บทที่ 5
ภาษาไม่ปกติ
(Non regular Language)

จากที่ได้กล่าวมาแล้วว่าภาษาสามารถแบ่งได้เป็นภาษาปกติ (Regular Language) และภาษาไม่ปกติ (Non regular Language) โดยกลุ่มของภาษาปกติทั้งหมดได้มีการกล่าวถึงมาแล้วในบทก่อนหน้า ซึ่งจะเป็นภาษาที่สามารถนิยามได้ด้วยเครื่องหรือตัวแบบที่มีจำนวนสถานะอย่างจำกัดและไม่มีหน่วยความจำ (ออโตมาตาจำกัด) หรือนิยามได้ด้วยนิพจน์ปกติ ซึ่งทั้งหมดนี้ได้แสดงให้เห็นในทฤษฎีบทของคลีน (Kleene's Theorem) นั่นเอง

สำหรับภาษาไม่ปกติ ที่จะได้มีการกล่าวถึงในบทนี้ จะมีการนำเอาทฤษฎีการปั๊มมาช่วยในการพิสูจน์และตัดสินว่าภาษาใดเป็นภาษาไม่ปกติ รวมทั้งจะได้กล่าวถึงหัวข้อความสามารถในการตัดสินใจ (Decidability) ด้วย

5.1 ทฤษฎีการปั๊ม (The Pumping Lemma)

หัวข้อนี้จะเริ่มด้วยนิยามที่ยืนยันความแตกต่างระหว่างภาษาปกติกับภาษาไม่ปกติ

<u>บทนิยามที่ 5.1</u>

ภาษาที่ไม่สามารถนิยามได้ด้วยนิพจน์ปกติ หรืออออโตมาตาจำกัดจะเรียกว่าภาษาไม่ปกติ

■

พิจารณา $L = \{ a^n b^n$ โดยที่ $n = 0, 1, 2, \ldots \}$

$= \{ \Lambda, ab, aabb, aaabbb, aaaabbbb, \ldots \}$

จะแสดงว่า L เป็นภาษาไม่ปกติ โดยใช้วิธีขัดแย้ง (contradiction)

สมมุติให้ L เป็นภาษาปกติ

ดังนั้นจะมี FA_1 เป็นเอฟเอที่ยอมรับ L โดยสมมุติให้ FA_1 มีจำนวนสถานะทั้งหมด 70 สถานะเนื่องจาก FA_1 ยอมรับ L ดังนั้น FA_1 จึงยอมรับคำ $a^{71}b^{71}$ ด้วย จะเห็นว่าตัวอักษร 71 ตัวแรกเป็น a ทั้งหมด แต่ว่า FA_1 มีแค่ 70 สถานะ ดังนั้นเพื่อให้ FA_1 ยอมรับคำๆนี้ ภายใน FA_1 จะต้องประกอบด้วยวงวน (ซึ่งในวงวนอาจประกอบด้วยหลายเส้นเชื่อมหลายสถานะก็ได้)

ขั้นแรก FA_1 ทำการอ่าน a จนกระทั่งเดินทางไปถึงสถานะแรกที่จะเข้าสู่วงวน จากนั้นเดินทางเข้าสู่วงวน ซึ่งอาจจะวนรอบวงวนกี่รอบก็ได้จนกระทั่งอ่าน b ตัวแรกเข้ามาก็จะออกจากวงวน และเดินทางต่อไป (ซึ่งอาจจะมีการเดินทางผ่านวงวนอื่นๆ อีกก็ได้) จนถึงสถานะสิ้นสุดดังนั้น $a^{71}b^{71}$ จึงถูกยอมรับ

สมมุติว่าวงวนแรกของ FA_1 นั้นมีเส้นเชื่อมรอบ 7 สถานะ มาพิจารณาคำ $a^{78}b^{71}$ จะพบว่า หลังจากอ่าน a ไป 71 ตัวอักษรแล้ว จะเดินทางเข้าสู่วงวนอีก 1 รอบ เพื่ออ่าน a อีก 7 ตัวที่เหลือ จากนั้นอ่าน b ตัวแรกจะออกจากวงวนและเดินทางไปตามเส้นทางเดิมที่ $a^{71}b^{71}$ เคยเดิน ในที่สุดก็เดินทางไปถึงสถานะสิ้นสุดดังนั้น $a^{78}b^{71}$ จึงถูกยอมรับโดย FA_1 ด้วย แต่ $a^{78}b^{71}$ ไม่ใช่คำที่อยู่ในภาษา L ซึ่งเกิดการขัดแย้งกับที่ได้สมมุติไว้ว่า FA_1 ยอมรับเฉพาะคำที่อยู่ใน L

