บทที่ 7

ออโตมาตากดลง

(Pushdown Automata)

ในบทนี้จะนำเสนอเครื่อง (Machine) หรือตัวแบบ (Model) ที่สามารถใช้นิยามภาษาไม่ปกติ และเป็นเครื่องที่สอดคล้องกับภาษาไม่พึ่งบริบท (Context-free Language (CFL)) โดยเครื่องดังกล่าวนี้มีความคล้ายคลึงกับเอฟเอแต่จะมีความสามารถมากกว่าเพราะประกอบด้วยเซตจำกัดของสถานะและ กองซ้อน (Stack) ที่ใช้เสมือนเป็นหน่วยความจำ เรียกเครื่องหรือตัวแบบนี้ว่าออโตมาตากดลง (Pushdown Automata (PDA))

สำหรับเครื่องพีดีเอ นี้ จะมีการทำงานที่ซับซ้อนขึ้น การทำงานจะขึ้นอยู่กับสถานะ และสัญลักษณ์นำเข้า สำหรับการเดินหรือการทำฟังก์ชันการผ่านของพีดีเออาจทำให้มีการเปลี่ยนแปลงของกองซ้อนเกิดขึ้น

สำหรับการเดินของเครื่องจะถูกกำหนดโดย 3 องค์ประกอบคือ

1. สถานะปัจจุบัน
2. ตัวแปรนำเข้าถัดไป
3. สัญลักษณ์ที่อยู่ตำแหน่งบนสุด (Top) ของกองซ้อน (Stack)

และมีการทำงานที่ประกอบด้วย 2 ส่วนดังนี้

1. การเปลี่ยนแปลงสถานะ (หรืออาจคงที่อยู่สถานะเดิม)
2. การแทนของสัญลักษณ์ของกองซ้อนที่ตำแหน่งบนสุด โดยสายอักขระตั้งแต่ 1 ตัวขึ้นไป

สำหรับการเดินหรือการทำฟังก์ชันการผ่านของเครื่องสามารถทำได้ดังนี้

POP : เป็นการเอาสัญลักษณ์ที่ตำแหน่งบนสุด ของกองซ้อนออกมาคือการแทนที่มันด้วย Λ

PUSH : เป็นการใส่สัญลักษณ์ Y ไปบนกองซ้อน ซึ่งเป็นการแทนที่สัญลักษณ์ X

ที่ตำแหน่งบนสุดของกองซ้อนด้วย YX โดยอ้างว่าด้านซ้ายสุดของสายอักขระคือตำแหน่งบนสุด ของกองซ้อน

REPLACE : เป็นการแทนที่ X ด้วยสายอักขระไม่ว่างหมายถึงทำการ POP แล้ว

ตามด้วยลำดับการ PUSH ตั้งแต่ 1 ครั้งขึ้นไป

สำหรับฟังก์ชันการผ่านของออโตมาตาจำกัดและออโตมาตากดลง จะสามารถพิจารณาโดยเปรียบเทียบกันได้ดังนี้

ฟังก์ชันการของออโตมาตาจำกัดจากนิยามที่ได้กล่าวมาแล้วจะแสดงให้เห็นในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ได้เป็น

$$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$$

แต่สำหรับออโตมาตากดลง จะได้มีการกำหนดฟังก์ชันการผ่านใหม่เป็น

$$\delta : Q \times \Sigma \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma^*$$

โดยที่ Σ คือ ชุดตัวอักษรของสัญลักษณ์รับเข้า และ Γ คือชุดตัวอักษรของสัญลักษณ์ของกองซ้อน (ถ้าเป็นไปได้ควรจะแตกต่างจาก Σ)

สำหรับสถานะ q อักขระนำเข้า a และสัญลักษณ์กองซ้อน X จะสามารถเขียนการทำฟังก์ชันการผ่านได้ดังนี้

$$\delta(q, a, X) = (p, \alpha)$$

ซึ่งหมายถึง จะมีการเดินจากสถานะ q ไปสถานะ p เมื่ออ่านอักขระ a เข้ามาและแทน X ลงบนกองซ้อนด้วยสายอักขระ α ที่ซึ่ง

$$\alpha \in \Gamma^*$$

นอกจากฟังก์ชันการผ่านที่มีการเปลี่ยนแปลงแล้ว ยังมีคุณสมบัติบางประการที่ควรทำความเข้าใจดังนี้คือ

1. จะอธิบายการทำฟังก์ชันการผ่านของกองซ้อนในกรณีที่กองซ้อนว่างได้อย่างไร

$$\delta(q, a, ?)$$

ปัญหานี้หลีกเลี่ยงได้โดยการกำหนดเพิ่มสัญลักษณ์เริ่มต้น Z_0 ซึ่งเป็นสัญลักษณ์พิเศษบนกองซ้อน และเครื่องจะไม่อนุญาตให้ทำการทำฟังก์ชันการผ่านเมื่อกองซ้อนว่าง

(ในกรณีนี้หมายถึงไม่มีสัญลักษณ์ใดอยู่บนกองซ้อนเลยรวมทั้ง Z_0 ด้วย) สัญลักษณ์ Z_0 จะไม่ถูก Pop ออกจากกองซ้อนเลย นั่นคือเมื่อ Z_0 อยู่ที่บนสุดของกองซ้อนมันจะหมายถึงว่าขณะนั้นกองซ้องนั้นเอง

2. ในกรณีที่ต้องการทำฟังก์ชันการผ่าน เพื่อเดินไปสถานะอื่น เมื่อทุกอักขระนำเข้าถูกอ่านหมดแล้ว จะมีการอธิบายการเดินเมื่ออ่านข้อมูลเข้าหมดแล้วได้อย่างไร นั้นคือ

$$\delta(q, ?, X) = ?$$

ปัญหานี้สามารถจัดการได้โดยยอมให้มีการทำฟังก์ชันการผ่านโดยใช้ Λ เป็นข้อมูลนำเข้าเท่านั้น ซึ่งเป็นกรณีเดียวกันกับการทำฟังก์ชันการผ่านโดยใช้ Λ ใน NFA-Λ ดังนั้นฟังก์ชันการผ่านที่ต้องการจะเป็นดังนี้

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\Lambda\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma^*$$

3. อาจจะเกิดสถานการณ์ที่เครื่องพัง (Crash) หรือไม่ยอมรับสายอักขระที่อ่านเข้ามา นั่นคือจะไม่สามารถเดินตามการเดินที่ถูกกำหนดไว้ได้ ในกรณีของออโตมาตาจำกัดเมื่อเกิดกรณีนี้ขึ้นจะมีการตัดสินใจโดยทำให้ $\delta(q, a)$ เป็นเซตย่อยของ Q มากกว่าจะให้มันเป็นเพียงสมาชิกนั่นคือมันสามารถจะมีค่าเป็นเซตว่าง ($\emptyset$) ได้ ในขณะเดียวกันก็จะมีการยอมสำหรับความเป็นไปได้ที่

$\delta(q, a)$ จะรวมเอาสมาชิกใน Q มากกว่า 1 ตัวซึ่งในที่นี้ออโตมาตาจำกัดก็จะกลายเป็นออโตมาตาจำกัดเชิงไม่กำหนดนั่นเอง

ดังนั้นเครื่องออโตมาตากดลง ที่พูดถึงนี้ จะใช้การกระทำเช่นเดียวกันกับวิธีดังกล่าวของออโตมาตาจำกัด โดยการทำฟังก์ชันการผ่าน $\delta(q, a, X)$ และ $\delta(q, \Lambda, X)$ จะต้องได้เป็นเซตจำกัดเสมอ ดังนั้นฟังก์ชันการผ่านจะสามารถกำหนดใหม่ได้เป็น

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\Lambda\}) \times \Gamma \rightarrow \text{เซตจำกัดของ } Q \times \Gamma^*$$

7.1 นิยามออโตมาตากดลง (Definition of A Pushdown Automata)

จากที่ได้กล่าวนำมาแล้วทั้งหมดในตอนต้น จะสามารถนิยามออโตมาตากดลงที่เป็นการนิยามแบบทั่วไปและถือเป็นออโตมาตากดลงเชิงไม่กำหนดได้ดังนิยามต่อไปนี้

หมายเหตุ : สำหรับออโตมาตากดลงเชิงไม่กำหนดในเนื้อหาวิชานี้ จะใช้คำว่า "ออโตมาตากดลง" หรือ พีดีเอ (PDA) โดยจะละคำว่าเชิงไม่กำหนดไว้เพื่อสะดวกต่อการอ้างถึง

<u>บทนิยามที่ 7.1</u>

ออโตมาตากดลง (Pushdown automata) หรือ พีดีเอ(PDA) ประกอบด้วยลำดับของสมาชิก 7 ตัว (7-Tuple) คือ M = $(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, A, \delta)$ ที่ซึ่ง

Q คือ เซตจำกัดของสถานะ

Σ คือ ชุดตัวอักษรของสัญลักษณ์รับเข้า

Γ คือ ชุดตัวอักษรของสัญลักษณ์บนกองซ้อน

q_0 คือ สถานะเริ่มต้น (start state) และเป็นสมาชิกของ Q; $q_0 \in Q$

Z_0 เป็นสัญลักษณ์ของกองซ้อนเริ่มต้น และเป็นสมาชิกของ Γ

A คือ เซตจำกัดของสถานะสิ้นสุด (final state) และอาจจะมีหรือไม่มีก็ได้

$A \subseteq Q$

δ คือ เซตจำกัดของฟังก์ชันการผ่าน (transitions function) ที่จะอธิบายแต่ละสถานะ และแต่ละสัญลักษณ์รับเข้าว่าจะต้องเดินทางไปยังสถานะใดต่อไป

เขียนให้อยู่ในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ได้เป็น

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\Lambda\}) \times \Gamma \rightarrow \text{เซตจำกัดที่เป็นเซตย่อยของ } Q \times \Gamma^*$$

■

สำหรับพีดีเอนี้จะได้นำเอาวิธีการกำหนดโครงแบบหรือกำหนดตำแหน่ง (Configuration) มาช่วยในการแสดงสถานะการทำงาน โดยให้การกำหนดโครงแบบหรือตำแหน่งของพีดีเอ

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, A, \delta)$ จะพิจารณาจาก Triple (q, x, α) โดยที่

$q \in Q$, $x \in \Sigma^*$, และ $\alpha \in \Gamma^*$

จะได้ว่า (q, x, α) เป็นการกำหนดโครงแบบหรือตำแหน่งปัจจุบันของ M นั่นคือ q เป็นสถานะปัจจุบัน x เป็นสายอักขระของข้อมูลนำเข้าที่ยังไม่ถูกอ่านและ α เป็นสัญลักษณ์ของกองซ้อนปัจจุบันโดยที่ปกติที่ตำแหน่งบนสุดของกองซ้อนจะเป็นอักขระซ้ายสุดของ α โดยสามารถกำหนดโครงแบบได้เป็น

