็จบ้าง ก็ได้นั่นเอง

ลองพิจารณา *** ◊**** O ******* ว่าเป็น theorem หรือไม่

เราทราบว่าการ interpretation ของ *** ◊**** O ******* จะได้ว่า 3 + 4 = 7

แต่เราไม่สามารถใช้ deductive apparatus ที่กำหนดไว้ใน formal system ในตัวอย่าง 1 ในการผลิตรูปแบบข้างต้นให้เป็น theorem ได้ ทั้งนี้ก็เพราะ formal system

formal system ของเราจะใช้ได้กับรูปแบบที่มี * เพียงตัวเดียวหน้าเครื่องหมาย ◊ เท่านั้นนั่นก็คือ formal system อยู่ในลักษณะที่เรียกว่า incomplete ถ้า formal system ของเรา complete นั่นก็หมายความว่า เราสามารถพิสูจน์ theorem ได้จากสิ่งที่เราคิดว่าเป็นจริงในการตีความ

การตีความของ formal system ที่ซึ่ง Wffs. แสดงไว้ในรูปของประโยคซึ่งสามารถเป็นจริง หรือ เท็จ ได้ จะเป็น

consistent- ถ้าทุก theorem ของระบบสามารถตีความเป็นประโยคที่เป็นจริงได้

complete – ถ้าทุกประโยคที่เป็นจริงสามารถพิสูจน์เป็น theorem ได้

โดยส่วนใหญ่แล้ว เราจะพบว่า formal system ที่มีประโยชน์ มักจะเป็น incomplete ซึ่งทำให้เราไม่สามารถพิสูจน์สิ่งที่เรารู้ว่าเป็นจริงได้

2.5 การสืบสมุฏฐาน (derivations)

การ derivation ของ Wffs. ใน formal system,f , จากชุดของข้อกำหนด ρ ซึ่งเป็น Wffs. ที่เรียกว่า premises (ข้อกำหนด) คือ การเรียงลำดับอย่างมีขอบเขตที่แน่นอนของ Wff ในภาษาของ f ที่ซึ่ง Wff. ตัวสุดท้ายคือ W และ Wff. ตัวอื่นๆ ในลำดับนั้นมาจาก

- axiom ของ f
- premises คือ Wff. จากชุดข้อกำหนด ρ
- immediate consequence ของ Wff. ตัวอื่นๆ ในลำดับ ซึ่งพิจารณาจาก inference ruleS ของ f

การ derivation นี้จะเปรียบเสมือนกับประโยค "if we are given that ... then..."

เราใช้สัญลักษณ์ $\vdash$ ที่เรียกว่า "syntactic turnstile" ซึ่งเป็น metasymbol ใช้อธิบายถึงการ derivation นั่นคือ $\rho \vdash \varpi$ หมายถึงการ derivation ได้ W จาก P

<u>ตัวอย่าง 5</u> จาก formal system ในตัวอย่าง 1

*** ◊** O ***** $\vdash$ *** ◊**** O *******

<u>DERIVATION</u>:

1.	*** ◊** O *****	premise
2.	*** ◊*** O ******	1 rule 1
3.	*** ◊**** O *******	2 rule 1

บางครั้งการเขียน $\varpi \vdash \rho$ จะมีความหมายเช่นเดียวกับ $\rho \vdash \varpi$ และการเขียน $x \dashv\vdash y$ จะหมายถึง $x \vdash y$ และ $y \vdash x$ นั่นคือการ derivation ได้ y จาก x และการderivation ได้ x จาก y

การ proof ใน formal system ถือว่าเป็นการ derivation จากทุกชุดของ PREMISE(P) แต่เป็นการ derivation ชนิดพิเศษ คือ เป็น derivation ที่ไม่มีชุดของข้อกำหนด P โดยเราจะเขียนรูปแบบของ theorem โดยใช้ syntactic turnstile ได้เป็น

$\vdash$ * ◊**** O ***** (จากตัวอย่าง 4)

เรื่องที่สำคัญอีกเรื่องหนึ่งก็คือ ความสัมพันธ์ระหว่างการ proof และ derivation นั่นคือ ถ้า $\vdash$ ๗ ใน formal system ,f ,ดังนั้น $\vdash$ ๗ จะอยู่ใน formal system ,f,ซึ่งเป็น formal system ที่รวม axioms และ inference rules ทั้งหมดของ f ,รวมทั้ง Wffs ρ เข้าไว้ด้วย

ดังนั้น การ derivation ใน formal system หนึ่งจะสัมพันธ์กับการ proof ใน formal system อีกตัวหนึ่ง ซึ่งสมบูรณ์กว่า.