สามารถกล่าวได้ว่า $a^{85}b^{71}$, $a^{92}b^{71}$, $a^{99}b^{71}$, ... ก็ถูกยอมรับโดย FA_1 ด้วย ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูป

$a^{71}(a^7)^m b^{71}$ โดยที่ m = 0 , 1 , 2 , 3 , ...

ถ้า m เป็น 0 จะได้วิถี สำหรับคำ $a^{71}b^{71}$ ถ้า m เป็น 1 จะได้วิถี เหมือนเดิมแต่มีการวนรอบวงวนมากกว่าเดิม 1 รอบ ดังนั้น $a^{71}(a^7)^m b^{71}$ จะมีการวนรอบวงวนมากกว่าเดิม m รอบ ซึ่งคำเหล่านี้ล้วนไม่อยู่ใน L แต่ถูกยอมรับโดย FA_1

มาพิจารณาเอฟเออีกเครื่องหนึ่งที่ยอมรับ L โดยสมมุติให้มีสถานะทั้งหมด 500 สถานะ ถ้าสายอักขระรับเข้าของคือ $a^{501}b^{501}$ ดังนั้นวิถี ของ a จะต้องประกอบด้วยวงวน สมมุติให้วงวน มีเส้นเชื่อม รอบ 9 สถานะจะพบว่าคำ $a^{510}b^{501}$ ก็ถูกยอมรับโดยเอฟเอเครื่องนี้ด้วย นอกจากนี้ เครื่องนี้ยังยอมรับคำที่อยู่ในรูปแบบข้างล่างนี้อีกด้วย

$a^{501}(a^9)^m b^{501}$ โดยที่ m = 0 , 1 , 2 , 3 , ...

ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่า ไม่มีเอฟเอที่ยอมรับเฉพาะคำที่อยู่ใน L นั่นคือ L จึงเป็นภาษาไม่ปกติ

จากการตรวจสอบว่าภาษาใดเป็นภาษาไม่ปกติด้วยนิยามข้างต้น จะต้องอาศัยความเข้าใจและรอบรู้ในการออกแบบออโตมาตาจำกัดมากพอควร อีกทั้งยังไม่มีขั้นตอนการพิจารณาที่แน่นอนซึ่งอาจทำให้ยากต่อการที่จะสรุปว่าภาษาที่สนใจเป็นภาษาไม่ปกติหรือไม่ ดังนั้นจะได้มีการหาขั้นตอนวิธีในการพิสูจน์เพื่อให้ได้มาซึ่งแนวทางที่สะดวกและง่ายต่อการพิจารณาสำหรับภาษาไม่ปกติ โดยวิธีการที่จะกล่าวถึงนี้ได้นำเอาหลักการของกรงนกพิราบ (Pigeonhole Principle) มาใช้เป็นแนวทางดังนี้

Pigeonhole Principle

ถ้าให้นกพิราบ n + 1 ตัวถูกกระจายจับใส่กรง n กรง มันจะต้องมีอย่างน้อย 1 กรงที่มีนกพิราบอยู่ในกรงมากกว่า 1 ตัว

หากพิจารณาในแบบรูปนัย

ถ้า $f : A \rightarrow B$ สำหรับเซต A และเซต B มีสมาชิก n + 1 และ n ตัวตามลำดับ จะได้ว่า f ไม่สามารถเป็นฟังก์ชันแบบ หนึ่ง-ไป-หนึ่ง (One-to-One) ได้

จากหลักการดังกล่าวสามารถนำมาพิจารณาการสร้างออโตมาตาจำกัดที่ยอมรับภาษาปกติใด ๆ ที่เป็นภาษาไม่จำกัดได้ดังนี้