$(q, x, \alpha) \vdash (q, y, \beta)$

ซึ่งถือเป็นการเดินหรือการกำหนดโครงแบบของ M เพียงหนึ่งครั้ง โดยสามารถเกิดขึ้นใน 2 ลักษณะ

1. เดินโดยอ่านสัญลักษณ์นำเข้าใน Σ เข้าไป
2. เดินโดยสายอักขระว่าง (Λ-transition)

ในกรณีที่ 1: $x = ay$ สำหรับ $a \in \Sigma$

ในกรณีที่ 2: $x = y$

สามารถเขียนรวมได้เป็น $x = ay$ สำหรับ $a \in \Sigma \cup \{\Lambda\}$ จากทั้ง 2 กรณี สายอักขระ β ของสัญลักษณ์บนกองซ้อนจะได้จาก α (ถ้าพิจารณา $\alpha = X\gamma$ สำหรับ $X \in \Gamma$ และมีบางสายอักขระ $\gamma \in \Gamma^*$ ส่วน $\beta = \xi\gamma$ สำหรับ $\xi \in \Gamma^*$)โดยการแทนสัญลักษณ์อันแรก X ด้วยสายอักขระ ξ และจาก

$(q, \xi) \in \delta(p, a, X)$

(เป็นการเดินของพีดีเอ จากสถานะ p ทำการอ่านอักขระ a โดยสัญลักษณ์บนกองซ้อนในขณะนั้นเป็น X โดยการเดิน จะเดินไปยังสถานะ q และมีการแทนสัญลักษณ์บนกองซ้อนด้วยสายอักขระ ξ)

และสามารถเขียนการกำหนดโครงแบบให้อยู่ในรูปทั่วไปได้เป็น

$(q, x, \alpha) \vdash^* (q, y, \beta)$

จากสัญลักษณ์ข้างต้น จะสามารถนำเอามานิยามการการยอมรับสายอักขระใด ๆ โดยพีดีเอได้ดังนี้

<u>บทนิยามที่ 7.2</u>

ถ้า M = (Q, Σ, Γ, q_0, Z_0, A, δ) เป็นออโตมาตากดลง และ $x \in \Sigma^*$, x จะถูกยอมรับโดย M ถ้า

$$(q_0, x, Z_0) \vdash^* (q, \Lambda, \alpha)$$

สำหรับบาง $\alpha \in \Gamma^*$ และบาง $q \in A$, ภาษา $L \subseteq \Sigma^*$ จะถูกยอมรับโดย M ถ้า L เป็นเซตของสายอักขระที่ถูกยอมรับโดย M นั่นคือ L = L(M)

■

ตัวอย่างที่ 7.1 จงหาพีดีเอที่นิยามภาษาต่อไปนี้

$L = \{xcx^r \mid x \in \{0, 1\}^*\}$

จากออกแบบเพื่อสร้างพีดีเอนั้นจะสามารถทำได้โดยพิจารณาลักษณะของภาษาที่ต้องการออกแบบว่ามีลักษณะอย่างไร คำในภาษาเป็นอย่างไร และจากนิยามของพีดีเอจะทำให้รู้ว่า จะมีกองซ้อนเป็นองค์ประกอบสำคัญอันหนึ่งซึ่งการออกแบบจะต้องใช้ประโยชน์จากกองซ้อนดังกล่าวให้มากที่สุด โดยจะได้พิจารณาแนวทางการออกแบบโดยคร่าวดังนี้

การอ่านสายอักขระเพื่อตรวจสอบโดยพีดีเอนี้จะเหมือนกับเอฟเอคือมีการอ่านจากซ้ายสุดไปขวาสุด ดังนั้นเมื่อพิจารณาคำในภาษา L แล้วจะทำให้รู้ว่าการตรวจสอบจะเกิดจากการเปรียบเทียบกลุ่มของสายอักขระ 2 กลุ่มคือกลุ่มที่อยู่ก่อนหน้า c กับกลุ่มที่อยู่หลัง c ซึ่งการตรวจสอบนี้จะสามารถทำได้ถ้ามีการอ่านสายอักขระเข้ามาเริ่มจากทางซ้ายและทำการเก็บสายอักขระดังกล่าวไว้บนกองซ้อนโดยจะทำการเก็บไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะถึงตัวอักขระตัวสุดท้ายก่อนหน้า c จากนั้นจะทำการอ่าน c เข้ามาโดยไม่เก็บลงบนกองซ้อนเพราะว่า c จะไม่มีการนำมาเปรียบเทียบกับอักขระอื่นถึงขั้นตอนนี้จะได้ว่าอักขระที่จะอ่านต่อไปจะเป็นอักขระตัวเริ่มต้นของกลุ่มที่ 2 ซึ่งจากอักขระนี้ จะไม่มีการเก็บลงบนกองซ้อนเช่นกัน แต่จะมีการนำเอาสายอักขระกลุ่มหลังนี้ ไปเปรียบเทียบกับกลุ่มของสาย

อักขระก่อนหน้า c ที่ถูกเก็บอยู่ในกองซ้อนโดยจะทำการเปรียบเทียบตัวต่อตัวไปเรื่อย ๆ ถ้าทุกตัวที่มีการเปรียบเทียบมีค่าเหมือนกัน (ในความหมายนี้คือสายอักขระก่อนหน้า c ต้องมีความยาวเท่ากับสายอักขระหลัง c นั่นเอง) และสายอักขระที่อ่านเข้ามาถูกอ่านหมด ก็จะได้ว่าสายอักขระถูกยอมรับโดยพีดีเอ

จากแนวคิดและการออกแบบสามารถนำมาสร้างเป็นพีดีเอ $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, A, \delta)$ ได้ดังนี้

$Q = \{ q_0, q_1, q_2 \}$

$\Sigma = \{0, 1, c\}$

$\Gamma = \{ 0, 1, Z_0 \}$

q_0 เป็นสถานะเริ่มต้น

Z_0 เป็นสัญลักษณ์แสดงกองซ้อนว่าง

$A = \{ q_2 \}$

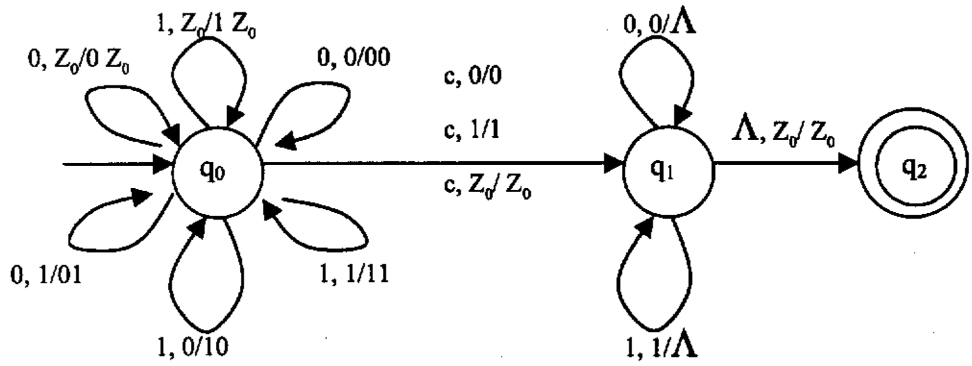
δ สามารถแสดงได้ด้วยตารางการผ่านดังนี้

Move#	State	Input	Stack Symbol	Move (S)
1	q_0	0	Z_0	$(q_0, 0Z_0)$
2	q_0	1	Z_0	$(q_0, 1Z_0)$
3	q_0	0	0	$(q_0, 00)$
4	q_0	1	0	$(q_0, 10)$
5	q_0	0	1	$(q_0, 01)$
6	q_0	1	1	$(q_0, 11)$
7	q_0	c	Z_0	(q_1, Z_0)
8	q_0	c	0	$(q_1, 0)$
9	q_0	c	1	$(q_1, 1)$
10	q_1	0	0	(q_1, Λ)
11	q_1	1	1	(q_1, Λ)
12	q_1	Λ	Z_0	(q_2, Z_0)
All other combinations				none

จากนิยามพีดีเอของภาษา L ข้างต้นสามารถเขียนเป็นแผนภาพการผ่านได้เช่นเดียวกันกับเอฟเอแต่จะมีข้อแตกต่างตรงสัญลักษณ์ที่เขียนบนเส้นเชื่อม โดยสัญลักษณ์ที่เขียนบนเส้นเชื่อมระหว่างสถานะของพีดีเอจะถูกเขียนให้อยู่ในรูปแบบดังนี้

อักขระข้อมูลเข้าใน Σ (อาจเป็น Λ ก็ได้) ที่อ่านเข้าตามด้วยเครื่องหมาย "," ตามด้วยสัญลักษณ์บนกองซ้อนที่ตำแหน่งบนสุด ตามด้วยเครื่องหมาย "/" และตามด้วยสายอักขระของสัญลักษณ์บนกองซ้อนภายหลังการกระทำบนกองซ้อน ในลักษณะใดลักษณะหนึ่ง (Push, Pop หรือ Replace)

ดังนั้นจะสามารถสร้างแผนภาพการผ่านของภาษา L ได้ดังต่อไปนี้



เนื่องจากพีดีเอมีกองซ้อนเข้ามาเกี่ยวข้อง ในบางกรณีอาจมีความจำเป็นที่จะต้องจดจำรายละเอียดในกองซ้อนทั้งหมด โดยไม่ได้จดจำเฉพาะตำแหน่งบนสุดของกองซ้อนเท่านั้น ซึ่งอาจทำให้ไม่สามารถเขียนข้อมูลทั้งหมดลงไปบนเส้นเชื่อมในแผนภาพการผ่านได้หมด เพราะข้อมูลในกองซ้อนอาจมีอยู่จำนวนมาก ในกรณีนี้จะแตกต่างกับเอฟเอที่จะมีการอ่านอักขระเข้ามาทีละตัวและทำการเดินตามเส้นทางที่กำหนดตามอักขระหนึ่งตัวที่อ่านเข้ามาเท่านั้น

จากเหตุผลดังกล่าวนี้ การสร้างหรือนิยามพีดีเอจะใช้การสร้างตารางการผ่านแทนการเขียนแผนภาพการผ่านเพื่อให้เกิดความคล่องตัวและสามารถรองรับการนิยามพีดีเอได้ทั้งหมด

ดังนั้นในการตรวจสอบสายอักขระก็จะพิจารณาจากตารางการผ่านโดยใช้การกำหนดโครงแบบหรือตำแหน่งดังที่ได้กล่าวถึงในนิยามที่ 7.2 มาแล้วและจะได้แสดงตัวอย่างการตรวจสอบสายอักขระในภาษาในตัวอย่างที่ 7.1 ดังนี้

กำหนดให้สายอักขระ x_1 = 01c10 การตรวจสอบโดยการกำหนดโครงแบบหรือตำแหน่งทำได้ดังนี้

$(q_0, 01c10, Z_0) \vdash (q_0, 1c10, 0Z_0)$ (จากการเดินด้วย Move# 1)

$\vdash (q_0, c10, 10Z_0)$ (จากการเดินด้วย Move# 2)

$\vdash (q_1, 10, 10Z_0)$ (จากการเดินด้วย Move# 9)

$\vdash (q_1, 0, 0Z_0)$ (จากการเดินด้วย Move# 11)

$\vdash (q_1, \Lambda, Z_0)$ (จากการเดินด้วย Move# 10)

$\vdash (q_2, \Lambda, Z_0)$ (จากการเดินด้วย Move# 12)

จากผลการเดินดังกล่าว พีดีเอนี้สามารถเดินถึงสถานะยอมรับดังนั้น พีดีเอจะยอมรับสายอักขระดังกล่าว

กำหนดให้สายอักขระ x_2 = 011c101 การตรวจสอบโดยการกำหนดโครงแบบหรือตำแหน่งทำได้ดังนี้

$(q_0, 011c10, Z_0) \vdash (q_0, 11c101, 0Z_0)$ (จากการเดินด้วย Move# 1)

$\vdash (q_0, 1c101, 10Z_0)$ (จากการเดินด้วย Move# 6)

$\vdash (q_1, c101, 110Z_0)$ (จากการเดินด้วย Move# 9)

$\vdash (q_1, 101, 110Z_0)$ (จากการเดินด้วย Move# 11)

$\vdash (q_1, 01, 10Z_0)$ ===> ไม่มีทางเดินต่อนั่นคือเครื่องพัง หรือพีดีเอไม่ยอมรับสายอักขระดังกล่าว

■

ตัวอย่างที่ 7.2 จงหาพีดีเอที่นิยามภาษาต่อไปนี้

$L = \{xx^r \mid x \in \{0, 1\}^*\}$

เมื่อพิจารณาคำในภาษา L แล้วจะทำให้รู้ว่าการตรวจสอบจะเกิดจากการเปรียบเทียบกลุ่มของสายอักขระ 2 กลุ่ม ซึ่งการตรวจสอบนี้จะทำการอ่านสายอักขระเข้ามาเริ่มจากทางซ้ายและทำการเก็บสายอักขระดังกล่าวไว้บนกองซ้อนโดยจะทำการเก็บไปเรื่อยๆ จนกว่าจะถึงตัวอักขระตัวเริ่มต้นของสายอักขระกลุ่มที่ 2 ซึ่งกลุ่มนี้จะไม่มีการเก็บลงบนกองซ้อนแต่จะมีการนำเอากลุ่มหลังนี้ไปเปรียบเทียบกับกลุ่มของสายอักขระก่อนหน้าที่เก็บอยู่ในกองซ้อนโดยจะทำการเปรียบเทียบตัวต่อตัวไปเรื่อย ๆ ถ้าทุกตัวที่มีการเปรียบเทียบมีค่าเหมือนกัน คำถามคือจะทำอย่างไรจึงจะรู้ว่ามันได้มีการอ่านและเก็บสายอักขระกลุ่มแรกหมด และได้อ่านอักขระมาถึงตัวเริ่มต้นของกลุ่มที่ 2 แล้ว คำตอบคือไม่มีใครรู้แต่การทำงานของพีดีเอจะใช้การคาดเดา ซึ่งกรณีนี้จะสามารถทำได้สำหรับกรณีที่พีดีเอเป็นแบบเชิงไม่กำหนด (Non-deterministic Pushdown Automata) และการเดาผิดขณะทำการตรวจสอบถือว่าสามารถเกิดขึ้นได้โดยไม่ถือว่าเป็นความผิด แต่สิ่งที่ต้องทำคือพยายามคาดเดาให้ถูกว่าจุดกึ่งกลางที่น่าจะแบ่งสายอักขระที่จะตรวจสอบอยู่ที่ตำแหน่งใด เพื่อที่จะให้การตรวจสอบและเปรียบเทียบสายอักขระ 2 กลุ่มที่แบ่งเป็นไปอย่างถูกต้อง

สำหรับตัวกลางที่แบ่งสายอักขระในตัวอย่างนี้จะไม่มีตัว c เหมือนตัวอย่างที่ 7.1 แต่จะใช้ Λ และการอ่านผ่านที่จุดกึ่งกลางด้วย Λ ช่วยในการแบ่งกลุ่มของ 2 สายอักขระย่อย

จากแนวคิดและการออกแบบสามารถนำมาสร้างเป็นพีดีเอ $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, A, \delta)$ ได้ดังนี้ $Q = \{ q_0, q_1, q_2 \}$ $\Sigma = \{0, 1\}$

$\Gamma = \{ 0, 1, Z_0 \}$ q_0 เป็นสถานะเริ่มต้น

Z_0 เป็นสัญลักษณ์แสดงกองซ้อนว่าง

$A = \{ q_2 \}$

δ สามารถแสดงได้ด้วยตารางการผ่านดังนี้

Move#	State	Input	Stack Symbol	Move (S)
1	q_0	0	Z_0	$(q_0, 0Z_0)$
2	q_0	1	Z_0	$(q_0, 1Z_0)$
3	q_0	0	0	$(q_0, 00)$
4	q_0	1	0	$(q_0, 10)$
5	q_0	0	1	$(q_0, 01)$
6	q_0	1	1	$(q_0, 11)$
7	q_0	Λ	Z_0	(q_1, Z_0)
8	q_0	Λ	0	$(q_1, 0)$
9	q_0	Λ	1	$(q_1, 1)$
10	q_1	0	0	(q_1, Λ)
11	q_1	1	1	(q_1, Λ)
12	q_1	Λ	Z_0	(q_2, Z_0)
All other combinations				none

ตัวอย่างการตรวจสอบสายอักขระของภาษาที่ยอมรับโดยพีดีเอในตัวอย่างที่ 7.2 กำหนดให้สายอักขระ x = 011110 การตรวจสอบโดยการกำหนดโครงแบบหรือตำแหน่งสำหรับพีดีเอในตัวอย่าง 7.2 สามารถทำได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
(q_0, 011110, Z_0) &\vdash (q_0, 11110, 0Z_0) \\
&\vdash (q_0, 1110, 10Z_0) \\
&\vdash (q_0, \underline{\Lambda}110, 110Z_0) \\
&\vdash (q_1, 110, 110Z_0) \\
&\vdash (q_1, 10, 10Z_0) \\
&\vdash (q_1, 0, 0Z_0)
\end{aligned}
$$

$\vdash (q_1, \Lambda, Z_0)$

$\vdash (q_2, \Lambda, Z_0)$ ===> สามารถเดินถึงสถานะยอมรับดังนั้น พีดีเอจะยอมรับสายอักขระดังกล่าว

■

ตัวอย่างที่ 7.3 จงหาพีดีเอที่นิยามภาษาต่อไปนี้

L = Palindrome = $\{ x \in \{a, b\}^* \mid x = x^r \}$

เมื่อพิจารณาคำในภาษา L แล้วจะทำให้รู้ว่าการตรวจสอบจะเกิดจากการเปรียบเทียบกลุ่มของสายอักขระ 2 กลุ่มเช่นเดียวกับตัวอย่างที่ 7.1 และ 7.2 แต่ความแตกต่างในของภาษานี้คือการพิจารณาว่าตำแหน่งก่อนที่จะถึงอักขระตัวแรกของสายอักขระกลุ่มที่ 2 นั้นอยู่ที่ใดโดยความเป็นไปได้ในการอ่านเพื่อหาตำแหน่งดังกล่าวนี้มี 3 กรณีดังนี้

1. ตำแหน่งที่อ่านนั้นเป็นตำแหน่งของอักขระที่ยังเป็นส่วนของสายอักขระกลุ่มแรก ซึ่งจะต้องทำการอ่านและเก็บต่อไป

2. ตำแหน่งที่อ่านนั้นเป็นตำแหน่งของกึ่งกลาง (กรณีสายอักขระมีความยาวเป็นคี่) สำหรับกรณีนี้จะทำการอ่านผ่านโดยไม่มีการเก็บข้อมูลลงไปในกองซ้อน เพราะว่าตัวอักขระนี้ไม่จำเป็นต้องนำไปเปรียบเทียบกับอักขระอื่น

3. ตำแหน่งที่อ่านนั้นเป็นตำแหน่งของตัวอักขระตัวแรกของสายอักขระกลุ่มที่ 2 (กรณีสายอักขระเป็นมีความยาวเป็น คู่) การอ่านกรณีนี้จะทำการเปรียบเทียบกับอักขระที่เก็บในกองซ้อนที่ตำแหน่งบนสุด และต่อจากนี้ก็จะทำการเปรียบเทียบไปเรื่อย ๆ โดยเปรียบเทียบตัวต่อตัวเฉพาะส่วนที่เหมือนกันเท่านั้นจึงจะทำการเปรียบเทียบต่อ

จากแนวคิดและการออกแบบสามารถนำมาสร้างเป็นพีดีเอ M = $(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, A, \delta)$ ได้ดังนี้

$Q = \{ q_0, q_1, q_2 \}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$\Gamma = \{ a, b, Z_0 \}$

q_0 เป็นสถานะเริ่มต้น

Z_0 เป็นสัญลักษณ์แสดงกองซ้อนว่าง

$A = \{ q_2 \}$

δ สามารถแสดงได้ด้วยตารางการผ่านดังนี้

Move#	State	Input	Stack Symbol	Move (S)
1	q_0	a	Z_0	$(q_0, aZ_0), (q_1, Z_0)$
2	q_0	b	Z_0	$(q_0, bZ_0), (q_1, Z_0)$
3	q_0	a	a	$(q_0, aa), (q_1, a)$
4	q_0	b	a	$(q_0, ba), (q_1, a)$
5	q_0	a	b	$(q_0, ab), (q_1, b)$
6	q_0	b	b	$(q_0, bb), (q_1, b)$
7	q_0	Λ	Z_0	(q_1, Z_0)
8	q_0	Λ	a	(q_1, a)
9	q_0	Λ	b	(q_1, b)
10	q_1	a	a	(q_1, Λ)
11	q_1	b	b	(q_1, Λ)
12	q_1	Λ	Z_0	(q_2, Z_0)
All other combinations				none