ถ้า **M** = $(Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ เป็นออโตมาตาจำกัดที่ยอมรับภาษา L จะให้ความสนใจการเดินผ่านเส้นทางใน M ที่มีวงวน รวมอยู่นั่นคือ ถ้ามีสายอักขระ x ใน L และกระบวนการทำงานของ x ทำให้ M จะต้องเดินผ่านสถานะใดสถานะหนึ่งมากกว่า 1 ครั้ง โดยจะได้ว่า เส้นทางที่สอดคล้องกับ x เริ่มด้วยสถานะ q_0 สิ้นสุดที่สถานะสิ้นสุด q_fใด ๆ จะต้องมีวงวนรวมอยู่ด้วย

อาจจะมีเส้นทางอื่น ๆ มากมายที่เริ่มต้นที่ q_0 และสิ้นสุดที่ q_f และเป็นสมาชิกใน L ด้วย นั่นคือเป็นเส้นทางที่เหมือนกันกับเส้นทางแรกที่เคยเดินผ่าน แต่ต่างกันตรงที่จำนวนของวงวนที่ต้องเดิน

การสังเกตนำไปสู่คุณสมบัติที่ต้องการคือ

สมมติเซต Q มีสมาชิก n ตัว สำหรับสายอักขระ x ใด ๆ ที่ $x \in L$ โดย x มีความยาวอย่างน้อย n ตัวเขียนได้เป็น

$x = a_1a_2a_3\ldots a_ny$ ซึ่งสามารถแสดงเป็นลำดับของการทำฟังก์ชันการผ่าน n + 1 สถานะดังนี้

$$\delta^*(q_0, \Lambda) = q_0$$

$$\delta^*(q_0, a_1) = q_1$$

$$\delta^*(q_0, a_1a_2) = q_2$$

......

$$\delta^*(q_0, a_1a_2 \ldots a_n) = q_n$$

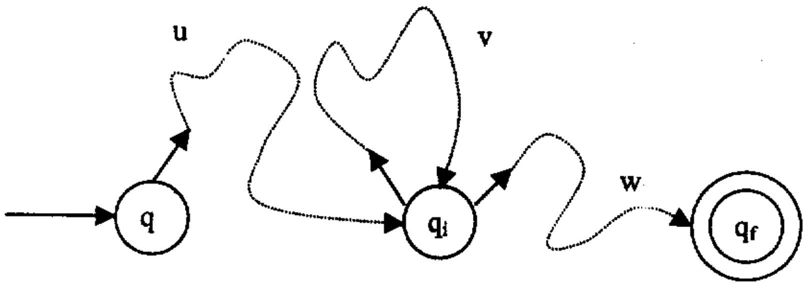
โดยจะต้องมีบางสถานะถูกเดินผ่านอย่างน้อย 2 ครั้งตามหลักการของ Pigeonhole Principle โดยวงวนแสดงได้ดังนี้

สมมติให้ $q_i = q_{i+p}$ ที่ซึ่ง $0 \leq i \leq i + p \leq n$ จะได้ว่า

$$\delta^*(q_0, a_1a_2 \ldots a_i) = q_i$$

$$\delta^*(q_0, a_{i+1}a_{i+2} \ldots a_{i+p}) = q_i$$

$$\delta^*(q_0, a_{i+p+1}a_{i+p+2} \ldots a_ny) = q_f \in A$$



ถ้า $i = 0 \Rightarrow a_1a_2 \ldots a_i = \Lambda$

เพื่อง่ายต่อการกำหนดสัญลักษณ์ จะให้

$u = a_1a_2 \ldots a_i$

$v = a_{i+1}\,a_{i+2} \ldots a_{i+p}$

$w = a_{i+p+1}\,a_{i+p+2} \ldots a_ny$

เมื่อ $\delta^*(q_0, v) = q_i$

และแสดงวงวนที่เกิดขึ้นได้เป็น

$\delta^*(q_i, v^m) = q_i$ สำหรับทุกๆ $m \geq 0$

ท้ายที่สุดจะได้ว่า $\delta^*(q_0, u\,v^m w) = q_f$

สำหรับทุกๆ $m \geq 0$ เมื่อ $p > 0$ และ $i + p \leq n$

จากแนวคิดดังกล่าวข้างต้นสามารถสร้างเป็นทฤษฎีบทที่ 5.1 และ 5.2 ซึ่งเป็นทฤษฎีที่จะช่วยในการพิสูจน์หาว่าภาษาใดเป็นภาษาปกติหรือภาษาใดเป็นภาษาไม่ปกติ ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 5.1