■

ในการกำหนดโครงแบบเพื่อพิจารณาตรวจสอบสายอักขระใด ๆ ว่าจะถูกยอมรับโดยพีดีเอหรือไม่นั้น จะมีชนิดของการยอมรับโดยพีดีเอด้วยกัน 2 ลักษณะคือ

1. ยอมรับโดยสถานะสุดท้าย
2. ยอมรับโดยกองซ้อนว่าง

จากบทนิยามที่ 7.2 ถือว่าเป็นการยอมรับของพีดีเอในลักษณะที่ 1

จากตัวอย่างก่อนหน้าโดยเฉพาะตัวอย่างที่ 7.2 และ 7.3 เป็นการนิยามเพื่อสร้างพีดีเอที่เป็นพีดีเอที่สามารถตรวจสอบสายอักขระด้วยการเดินแบบการเดาเส้นทาง ซึ่งพีดีเอที่มีการทำงานในลักษณะนี้จะเรียกว่า ออโตมาตากดลงเชิงไม่กำหนด (Non-deterministic Pushdown Automata (NPDA)) ส่วนออโตมาตากดลงเชิงกำหนด (Deterministic Pushdown Automata (DPDA)) จะสามารถพิจารณาและนิยามได้ในหัวข้อถัดไป

7.2 ออโตมาตากดลงเชิงกำหนด (Deterministic Pushdown Automata (DPDA))

จากตัวอย่างก่อนหน้าโดยเฉพาะตัวอย่างที่ 7.2 และ 7.3 จะเป็นการสร้างพีดีเอและตรวจสอบสายอักขระด้วยการเดินแบบเดาเส้นทางที่จะตรวจสอบ โดยในลักษณะนี้เป็นที่ทราบกันว่าพีดีเอที่สร้างจะเป็นพีดีเอเชิงไม่กำหนด แต่สำหรับการที่จะระบุหรือสร้างพีดีเอให้เป็นเชิงกำหนด (Deterministic Pushdown Automata (DPDA)) นั้นจำเป็นจะต้องมีการกำหนดเงื่อนไขเพิ่มเติมซึ่งจะสามารถอธิบายได้ตามนิยามต่อไปนี้

<u>บทนิยามที่ 7.3</u>

ให้ $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, A, \delta)$ เป็นออโตมาตากดลง, จะสามารถกล่าวว่า M เป็นออโตมาตากดลงเชิงกำหนดได้ถ้าไม่มีโครงแบบ (Configuration) สำหรับ M ที่มีทางเลือกของการเดินมากกว่า 1 หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า

M เป็นออโตมาตากดลงเชิงกำหนดถ้ามันมีความสอดคล้องตามเงื่อนไข 2 ข้อต่อไปนี้

1. สำหรับ q ใดๆ $q \in Q$, a ใด ๆ $a \in \Sigma \cup \{\Lambda\}$ และ X ใดๆ $X \in \Gamma$
   เซตของ $\delta(q, a, X)$ จะมีสมาชิกได้มากที่สุดเพียง 1
2. สำหรับ q ใดๆ $q \in Q$ และ X ใดๆ $X \in \Gamma$
   ถ้า $\delta(q, \Lambda, X) \neq \varnothing$ จะได้ว่า $\delta(q, a, X) = \varnothing$ สำหรับทุกๆ a ที่ $a \in \Sigma$

หมายเหตุ : ภาษา L จะเป็น ภาษาไม่พึ่งบริบทเชิงกำหนด (Deterministic Context-Free Language (DCFL)) ถ้ามีออโตมาตากดลงเชิงกำหนดยอมรับภาษา L ดังกล่าว

■

ตัวอย่างที่ 7.4 จงหาพีดีเอเชิงกำหนดที่นิยามภาษาต่อไปนี้

$L = \{ x \in \{a, b\}^* \mid n_a(x) > n_b(x) \}$

จากตัวอย่างนี้จะพิจารณาสร้างพีดีเอเชิงไม่กำหนดเป็นการเปรียบเทียบให้เห็นก่อนว่ามันสามารถทำได้ค่อนข้างง่ายด้วยการใช้สถานะเพียง 2 สถานะ $\{q_0, q_1\}$ซึ่งวิธีในการสร้างพีดีเอเชิงไม่กำหนดนี้จะทำได้โดยการเก็บอักขระตัวที่อ่าน ณ ปัจจุบันที่มีจำนวนมากกว่าไว้ในกองซ้อนและจะนำเอาตัวตรงข้ามมาหักล้างกับอักขระในกองซ้อนออกไป

การตรวจสอบจะเกิดขึ้นที่สถานะ q_0 จนกระทั่งได้อ่านสายอักขระจนหมดและถ้ามี a เหลืออยู่ในกองซ้อนก็จะทำการอ่านด้วย Λ เพื่อเดินไปยังสถานะยอมรับ q_1

จากแนวคิดและการออกแบบสามารถนำมาสร้างเป็นพีดีเอเชิงไม่กำหนด $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, A, \delta)$ ได้ดังนี้

$Q = \{ q_0, q_1\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$\Gamma = \{ a, b, Z_0 \}$

q_0 เป็นสถานะเริ่มต้น

Z_0 เป็นสัญลักษณ์แสดงกองซ้อนว่าง

$A = \{ q_1 \}$

δ สามารถแสดงได้ด้วยตารางการผ่านดังนี้

Move#	State	Input	Stack Symbol	Move (S)
1	q_0	a	Z_0	(q_0 , aZ_0)
2	q_0	b	Z_0	(q_0 , bZ_0)
3	q_0	a	a	(q_0 , aa)
4	q_0	b	b	(q_0 , bb)
5	q_0	a	b	(q_0 , Λ)
6	q_0	b	a	(q_0 , Λ)
7	q_0	Λ	a	(q_1 , a)
All other combinations				none

การนิยามพีดีเอเชิงไม่กำหนดข้างต้นให้เป็นพีดีเอเชิงกำหนดนั้น จะสามารถทำได้โดยกำหนดกฎเกณฑ์ให้เป็นไปตามบทนิยามที่ 7.3

จากตารางข้างต้นจะเห็นว่าการเดินในข้อที่ 3, 5, และ 7 ทำให้การนิยามไม่เป็นไปตามเงื่อนไขของนิยามพีดีเอเชิงกำหนด เนื่องจากว่า การทำงานจะทำการอ่านเปรียบเทียบโดยอยู่ที่สถานะ q_0 ตลอดเวลา และมันจะทำการเดินไปยังสถานะยอมรับก็ต่อเมื่อมัน

อ่านสายอักขระหมดและจะหยุดการทำงานโดยเดินไปยังสถานะยอมรับ q_1 เมื่อตรวจสอบว่าเหลือ a อยู่ในกองซ้อนเท่านั้น

กรณีนี้จึงเป็นเหตุที่จะทำให้พีดีเอเป็นเชิงไม่กำหนดได้ เพราะว่าจะต้องใช้สถานะ q_0 เป็นสถานะที่จะต้องตัดสินใจทั้ง 2 กรณีคือ การตัดสินใจอ่านต่อ หรือ การตัดสินใจหยุด

สำหรับวิธีปรับปรุงเพื่อให้ได้เป็นพีดีเอเชิงกำหนด จะใช้วิธีการกำหนดให้สถานะปัจจุบันเป็นสถานะที่บ่งชี้ว่า ในขณะนั้นว่ามี a มากกว่า b โดยวิธีนี้จะสามารถหลีกเลี่ยงการเดินด้วย Λ

ดังนั้นพีดีเอเชิงกำหนดที่ต้องการจะสามารถสร้างได้โดยยังคงใช้ 2 สถานะ แต่จะต้องทำการเดินจากสถานะ q_0 ไปยังสถานะยอมรับ q_1 เมื่อมีการอ่าน a และกองซ้อนในขณะนั้นว่าง ในการเดินนี้จะใช้สถานะ q_1 เป็นตัวระบุว่า ณ ขณะนั้นมี a มากกว่า b โดยการเดินด้วยเงื่อนไขนี้จะไม่มีการเปลี่ยนแปลงกองซ้อน สำหรับ a จะถูกใส่ลงบนกองซ้อนก็ต่อเมื่อในขณะนั้นมี a มากกว่า b ซึ่งจะทำโดยไม่มีการเปลี่ยนสถานะ(วนรอบอยู่ที่สถานะ q_1)

เมื่ออยู่ที่สถานะ q_1 กองซ้อนว่างและมีการอ่าน b เข้ามาพีดีเอจะต้องย้ายสถานะจากสถานะ q_1 ไปยังสถานะ q_0 การเดินนี้จะใช้สถานะ q_0 เป็นตัวระบุว่า ณ ขณะนั้นมี b มากกว่า a โดยการเดินด้วยเงื่อนไขนี้จะไม่มีการเปลี่ยนแปลงกองซ้อน สำหรับ b จะถูกใส่ลงบนกองซ้อนก็ต่อเมื่อในขณะนั้นมี b มากกว่า a ซึ่งจะทำโดยไม่มีการเปลี่ยนสถานะ(วนรอบอยู่ที่สถานะ q_0)

จากแนวคิดและการออกแบบสามารถนำมาสร้างเป็นพีดีเอเชิงกำหนด

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, A, \delta_1)$ ได้ดังนี้

$Q = \{ q_0, q_1\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$\Gamma = \{ a, b, Z_0 \}$

q_0 เป็นสถานะเริ่มต้น

Z_0 เป็นสัญลักษณ์แสดงกองซ้อนว่าง

$A = \{ q_1 \}$

δ_1 สามารถแสดงได้ด้วยตารางการผ่านดังนี้

Move#	State	Input	Stack Symbol	Move
1	q_0	a	Z_0	(q_1 , Z_0)
2	q_0	b	Z_0	(q_0 , bZ_0)
3	q_0	a	b	(q_0 , Λ)
4	q_0	b	b	(q_0 , bb)
5	q_1	a	Z_0	(q_1 , aZ_0)
6	q_1	b	Z_0	(q_0 , Z_0)
7	q_1	a	a	(q_1 , aa)
8	q_1	b	a	(q_1 , Λ)
All other combinations				none

■

จากการศึกษาพีดีเอเชิงกำหนดทำให้ทราบว่าจะไม่สามารถสร้างพีดีเอเชิงกำหนดเพื่อนิยามภาษา Palindrome ได้ซึ่งสรุปได้เป็นทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 7.1

ภาษา PAL = $\{x \in \{a,b\}^* \mid x = x^r\}$ ไม่สามารถถูกยอมรับโดย ออโตมาตากดลงเชิงกำหนด

■

7.3 ออโตมาตากดลงที่สอดคล้องกับไวยากรณ์ไม่พึ่งบริบทที่ให้มา

(A Pushdown Automata corresponding to a given Context-Free Grammar)

การสร้างพีดีเอในหัวข้อก่อนหน้าทั้งหมด ทำได้โดยการพิจารณาจากคุณสมบัติง่าย ๆ ของสายอักขระที่จะทำการตรวจสอบ ในแต่ละกรณีจะเห็นว่ามันจะมีคุณสมบัติความสมมาตร (Symmetry) อย่างชัดเจน ซึ่งจะเป็นตัวช่วยให้การเปรียบเทียบระหว่างสัญลักษณ์ข้อมูลที่อ่านเข้ามากับสัญลักษณ์ก่อนหน้าที่เก็บอยู่ในกองซ้อนได้ง่าย

ถ้าจะพิจารณาภาษาทั่ว ๆ ไปแล้วการสร้างซีเอฟจีเพื่อนิยามภาษาจะทำได้ค่อนข้างง่ายกว่าที่จะสร้างพีดีเอโดยตรงดังนั้นในหัวข้อนี้จะได้แสดงขั้นตอนวิธีการสร้างพีดีเอจากซีเอฟจีที่ให้มา ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

หมายเหตุ : ในหัวข้อนี้จะขอกล่าวถึงทฤษฎีบทโดยไม่มีการพิสูจน์ให้เห็น แต่จะนำเอาบางส่วนที่สำคัญในทฤษฎีซึ่งเป็นส่วนที่เกี่ยวข้องกับ ขั้นตอนการแปลงจากพีดีเอไปซีเอฟจีเท่านั้น

<u>ทฤษฎีบทที่ 7.2</u>

ให้ $G = (V, \Sigma, S, P)$ เป็นไวยากรณ์ไม่พึ่งบริบท จากนั้นจะมีออโตมาตากดลง M ที่ทำให้

$L(M) = L(G)$

■

ขั้นตอนในการแปลงจากซีเอฟจีไปเป็นพีดีเอ

ในส่วนการสร้างพีดีเอจีจากซีเอฟจะมีขั้นตอนในการแปลงโดยนำเอาบางส่วนที่สำคัญในทฤษฎีบทมาใช้ดังนี้

กำหนดให้พีดีเอ $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, A, \delta)$ ซึ่งจะสร้างโดยการแปลงจากซีเอฟจี

$G = (V, \Sigma, S, P)$ ได้ดังนี้

$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$

$\Gamma = V \cup \Sigma \cup \{Z_0\}$ โดยที่ $Z_0 \notin V \cup \Sigma$

$A = \{q_2\}$

δ สามารถสร้างได้ใน 4 รูปแบบดังนี้

(1) $\delta(q_0, \Lambda, Z_0) = \{(q_1, SZ_0)\}$

(2) สำหรับทุกๆ $A \in V$, $\delta(q_1, \Lambda, A) = \{(q_1, \alpha) \mid A \rightarrow \alpha$ เป็นการผลิตใน $G\}$

(3) สำหรับทุกๆ $a \in \Sigma$, $\delta(q_1, a, a) = \{(q_1, \Lambda)\}$

(4) $\delta(q_1, \Lambda, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$

ตัวอย่างที่ 7.5

ให้ $L = \{ x \in \{a, b\}^* \mid n_a(x) > n_b(x) \}$ โดยสามารถนิยามได้ด้วยซีเอฟจีต่อไปนี้

$G = (V, \Sigma, S, P)$

$V = \{S\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

S ตัวแปรเริ่มต้น

$P = \{ S \rightarrow a \mid aS \mid bSS \mid SSb \mid SbS \}$

จงแปลงซีเอฟจีดังกล่าวไปเป็นพีดีเอ

จะแปลงซีเอฟจี G ไปเป็นพีดีเอ $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, A, \delta)$ ได้ดังนี้

ให้ $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$\Gamma = \{S, a, b, Z_0\}$,

q_0 เป็นสถานะเริ่มต้น

Z_0 เป็นสัญลักษณ์แสดงกองซ้อนว่าง

$A = \{q_2\}$

δ เป็นฟังก์ชันการผ่านแสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

สร้างตารางการผ่าน

Move#	State	Input	Stack Symbol	Move (S)
1 (1)	q_0	Λ	Z_0	(q_1, SZ_0)
2 (2)	q_1	Λ	S	(q_1, a), (q_1, aS), (q_1, bSS), (q_1, SSb), (q_1, SbS)
3 (3)	q_1	a	a	(q_1, Λ)
4 (3)	q_1	b	b	(q_1, Λ)
5 (4)	q_1	Λ	Z_0	(q_2, Z_0)
All other combinations				None

หมายเหตุ : ตัวเลขในวงเล็บที่สดมภ์หมายเลขการเดินจะใช้ระบุถึงรูปแบบที่นำมาใช้จากขั้นตอนการแปลง

การทดสอบการทำงานของพีดีเอที่นิยามภาษา L ดังกล่าว

การตรวจสอบว่า x_1 = abbaaaba $\in$ L หรือไม่

$$
\begin{aligned}
(q_0, abbaaaba, Z_0) &\vdash (q_1, abbaaaba, SZ_0) \\
&\vdash (q_1, abbaaaba, SbSZ_0) \\
&\vdash (q_1, \underline{a}bbaaaba, \underline{a}SbSZ_0) \\
&\vdash (q_1, bbaaaba, SbSZ_0) \\
&\vdash (q_1, \underline{b}aaaba, \underline{b}SSbSZ_0) \\
&\vdash (q_1, baaaba, SSbSZ_0) \\
&\vdash (q_1, \underline{b}aaaba, \underline{b}SSSbSZ_0) \\
&\vdash (q_1, aaaba, SSSbSZ_0) \\
&\vdash (q_1, \underline{a}aaba, \underline{a}SSbSZ_0) \\
&\vdash (q_1, aaba, SSbSZ_0) \\
&\vdash (q_1, \underline{a}aba, \underline{a}SbSZ_0)
\end{aligned}
$$

$\vdash (q_1 , aba , SbSZ_0)$

$\vdash (q_1 , \underline{a}ba , \underline{a}bSZ_0)$

$\vdash (q_1 , ba , bSZ_0)$

$\vdash (q_1 , \underline{b}a , \underline{b}SZ_0)$

$\vdash (q_1 , a , SZ_0)$

$\vdash (q_1 , \underline{a} , \underline{a}Z_0)$

$\vdash (q_1 , \Lambda, Z_0)$

$\vdash (q_2 , \Lambda, Z_0)$ ยอมรับ

<u>การตรวจสอบว่า x_2 = abbaaabbba $\in L_3$ หรือไม่</u>

$(q_0 , abbaaabbba , Z_0) \vdash (q_1 , abbaaabbba , SZ_0)$

$\vdash (q_1 , abbaaabbba , SbSZ_0)$

$\vdash (q_1 , abbaaabbba , SSbbSZ_0)$

$\vdash (q_1 , \underline{a}bbaaabbba , \underline{a}SbbSZ_0)$

$\vdash (q_1 , bbaaabbba , SbbSZ_0)$

$\vdash (q_1 , \underline{b}baaabbba , \underline{b}SSbbSZ_0)$

$\vdash (q_1 , baaabbba , SSbbSZ_0)$

$\vdash (q_1 , \underline{b}aaabbba , \underline{b}SSSbbSZ_0)$

$\vdash (q_1 , aaabbba , SSSbbSZ_0)$

$\vdash (q_1 , \underline{a}aabbba , \underline{a}SSbbSZ_0)$

$\vdash (q_1 , aabbba , SSbbSZ_0)$

$\vdash (q_1 , \underline{a}abbba , \underline{a}SbbSZ_0)$

$\vdash (q_1 , abbba , SbbSZ_0)$

$\vdash (q_1 , \underline{a}bbba , \underline{a}bbSZ_0)$

$\vdash (q_1 , bbba , bbSZ_0)$

$\vdash (q_1, \underline{b}bba, \underline{b}bSZ_0)$

$\vdash (q_1, bba, bSZ_0)$

$\vdash (q_1, \underline{b}ba, \underline{b}SZ_0)$

$\vdash (q_1, ba, SZ_0)$

$\vdash (q_1, \underline{b}a, \underline{b}SSZ_0)$

$\vdash (q_1, a, SSZ_0)$

$\vdash (q_1, \underline{a}, \underline{a}SZ_0)$

$\vdash (q_1, \Lambda, SZ_0)$ ไม่ยอมรับ

■

ตัวอย่างที่ 7.6

จงหา พีดีเอ ของภาษา L ต่อไปนี้

$L = \{x \in \{a, b\}^* \mid n_a(x) \geq n_b(x)\}$

L สามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณีคือ

L_1 กรณี $n_a(x) > n_b(x)$ ซึ่ง CFG ของ L_1 คือ

$A \rightarrow a \mid aA \mid bAA \mid AbA \mid Aab$

L_2 กรณี $n_a(x) = n_b(x)$ ซึ่ง CFG ของ L_2 คือ

$B \rightarrow \Lambda \mid aBb \mid bBa \mid BB$

$\therefore$ CFG ของ L จะนิยามได้ดังนี้คือ

$G = (V, \Sigma, S, P)$

$V = \{S, A, B\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

S ตัวแปรเริ่มต้น

$P = \{S \rightarrow A \mid B$

$A \rightarrow a \mid aA \mid bAA \mid AbA \mid AAb$

$B \rightarrow \Lambda \mid aBb \mid bBa \mid BB\}$

จะแปลงซีเอฟจี G ไปเป็นพีดีเอ M = (Q, Σ, Γ, q_0, Z_0, A, δ) ได้ดังนี้

ให้ Q = $\{q_0, q_1, q_2\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$\Gamma = \{S, A, B, a, b, Z_0\}$,

q_0 เป็นสถานะเริ่มต้น

Z_0 เป็นสัญลักษณ์แสดงกองซ้อนว่าง

A = $\{q_2\}$

δ เป็นฟังก์ชันการผ่านแสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

สร้างตารางการผ่าน

Move#	State	Input	Stack Symbol	Move (S)
1 (1)	q_0	Λ	Z_0	(q_1, SZ_0)
2 (2)	q_1	Λ	S	(q_1, A), (q_1, B)
3 (2)	q_1	Λ	A	(q_1, a), (q_1, aA), (q_1, bAA), (q_1, AbA), (q_1, AAb)
4 (2)	q_1	Λ	B	(q_1, Λ), (q_1, aBb), (q_1, bBa), (q_1, BB)
5 (3)	q_1	a	a	(q_1, Λ)
6 (3)	q_1	b	b	(q_1, Λ)
7 (4)	q_1	Λ	Z_0	(q_2, Z_0)
All other combinations				None