ถ้า L เป็นภาษาปกติใดๆ ที่ถูกยอมรับโดยออโตมาตาจำกัดที่มี n สถานะ สำหรับ x ใดๆ $x \in L$ ด้วยความยาว x, $|x| \geq n$, x จะสามารถเขียนให้อยู่ในลักษณะ $x = uvw$ ได้ สำหรับสายอักขระบางตัวของ u, v, และ w ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$|uv| \leq n$

$|v| > 0$

และสำหรับ m ใดๆ $m \geq 0$, $u\,v^m w \in L$

■

<u>ทฤษฎีบทที่ 5.2</u> (The pumping Lemma)

สมมติ L เป็นภาษาปกติ จากนั้นจะมีจำนวนเต็ม n สำหรับ x ใดๆ $x \in L$ ด้วยความยาว x,

$|x| \geq n$, จะมีสายอักขระ u, v, และ w ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$x = uvw$ → สมการที่ 1

$|uv| \leq n$ → สมการที่ 2

$|v| > 0$ → สมการที่ 3

และสำหรับ m ใดๆ $m \geq 0$, $uv^m w \in L$ → สมการที่ 4

■

จากทฤษฎีบทที่ 5.1 และ 5.2 จะสามารถนำมาใช้ในการพิสูจน์ภาษาไม่ปกติ โดยวิธีการขัดแย้งดังตัวอย่างที่จะแสดงต่อไป

ตัวอย่างที่ 5.1

จงใช้ทฤษฎีการปั๊ม พิสูจน์ภาษาต่อไปนี้เป็นว่าเป็นภาษาไม่ปกติหรือไม่

$L_1 = \{ a^i b^j \mid i = j \}$

พิสูจน์โดยวิธี Contradiction Proof

1. ตั้งสมมติฐานให้ L_1 เป็นภาษาปกติ

2. (พยายามหาให้ได้ว่า L_1 เป็นภาษาไม่ปกติ)

$L_1 = \{\Lambda$, ab, aabb, aaabbb, aaabbb, ...$\}$)

ดังนั้น ให้ $x = a^n b^n$; $|x| = 2n \geq n$

$|uv| \leq n$; $uv = a^n$

$|v| > 0$; $v = a^k$

$u = a^{n-k}$

$w = b^n$

$\therefore \; x = uv^m w = a^{n-k} (a^k)^m b^n$

เลือก m = 1

$$x = a^{n-k}\ (a^{k})^{1}\ b^{n-1}$$

$= a^{n}\ b^{n}$ จะเห็นว่าเมื่อเลือก m = 1 ยังทำให้คำ x อยู่ในภาษา

เลือก m = 2

$$x = a^{n-k}\ (a^{k})^{2}\ b^{n-1}$$

$$= a^{n+k}\ b^{n}$$

จะเห็นว่าเมื่อ m =2 และเนื่องจาก $k > 0$ จะทำให้ x ที่ได้มีขนาดของ a ยาวมากกว่าขนาดของ b ($n + k > n$) ซึ่งทำให้ x ไม่เป็นคำที่อยู่ในภาษา L_1

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า L_1 เป็นภาษาไม่ปกติ

■

จากตัวอย่างที่ 5.1 จะถือว่าภาษา L_1 ไม่สามารถปั๊มได้ บางครั้งจะเรียกการปั๊มกรณีที่เพิ่มค่า m เริ่มจาก 1 ว่าเป็นการปั๊มขึ้น (Pumping Up) แต่สำหรับบางภาษาเมื่อทำการพิสูจน์แล้วการปั๊มขึ้นทุกกรณีของ m ($m \geq 1$) ยังคงทำให้คำที่ได้เป็นคำในภาษาที่ต้องการจะตรวจสอบเสมอ ดังนั้นอาจจะต้องพิจารณาเลือก m อีกกรณีคือเลือก m = 0 ซึ่งถือว่าเป็นการปั๊มลง (Pumping Down) และถ้าปั๊มไม่ได้ก็จะถือว่าภาษาดังกล่าวเป็นภาษาไม่ปกติ แต่ถ้าปั๊มได้ก็จะทำให้ภาษานั้นเป็นภาษาปกติเพราะสามารถปั๊มได้ทุกกรณีของ m ที่ $m \geq 0$ ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีการปั๊มข้างต้น