การทดสอบการทำงานของพีดีเอที่นิยามภาษา L ดังกล่าว โดยให้ x = **aabbbaaaa**

$$
\begin{aligned}
(q_0, \text{aabbbaaaa}, Z_0) &\vdash (q_1, \text{aabbbaaaa}, SZ_0) \\
&\vdash (q_1, \text{aabbbaaaa}, AZ_0) \\
&\vdash (q_1, \underline{\text{a}}\text{abbbaaaa}, \underline{\text{a}}AZ_0) \\
&\vdash (q_1, \text{abbbaaaa}, AZ_0) \\
&\vdash (q_1, \underline{\text{a}}\text{bbbaaaa}, \underline{\text{a}}AZ_0) \\
&\vdash (q_1, \text{bbbaaaa}, AZ_0) \\
&\vdash (q_1, \underline{\text{b}}\text{bbaaaa}, \underline{\text{b}}AAZ_0) \\
&\vdash (q_1, \text{bbaaaa}, AAZ_0) \\
&\vdash (q_1, \underline{\text{b}}\text{baaaa}, \underline{\text{b}}AAAZ_0) \\
&\vdash (q_1, \text{baaaa}, AAAZ_0) \\
&\vdash (q_1, \underline{\text{b}}\text{aaaa}, \underline{\text{b}}AAAAZ_0) \\
&\vdash (q_1, \text{aaaa}, AAAAZ_0) \\
&\vdash (q_1, \underline{\text{a}}\text{aaa}, \underline{\text{a}}AAAZ_0) \\
&\vdash (q_1, \text{aaa}, AAAZ_0) \\
&\vdash (q_1, \underline{\text{a}}\text{aa}, \underline{\text{a}}AAZ_0) \\
&\vdash (q_1, \text{aa}, AAZ_0) \\
&\vdash (q_1, \underline{\text{a}}\text{a}, \underline{\text{a}}AZ_0) \\
&\vdash (q_1, \text{a}, AZ_0) \\
&\vdash (q_1, \underline{\text{a}}, \underline{\text{a}}Z_0) \\
&\vdash (q_1, \Lambda, Z_0) \\
&\vdash (q_2, \Lambda, Z_0) \qquad \text{ยอมรับ}
\end{aligned}
$$

■

ตัวอย่างที่ 7.7

จงหาพีดีเอ ของภาษา L ต่อไปนี้

$$L = ((001 + 100) + (11)^{*})^{*}$$

CFG ของ L จะนิยามได้ดังนี้คือ

$G = (V, \Sigma, S, P)$

$V = \{S, A, B, C\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

S ตัวแปรเริ่มต้น

$$
\begin{aligned}
P = \{\, & S \rightarrow SX \mid \Lambda \\
& X \rightarrow A \mid B \\
& A \rightarrow 001 \mid 100 \\
& B \rightarrow CB \mid \Lambda \\
& C \rightarrow 11 \,\}
\end{aligned}
$$

จะแปลงซีเอฟจี G ไปเป็นพีดีเอ $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, A, \delta)$ ได้ดังนี้

ให้ $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$\Gamma = \{S, A, B, C, a, b, Z_0\}$,

q_0 เป็นสถานะเริ่มต้น

Z_0 เป็นสัญลักษณ์แสดงกองซ้อนว่าง

$A = \{q_2\}$

δ เป็นฟังก์ชันการผ่านแสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

สร้างตารางการผ่าน

Move#	State	Input	Stack Symbol	Move (S)
1 (1)	q_0	Λ	Z_0	(q_1, SZ_0)
2 (2)	q_1	Λ	S	$(q_1, SX), (q_1, \Lambda)$
3 (2)	q_1	Λ	X	$(q_1, A), (q_1, B)$
4 (2)	q_1	Λ	A	$(q_1, 001), (q_1, 100)$
5 (2)	q_1	Λ	B	$(q_1, 11B), (q_1, \Lambda)$
6 (2)	q_1	Λ	C	$(q_1, 11)$
7 (3)	q_1	0	0	(q_1, Λ)
8 (3)	q_1	1	1	(q_1, Λ)
9 (4)	q_1	Λ	Z_0	(q_2, Z_0)
All other combinations				None

การทดสอบการทำงานของพีดีเอที่นิยามภาษา L ดังกล่าว โดยให้

x = 10011

$$
\begin{aligned}
(q_0, 10011, Z_0) &\vdash (q_1, 10011, SZ_0) \\
&\vdash (q_1, 10011, SXZ_0) \\
&\vdash (q_1, 10011, SXXZ_0) \\
&\vdash (q_1, 10011, XXZ_0) \\
&\vdash (q_1, \underline{1}0011, \underline{1}00XZ_0) \\
&\vdash (q_1, 0011, 00XZ_0) \\
&\vdash (q_1, \underline{0}011, \underline{0}0XZ_0) \\
&\vdash (q_1, 011, 0XZ_0) \\
&\vdash (q_1, \underline{0}11, \underline{0}XZ_0) \\
&\vdash (q_1, 11, XZ_0) \\
&\vdash (q_1, \underline{1}1, \underline{1}1Z_0)
\end{aligned}
$$

$\vdash (q_1, 1, 1Z_0)$

$\vdash (q_1, \underline{1}, \underline{1}Z_0)$

$\vdash (q_1, \Lambda, Z_0)$

$\vdash (q_2, \Lambda, Z_0)$ ยอมรับ

■

ตัวอย่างที่ 7.8

$L = \{a^i b^j c^k d^i \mid 0 \leq j \leq k \leq 3j, i > 0\}$

จงหาพีดีเอ ที่ยอมรับภาษาดังกล่าว

วิธีทำ

CFG ของ L สามารถแบ่งได้เป็น 3 กรณี ได้แก่

กรณี $i > 0$

$L_1 = \{a^i \mid i > 0\}$

$\therefore$ CFG ของ L_1 คือ

$A \rightarrow aA \mid a$

กรณี $0 \leq j \leq k \leq 3j$

$L_2 = \{b^j c^k \mid 0 \leq j \leq k \leq 3j\}$

$\therefore$ CFG ของ L_2 คือ

$B \rightarrow bBc \mid bBcc \mid bBccc \mid \Lambda$

กรณี $j \geq 0$

$L_3 = \{d^i \mid j \geq 0\}$

$\therefore$ CFG ของ L_3 คือ

$C \rightarrow dC \mid \Lambda$

$\therefore$ CFG ของ L_6 คือ ($L_1 L_2 L_3$)

$S \rightarrow ABC$

$A \rightarrow aA \mid a$

$B \rightarrow bBc \mid bBcc \mid bBccc \mid \Lambda$

$C \rightarrow dC \mid \Lambda$

สรุป CFG ของ L จะนิยามได้ดังนี้คือ

$G = (V, \Sigma, S, P)$

$V = \{S, A, B, C\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

S ตัวแปรเริ่มต้น

$P = \{ S \rightarrow ABC$

$A \rightarrow aA \mid a$

$B \rightarrow bBc \mid bBcc \mid bBccc \mid \Lambda$

$C \rightarrow dC \mid \Lambda\}$

จะแปลงซีเอฟจี G ไปเป็นพีดีเอ $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, A, \delta)$ ได้ดังนี้

ให้ $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$\Gamma = \{S, A, B, C, a, b, c, d, Z_0\}$,

q_0 เป็นสถานะเริ่มต้น

Z_0 เป็นสัญลักษณ์แสดงกองซ้อนว่าง

$A = \{q_2\}$

δ เป็นฟังก์ชันการผ่านแสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

สร้างตารางการผ่าน

Move#	State	Input	Stack Symbol	Move (S)
1 (1)	q_0	Λ	Z_0	(q_1 , SZ_0)
2 (2)	q_1	Λ	S	(q_1 , ABC)
3 (2)	q_1	Λ	A	(q_1 , aA) , (q_1 , a)
4 (2)	q_1	Λ	B	(q_1 , bBc) , $(q_1 , bBcc)$, $(q_1 , bBccc)$, (q_1 , Λ)
5 (2)	q_1	Λ	C	(q_1 , dC) , (q_1 , Λ)
7 (3)	q_1	a	a	(q_1 , Λ)
8 (3)	q_1	b	b	(q_1 , Λ)
9 (3)	q_1	c	c	(q_1 , Λ)
10 (3)	q_1	d	d	(q_1 , Λ)
11 (4)	q_1	Λ	Z_0	(q_2 , Z_0)
All other combinations				None

การทดสอบการทำงานของพีดีเอที่นิยามภาษา L ดังกล่าว โดยให้ x = abccdd

$(q_0 , abccdd , Z_0)$ $\vdash$ $(q_1 , abccdd , SZ_0)$

$\vdash$ $(q_1 , abccdd , ABCZ_0)$

$\vdash$ $(q_1 , \underline{a}bccdd , \underline{a}BCZ_0)$

$\vdash$ $(q_1 , bccdd , BCZ_0)$

$\vdash$ $(q_1 , \underline{b}ccdd , \underline{b}BccCZ_0)$

$\vdash$ $(q_1 , ccdd , BccCZ_0)$

$\vdash$ $(q_1 , \underline{c}cdd , \underline{c}cCZ_0)$

$\vdash (q_1, \underline{c}dd, \underline{c}CZ_0)$

$\vdash (q_1, dd, CZ_0)$

$\vdash (q_1, \underline{d}d, \underline{d}CZ_0)$

$\vdash (q_1, d, CZ_0)$

$\vdash (q_1, \underline{d}, \underline{d}CZ_0)$

$\vdash (q_1, \Lambda, \Lambda Z_0)$

$\vdash (q_2, \Lambda, Z_0)$ ยอมรับ

■

7.4 ไวยากรณ์ไม่พึ่งบริบทที่สอดคล้องกับออโตมาตากดลงที่ให้มา (A Context-Free Grammar corresponding to a given Pushdown Automata)

จากหัวข้อที่ผ่านมาจะได้เห็นวิธีการสร้างพีดีเอเชิงไม่กำหนดจากซีเอฟจีที่ให้มา สำหรับในหัวข้อนี้จะได้พิจารณาในทางตรงข้ามคือจะทำการสร้างซีเอฟจีจากพีดีเอที่ให้มา โดยจะอ้างถึงทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องดังต่อไปนี้

หมายเหตุ : เช่นเดียวกันสำหรับในหัวข้อนี้จะขอกล่าวถึงทฤษฎีบทโดยไม่มีการพิสูจน์ให้เห็น แต่จะนำเอาบางส่วนที่สำคัญในทฤษฎีซึ่งเป็นส่วนที่เกี่ยวข้องกับขั้นตอนการแปลงจากพีดีเอไปซีเอฟจีเท่านั้น

<u>ทฤษฎีบทที่ 7.3</u>

ถ้า $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, A, \delta)$ เป็นออโตมาตากดลงที่ยอมรับภาษา $L \subseteq \Sigma^*$ จะได้ว่า จะมีออโตมาตากดลงอีกอันให้ชื่อว่า M_1 โดย $M_1 = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, q_1, Z_1, A_1, \delta_1)$ ซึ่งยอมรับในสายอักขระ x ใดๆ โดย $x \in L$ ก็ต่อเมื่อ

$(q_1, x, Z_1) \vdash^* (q, \Lambda, \Lambda)$ สำหรับบางสถานะ $q \in Q_1$

(การยอมรับของออโตมาตากดลง M1 ถือเป็นการยอมรับแบบกองซ้อนว่าง)

■

จากทฤษฎีบทนี้จะเห็นว่าการตรวจสอบการยอมรับโดยกองซ้อนว่างจะต้องมีการ Pop เอาสัญลักษณ์บนกองซ้อนออกมาทั้งหมดซึ่งจะรวมไปถึงสัญลักษณ์ของกองซ้อนว่างด้วยโดยในกรณีนี้จะยอมให้มีการ Pop สัญลักษณ์ของกองซ้อนว่างถ้าจะสร้างพีดีเอที่มีการยอมรับแบบกองซ้อนว่างเท่านั้น

<u>ทฤษฎีบทที่ 7.4</u>

ให้ $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, A, \delta)$ เป็นออโตมาตากดลงที่ยอมรับภาษา L โดยกองซ้อนว่าง นั่นคือ $L = L_e(M)$ จากนั้นจะมี ไวยากรณ์ไม่พึ่งบริบท G ที่ $L(G) = L$

■

ขั้นตอนในการแปลงจากพีดีเอไปเป็นซีเอฟจี

ในส่วนการสร้างซีเอฟจีจากพีดีเอจะมีขั้นตอนในการแปลงโดยนำเอาบางส่วนที่สำคัญในทฤษฎีบทมาใช้ดังนี้

กำหนดให้พีดีเอ M = $(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, A, \delta)$ จะสามารถสร้างซีเอฟจี G จากพีดีเอดังกล่าวได้ตามขั้นตอนการแปลงดังนี้

จะได้ซีเอฟจี G = (V, Σ, S, P) โดยที่

$V = \{S\} \cup \{[p, A, q] \mid A \in \Gamma$, p และ $q \in Q\}$

เซตของ P จะประกอบด้วยการผลิต 3 รูปแบบต่อไปนี้เท่านั้น

(1) ทุก ๆ $q \in Q$, การผลิต $S \rightarrow [q_0, Z_0, q]$ จะอยู่ใน P

(2) ทุก ๆ q และ $q_1 \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\Lambda\}$, $A \in \Gamma$ ถ้า $\delta(q, a, A)$ ได้ (q_1, Λ) $[q, A, q_1] \rightarrow$ a อยู่ใน P

(3) สำหรับทุกๆ q และ $q_1 \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\Lambda\}$, $A \in \Gamma$ และ $m \geq 1$ถ้า δ (q, a, A) ได้ $(q_1, B_1B_2...B_m)$ สำหรับ $B_1, B_2, \ldots,$ และ $B_m \in \Gamma$ จะได้ว่าทุกๆ ทางเลือกของ $q_2, q_3, \ldots,$และ $q_{m+1} \in Q$ โดยมีการผลิต

$[q, A, q_{m+1}] \rightarrow a[q_1, B_1, q_2][q_2, B_2, q_3]\ldots[q_m, B_m, q_{m+1}]$ อยู่ใน P

ตัวอย่างที่ 7.9

กำหนดให้ภาษา $L = \{xcx^r \mid x \in \{a,b\}^*\}$ จงหา ซีเอฟจีที่นิยามภาษาดังกล่าว

จากภาษานี้จะเห็นว่าเป็นภาษาที่คล้ายกับภาษาในตัวอย่าง 7.1 แต่ในตัวอย่างนี้จะได้ทำการแสดงการหาซีเอฟจีโดยแปลงมาจากพีดีเอที่มีอยู่

สำหรับพีดีเอของภาษานี้จะทำการสร้างใหม่เพื่อให้พีดีเอดังกล่าวมีการยอมรับแบบกองซ้อนว่างโดยจะสามารถสร้างได้ดังนี้

พีดีเอ M = $(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, A, \delta)$ โดยที่จะใช้สัญลักษณ์บนกองซ้อนเป็นอักษรตัวใหญ่ทั้งหมดและจะได้

$Q = \{q_0, q_1\}$

$\Sigma = \{a, b, c\}$

Γ = { A, B, Z_0 }

q_0 เป็นสถานะเริ่มต้น

Z_0 เป็นสัญลักษณ์แสดงกองซ้อนว่าง

A = { q_1 }

δ สามารถแสดงได้ด้วยตารางการผ่านดังนี้

Move#	State	Input	Stack Symbol	Move (S)
1	q_0	a	Z_0	(q_0, AZ_0)
2	q_0	b	Z_0	(q_0, AZ_0)
3	q_0	a	A	(q_0, AA)
4	q_0	b	A	(q_0, BA)
5	q_0	a	B	(q_0, AB)
6	q_0	b	B	(q_0, BB)
7	q_0	c	Z_0	(q_1, Z_0)
8	q_0	c	A	(q_1, A)
9	q_0	c	B	(q_1, B)
10	q_1	a	A	(q_1, Λ)
11	q_1	b	B	(q_1, Λ)
12	q_1	Λ	Z_0	(q_2, Λ)
All other combinations				none

จากนั้นจะทำการแปลงไปเป็นซีเอฟจีโดยใช้ทฤษฎี 7.4 และขั้นตอนการแปลงจากส่วนการพิสูจน์ที่อ้างถึงได้ดังนี้

โดยจะได้ซีเอฟจี G = (V, Σ, S, P) โดยที่

V = {S, $[q_0, Z_0, q_0]$, $[q_0, A, q_0]$, $[q_0, B, q_0]$, $[q_0, Z_0, q_1]$, $[q_0, A, q_1]$, $[q_0, B, q_1]$, $[q_1, Z_0, q_0]$, $[q_1, A, q_0]$, $[q_1, B, q_0]$, $[q_1, Z_0, q_1]$, $[q_1, A, q_1]$, $[q_1, B, q_1]$}

$\Sigma = \{a, b\}$

S เป็นตัวแปรเริ่มต้น

P เป็นการผลิตที่ได้จากการแปลงในแต่ละรูปแบบดังนี้

รูปแบบที่ (1) ประกอบด้วย (สำหรับทุก ๆ $q \in Q$, การผลิต $S \rightarrow [q_0, Z_0, q]$ จะอยู่ใน P)

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ S \rightarrow [q_0, Z_0, q_0] \\ 2.\ S \rightarrow [q_0, Z_0, q_1] \end{array}\right\} \text{(กำหนดการผลิตเริ่มต้น)}$$

รูปแบบที่ (2) ประกอบด้วย (สำหรับทุก ๆ q และ $q_1 \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\Lambda\}$, $A \in \Gamma$ ถ้า $\delta(q, a, A)$ ได้ (q_1, Λ) การผลิต $[q, A, q_1] \rightarrow a$ อยู่ใน P)

3. $[q_1, A, q_1] \rightarrow a$ (จากการเดินข้อ 10)
4. $[q_1, B, q_1] \rightarrow b$ (จากการเดินข้อ 11)
5. $[q_1, Z_0, q_1] \rightarrow \Lambda$ (จากการเดินข้อ 12)

รูปแบบที่ (3) ประกอบด้วย (สำหรับทุกๆ q และ $q_1 \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\Lambda\}$, $A \in \Gamma$ และ $M \geq 1$ ถ้า $\delta(q, a, A)$ ได้ $(q_1, B_1B_2...B_m)$ สำหรับ $B_1, B_2, ...,$ และ $B_m \in \Gamma$ จะได้ว่าทุกๆ ทางเลือกของ $q_2, q_3, ...,$ และ $q_{m+1} \in Q$ โดยมีการผลิต $[q, A, q_{m+1}] \rightarrow a[q_1, B_1, q_2][q_2, B_2, q_3]...[q_m, B_m, q_{m+1}]$ อยู่ใน P)

$$\left.\begin{array}{l} 6.\ [q_0, Z_0, q_0] \rightarrow a[q_0, A, q_0]\ [q_0, Z_0, q_0] \\ 7.\ [q_0, Z_0, q_0] \rightarrow a[q_0, A, q_1]\ [q_1, Z_0, q_0] \\ 8.\ [q_0, Z_0, q_1] \rightarrow a[q_0, A, q_0]\ [q_0, Z_0, q_1] \\ 9.\ [q_0, Z_0, q_1] \rightarrow a[q_0, A, q_1]\ [q_1, Z_0, q_1] \end{array}\right\} \text{(จากการเดินข้อ 1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} 10.\ [q_0, Z_0, q_0] \rightarrow b[q_0, B, q_0]\ [q_0, Z_0, q_0] \\ 11.\ [q_0, Z_0, q_0] \rightarrow b[q_0, B, q_1]\ [q_1, Z_0, q_0] \\ 12.\ [q_0, Z_0, q_1] \rightarrow b[q_0, B, q_0]\ [q_0, Z_0, q_1] \\ 13.\ [q_0, Z_0, q_1] \rightarrow b[q_0, B, q_1]\ [q_1, Z_0, q_1] \end{array}\right\} \text{(จากการเดินข้อ 2)}$$

14. $[q_0, A, q_0] \rightarrow a[q_0, A, q_0]\ [q_0, A, q_0]$
15. $[q_0, A, q_0] \rightarrow a[q_0, A, q_1]\ [q_1, A, q_0]$
16. $[q_0, A, q_1] \rightarrow a[q_0, A, q_0]\ [q_0, A, q_1]$ (จากการเดินข้อ 3)
17. $[q_0, A, q_1] \rightarrow a[q_0, A, q_1]\ [q_1, A, q_1]$

18. $[q_0, A, q_0] \rightarrow b[q_0, B, q_0]\ [q_0, A, q_0]$
19. $[q_0, A, q_0] \rightarrow b[q_0, B, q_1]\ [q_1, A, q_0]$
20. $[q_0, A, q_1] \rightarrow b[q_0, B, q_0]\ [q_0, A, q_1]$ (จากการเดินข้อ 4)
21. $[q_0, A, q_1] \rightarrow b[q_0, B, q_1]\ [q_1, A, q_1]$