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นการแสดงตัวอย่างการพิสูจน์ว่าภาษาเป็นภาษาไม่ปกติจากทฤษฎีการปั๊มโดยเลือกการปั๊มลง

ตัวอย่างที่ 5.2

จงใช้ทฤษฎีการปั๊ม พิสูจน์ภาษาต่อไปนี้เป็นว่าเป็นภาษาไม่ปกติหรือไม่

$$L_2 = \{ a^i b^j \mid i \neq j \}$$

พิสูจน์โดยวิธี Contradiction Proof

1. ตั้งสมมติฐานให้ L_2 เป็นภาษาปกติ

2.(พยายามหาให้ได้ว่า L_2 เป็นภาษาไม่ปกติ)

L_2 = { bb, aab, aaabb, aabbb, …} ; i มี 2 กรณี คือ $i < j$, $i > j$ เพราะ $i \neq j$

ดังนั้น ให้ $x = a^n b^{n-1}$; $|x| = 2n-1 \geq n$

$|uv| \leq n$; $uv = a^n$

$|v| > 0$; $x = a^k$

$u = a^{n-k}$

$w = b^{n-1}$

$\therefore \quad x = uv^m w = a^{n-k} (a^k)^m b^{n-1}$

เลือก $m = 1$

$x = a^{n-k} (a^k)^1 b^{n-1}$

$= a^n b^{n-1}$ จะเห็นว่าเมื่อเลือก m = 1 ยังทำให้คำ x อยู่ในภาษา

เลือก m = 2

$x = a^{n-k} (a^k)^2 b^{n-1}$

$= a^{n+k} b^{n-1}$ จะเห็นว่าเมื่อเลือก m = 2 ก็ยังทำให้คำ x อยู่ในภาษา และถึงแม้จะเลือก m ให้มากขึ้นเรื่อย ๆ ก็จะไม่ทำให้ x ไม่อยู่ในภาษาได้

ดังนั้นคงเหลือค่า m อีกค่าคือ m = 0 ซึ่งจะได้ว่า

$X = a^{n-k} (a^k)^0 b^{n-1}$

$= a^{n-k} b^{n-1}$

จากการเลือก m = 0 และเนื่องจาก $k > 0$ และเมื่อ k = 1 จะทำให้ขนาดความยาวของ a เท่ากับความยาวของ b ($n - k = n - 1$) ซึ่งทำให้ x ไม่เป็นคำที่อยู่ในภาษา L_2

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า L_2 เป็นภาษาไม่ปกติ

■

ข้อสำคัญในการพิจารณาสำหรับการพิสูจน์ด้วยทฤษฎีการปั๊มอีกอย่างคือ การเลือก x ที่จะนำมาใช้พิสูจน์ เพราะถ้าเลือก x ไม่เหมาะสมจะทำให้การพิสูจน์เกิดความยุ่งยากหรือทำให้การพิสูจน์ไม่ครบและเกิดความผิดพลาดได้ดังแสดงด้วยตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5.3

จงใช้ทฤษฎีการปั๊ม พิสูจน์ภาษาต่อไปนี้เป็นว่าเป็นภาษาไม่ปกติหรือไม่

$L_3 = \{ x \in \{a, b\}^* \mid i = j \}$

พิสูจน์โดยวิธี Contradiction Proof

1. ตั้งสมมติฐานให้ L_3 เป็นภาษาปกติ
2. (พยายามหาให้ได้ว่า L_3 เป็นภาษาไม่ปกติ)

$L_3 = \{\Lambda, ab, ba, abab, baba, \ldots\}$

ลองพิจารณากรณีเลือก x ที่ไม่เหมาะสมต่อไปนี้โดยให้ $x = (ab)^n$; $|x| = 2n \geq n$

สำหรับ $|uv| \leq n$; ให้ $uv = (ab)^{n/2}$

และสำหรับ $|v| > 0$ จะมีกรณีของการเกิด v ที่เป็นไปได้ดังนี้

1. $v = (ab)^j$ สำหรับ $j > 0$
2. $v = b(ab)^j$ สำหรับ $j \geq 0$
3. $v = b(ab)^j a$ สำหรับ $j \geq 0$
4. $v = (ab)^j a$ สำหรับ $j \geq 0$