22. $[q_0, B, q_0] \rightarrow a[q_0, A, q_0]\ [q_0, B, q_0]$
23. $[q_0, B, q_0] \rightarrow a[q_0, A, q_1]\ [q_1, B, q_0]$
24. $[q_0, B, q_1] \rightarrow a[q_0, A, q_0]\ [q_0, B, q_1]$ (จากการเดินข้อ 5)
25. $[q_0, B, q_1] \rightarrow a[q_0, A, q_1]\ [q_1, B, q_1]$

26. $[q_0, B, q_0] \rightarrow b[q_0, B, q_0]\ [q_0, B, q_0]$
27. $[q_0, B, q_0] \rightarrow b[q_0, B, q_1]\ [q_1, B, q_0]$
28. $[q_0, B, q_1] \rightarrow b[q_0, B, q_0]\ [q_0, B, q_1]$ (จากการเดินข้อ 6)
29. $[q_0, A, q_1] \rightarrow b[q_0, B, q_1]\ [q_1, B, q_1]$

30. $[q_1, Z_0, q_0] \rightarrow c[q_1, Z_0, q_0]$
31. $[q_1, Z_0, q_1] \rightarrow c[q_1, Z_0, q_1]$ (จากการเดินข้อ 7)

32. $[q_1, A, q_0] \rightarrow c[q_1, A, q_0]$
33. $[q_1, A, q_1] \rightarrow c[q_1, B, q_1]$ (จากการเดินข้อ 8)

34. $[q_1, B, q_0] \rightarrow c[q_1, B, q_0]$

35. $[q_1, B, q_1] \rightarrow c[q_1, B, q_1]$ (จากการเดินข้อ 9)

สรุปจะได้การผลิตทั้งหมด 35 การผลิตใน P

ทดสอบว่าสายอักขระ x = babcaba จะเป็นคำในภาษาหรือไม่

ลองทำการตรวจสายอักขระ x ด้วยพีดีเอก่อนซึ่งทำได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
(q_0, \text{abacaba}, Z_0) &\vdash (q_0, \text{bacaba}, AZ_0) \\
&\vdash (q_0, \text{acaba}, BAZ_0) \\
&\vdash (q_0, \text{caba}, ABAZ_0) \\
&\vdash (q_0, \text{aba}, ABAZ_0) \\
&\vdash (q_0, \text{ba}, BAZ_0) \\
&\vdash (q_0, \text{a}, AZ_0) \\
&\vdash (q_0, \Lambda, Z_0) \\
&\vdash (q_0, \Lambda, \Lambda) \text{ ยอมรับ}
\end{aligned}
$$

และเมื่อใช้ไวยากรณ์จากซีเอฟจีที่แปลงได้จะสามารถตรวจสอบสายอักขระได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow [q_0, Z_0, q_1] \\
&\Rightarrow a[q_0, A, q_1]\ [q_1, Z_0, q_1] \\
&\Rightarrow ab[q_0, B, q_1]\ [q_0, A, q_1]\ [q_1, Z_0, q_1] \\
&\Rightarrow aba[q_0, A, q_1]\ [q_1, B, q_1]\ [q_0, A, q_1]\ [q_1, Z_0, q_1] \\
&\Rightarrow abac[q_1, A, q_1]\ [q_1, B, q_1]\ [q_0, A, q_1]\ [q_1, Z_0, q_1] \\
&\Rightarrow abaca\ [q_1, B, q_1]\ [q_0, A, q_1]\ [q_1, Z_0, q_1] \\
&\Rightarrow abacab\ [q_0, A, q_1]\ [q_1, Z_0, q_1] \\
&\Rightarrow abacaba\ [q_1, Z_0, q_1] \\
&\Rightarrow abacaba\Lambda\ = abacaba
\end{aligned}
$$

จะได้ว่าซีเอฟจีที่แปลงได้จะสามารถสร้างคำดังกล่าวได้เช่นกัน

■

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 7

1. จากออโตมาตากดลง M ที่นิยามภาษา L ดังต่อไปนี้

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, A, \delta)$ โดยที่

$Q = \{ q_0, q_1\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

$\Gamma = \{ 0, 1, Z_0\}$

q_0 เป็นสถานะเริ่มต้น

Z_0 เป็นสัญลักษณ์แสดงกองซ้อนว่าง

$A = \{ q_1 \}$

δ สามารถแสดงได้ด้วยตารางการผ่านดังนี้

Move#	State	Input	Stack Symbol	Move (S)
1	q_0	0	Z_0	$(q_0 , 0Z_0)$
2	q_0	1	Z_0	$(q_0 , 1Z_0)$
3	q_0	0	0	$(q_0 , 00)$
4	q_0	1	1	$(q_0 , 11)$
5	q_0	0	1	(q_0 , Λ)
6	q_0	1	0	(q_0 , Λ)
7	q_0	Λ	0	$(q_1 , 0)$
All other combinations				None

จงหาว่าสายอักขระในแต่ละข้อต่อไปนี้มีสายอักขระใดบ้างที่สามารถถูกยอมรับโดยออโตมาตากดลงดังกล่าว

1.1 000001111   1.3 1010101010   1.5 111100000

1.2 110110010   1.4 0011001010   1.6 000111001

2. จงหาตารางการผ่าน (Transition Table) ของออโตมาตากดลง PDA ที่รองรับภาษา L ในแต่ละข้อต่อไปนี้

2.1 $L = \{a^i b^j c^k \mid i = k+j\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$

2.2 $L = \{a^i b^j c^k \mid j = i+k\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$

2.3 $L = \{a^i b^j c^k \mid j \neq i+k\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$

2.4 $L = \{a^i b^j c^k \mid i \neq j+k\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$

2.5 $L = \{a^i b^j c^k \mid i = j$ หรือ $j = k\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$

2.6 $L = \{a^i b^j c^k \mid j = i$ หรือ $j = k\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$

2.7 $L = \{a^i b^j c^k \mid i < j$ หรือ $i > k\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$

2.8 $L = \{a^i b^j \mid i < 2j\}$, $\Sigma = \{a, b\}$

2.9 $L = \{a^i b^j \mid i \leq j \leq 2i\}$, $\Sigma = \{a, b\}$

2.10 $L = \{a^i b^j \mid i/2 \leq j \leq 3i/2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$

2.11 $L = \{a^i b^j c^k \mid i \neq k\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$

2.12 $L = \{a^i b^j c^k \mid i \neq j \text{ or } j \neq k \text{ or } i \neq k\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$

2.13 $L = \{0^i 1^j 2^k \mid i = j+k\}$, $\Sigma = \{0, 1, 2\}$

2.14 $L = \{b^i a^{m+n} b^j c^n a^m b^k \mid i, k, m, n \geq 0$ และ $j \geq 1\}$, $\Sigma = \{a,b,c,d\}$

2.15 $L = \{a^i b^j c^k d^l \mid 0 < j \leq k \leq 3j, i > 0, \text{ and } j \geq 0\}$, $\Sigma = \{a,b,c,d\}$

2.16 $L = \{a^n b^m \mid n \leq m \leq 3n\}$, $\Sigma = \{a, b\}$

2.17 $L = \{a^m b^n \mid 3n \geq m \geq n \geq 0\}$ $\Sigma = \{a,b\}$

2.18 $L = \{x \in \{0,1\}^* \mid n_0(x) \geq n_1(x)\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$

2.19 $L = \{x \in \{0,1\}^* \mid n_0(x) \leq n_1(x)\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$

2.20 L = ภาษา Palindrome สร้างจาก $\{a, b\}^*$ ที่มีความยาวของคำเป็นจำนวนคี่

2.21 L = ภาษาที่สร้างจาก $\{a, b\}^*$ โดยคำที่อยู่ในภาษาต้องไม่เป็นคำในภาษา Palindrome

2.22 $L = \{a^n x \mid n \geq 0, x \in \{0,1\}^*$ และ $|x| \leq n\}$, $\Sigma = \{0,1\}$

2.23 $L = \{a^i b^j c^k \mid n_a(x) < n_b(x)$ หรือ $n_a(x) < n_c(x)\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$

3. จงเขียน ตารางการผ่าน (Transition Table) ของออโตมาตากดลง PDA ที่รองรับภาษา L ที่มีนิพจน์ปกติที่สอดคล้องในแต่ละข้อต่อไปนี้

3.1 $L = (11 + 00)^*(1(010)^*1) + (0(101)^*0)(01 + 10)^*$; $\Sigma = \{0, 1\}$

3.2 $L = ((0 + 1 + 2)^*(00 + 11 + 22))^*$, $\Sigma = \{0, 1, 2\}$

3.3 $L = (1(01)^*(011 + \Lambda)1)^*$; $\Sigma = \{0, 1\}$

3.4 $L = ((aaa + bbb)^*(a(bab)^*a) + (b(aba)^*b)(ba + ab)^*)^*$, $\Sigma = \{a, b\}$

3.5 $L = 1(1 + 10)^* + 10(0 + 01)^*$; $\Sigma = \{0, 1\}$

4. จากตารางการผ่านของออโตมาตากดลงที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงอธิบายว่าแผนภาพการผ่านของออโตมาตากดลงดังกล่าวนิยามภาษาใด

4.1 $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$\Gamma = \{a, b, Z_0\}$

q_0 เป็นสถานะเริ่มต้น

Z_0 เป็นสัญลักษณ์แสดงกองซ้อนว่าง

$A = \{q_2\}$

δ สามารถแสดงได้ด้วยตารางการผ่านดังนี้

Move#	State	Input	Stack Symbol	Move (S)
1	q_0	A	Z_0	(q_1, aZ_0)
2	q_0	b	Z_0	(q_1, bZ_0)
3	q_1	a	a	$(q_1, a), (q_2, a)$
4	q_1	b	a	(q_1, a)
5	q_1	a	b	(q_1, b)
6	q_1	b	b	$(q_1, b), (q_2, b)$
All other combinations				none

4.2 $Q = \{ q_0, q_1, q_2 \}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$\Gamma = \{ a, b, Z_0 \}$

q_0 เป็นสถานะเริ่มต้น

Z_0 เป็นสัญลักษณ์แสดงกองซ้อนว่าง

$A = \{ q_2 \}$

δ สามารถแสดงได้ด้วยตารางการผ่านดังนี้

Move#	State	Input	Stack Symbol	Move (S)
1	q_0	a	Z_0	(q_0, XZ_0)
2	q_0	b	Z_0	(q_0, XZ_0)
3	q_0	a	X	(q_0, XX)
4	q_0	b	X	(q_0, XX)
5	q_0	c	X	(q_1, X)
6	q_0	c	Z_0	(q_1, Z_0)
7	q_1	a	X	(q_1, Λ)
8	q_1	b	X	(q_1, Λ)
9	q_1	Λ	Z_0	(q_2, Z_0)
All other combinations				none