$w = (ab)^{n/2}$

เมื่อจัดรูป $x = uv^m w$ จะเห็นว่าจะได้กรณีพิจารณาทั้งหมด 4 กรณีด้วยกันซึ่งการตรวจสอบการปั๊มจะต้องพิจารณาทั้ง 4 กรณีโดยจะต้องพิสูจน์ให้เกิดความขัดแย้งทั้ง 4 กรณี แต่จาก4 กรณีดังกล่าวนี้ ถ้ามีการทดสอบการปั๊มจะมีกรณีที่ 2 และ 4 เท่านั้นที่สามารถพิสูจน์ให้เกิดความขัดแย้งได้เท่านั้น ส่วนกรณีที่ 1 และ 3 จะไม่สามารถพิสูจน์ให้เกิดความขัดแย้งได้เลยเพราะสามารถปั๊ม m ได้ทุกกรณี นั่นคือ $x = uv^m w$ จะได้จำนวนของ a เท่ากับจำนวนของ b เสมอ

ดังนั้นถ้าไม่สามารถพิสูจน์ให้เกิดความขัดแย้งได้ทุกกรณี ก็จะไม่สามารถยืนยันได้ว่าภาษาดังกล่าวจะเป็นภาษาไม่ปกติหรือไม่

จากเหตุผลข้างต้นจึงจำเป็นจะต้องพิจารณาเลือก x ให้เหมาะสม สำหรับภาษา L_3 สามารถเลือก x ที่เหมาะสมได้ดังนี้

ให้ $x = a^n b^n$; $|x| \geq n$

$|uv| \leq n$; $uv = a^n$

$|v| > 0$; $v = a^k$

$u = a^{n-k}$

$w = b^n$

$\therefore \quad x = uv^m w = a^{n-k} (a^k)^m b^n$

เลือก $m = 1$

$x = a^{n-k} (a^k)^1 b^{n-1}$

$= a^n \; b^n$ จะเห็นว่าเมื่อเลือก m = 1 ยังทำให้คำ x อยู่ในภาษา

เลือก $m = 2$

$x = a^{n-k} (a^k)^2 b^{n-1}$

$= a^{n+k} \; b^n$

จะเห็นว่าเมื่อ m = 2 และเนื่องจาก $k > 0$ จะทำให้ x ที่ได้มีขนาดของ a ยาวมากกว่าขนาดของ b $(n + k > n)$ ซึ่งทำให้ x ไม่เป็นคำที่อยู่ในภาษา L_3

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า L_3 เป็นภาษาไม่ปกติ

■

สำหรับบางภาษาที่มีเงื่อนไขของภาษามากกว่า 1 เงื่อนไข โดยเป็นการรวมเงื่อนไขแบบหรือ (OR) กรณีนี้ให้เลือก x โดยพิจารณาจากเงื่อนไขใดเงื่อนไขหนึ่งเพียงเงื่อนไขเดียวที่ทำให้การพิสูจน์เกิดความขัดแย้งได้ ก็ถือว่าเพียงพอต่อการสรุปได้แล้วว่าภาษาดังกล่าวเป็นภาษาไม่ปกติดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5.4

จงใช้ทฤษฎีการปั๊ม พิสูจน์ภาษาต่อไปนี้เป็นว่าเป็นภาษาไม่ปกติหรือไม่

$L_4 = \{ a^i b^j c^k d^l \mid i = 2k \text{ or } j = 4l \}$

ภาษานี้สามารถเลือกพิสูจน์กรณีใดกรณีหนึ่งดังต่อไปนี้ (ให้เลือกพิสูจน์เพียงกรณีเดียวเท่านั้น แต่สำหรับในตัวอย่างนี้จะทำการแสดงให้เห็นทั้งสองกรณีเพื่อเป็นแนวทางในการเลือกคำ x ที่จะใช้ตรวจสอบ)

เงื่อนไขที่ 1 : $i = 2k$

พิสูจน์โดยวิธี Contradiction Proof

1. ตั้งสมมติฐานให้ L_2 เป็นภาษาปกติ
2. (พยายามหาให้ได้ว่า L_2 เป็นภาษาไม่ปกติ)

ให้ $x = a^{2n} c^n$; $|x| \geq n$

$|uv| \leq n$; $uv = a^n$

$|v| > 0$; $v = a^k$

$u = a^{n-k}$

$w = a^n c^n$

$\therefore \quad x = uv^m w = a^{n-k} (a^k)^m a^n c^n$

เลือก $m = 0$

$x = a^{n-k} (a^k)^0 a^n c^n$

$= a^{n-k} a^n c^n$

จะเห็นว่าเมื่อ $m = 0$ และเนื่องจาก $k > 0$ จะทำให้ x ที่ได้มีขนาดของ a ยาวไม่เป็นสองเท่าของขนาดของ b ($2n - k \neq 2n$) ซึ่งทำให้ x ไม่เป็นคำที่อยู่ในภาษา L_3

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า L_3 เป็นภาษาไม่ปกติ

■

<u>ทฤษฎีบทที่ 5.5</u>

ให้ L_1 และ L_2 เป็นภาษาปกติ

จะมี ขั้นตอนวิธี ในการตัดสินใจว่า $L_1 = L_2$ ■

<u>พิสูจน์</u> (โดยใช้ขั้นตอนวิธีการสร้างเสริม)

ให้ L_1 และ L_2 เป็นภาษาปกติ

มาพิจารณาภาษา $L_3 = (L_1 \cap L_2') + (L_1' \cap L_2)$

โดยจะแสดงว่า $L_1 = L_2$ ก็ต่อเมื่อ $L_3 = \varnothing$

กรณี 1

ให้ $L_1 = L_2$

ดังนั้น $(L_1 \cap L_2') + (L_1' \cap L_2) = (L_1 \cap L_1') + (L_1' \cap L_1)$

$$= (L_1 \cap L_1')$$

$$= \varnothing$$

กรณี 2

เนื่องจาก $(L_1 \cap L_2') + (L_1' \cap L_2) = \varnothing$

ดังนั้น $(L_1 \cap L_2') = \varnothing$ และ $(L_1' \cap L_2) = \varnothing$

ให้ $x \in L_1$ และ $y \in L_2$

เนื่องจาก $(L_1 \cap L_2') = \varnothing$ ดังนั้น $x \notin L_2'$ นั่นคือ $x \in L_2$

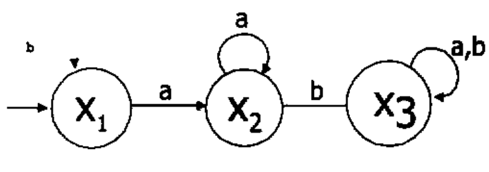
เนื่องจาก $(L_1' \cap L_2) = \varnothing$ ดังนั้น $y \notin L_1'$ นั่นคือ $y \in L_1$

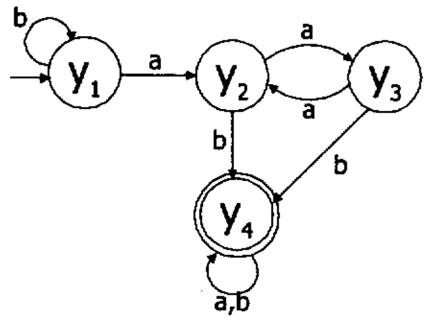
จะได้ว่า $L_1 = L_2$

จากทั้ง 2 กรณี จะได้ $L_1 = L_2$ ก็ต่อเมื่อ $L_3 = \varnothing$

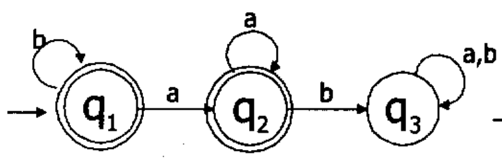
เนื่องจาก L_1 และ L_2 เป็นภาษาปกติดังนั้นจากทฤษฎีบทที่ 4.7 จะได้ว่า L_3 ก็เป็นภาษาปกติ ด้วย ดังนั้นจะมี เอฟเอ ที่ยอมรับเฉพาะภาษา L_3 และจากทฤษฎีบทที่ 5.4 สามารถตัดสินใจได้ว่า L_3 เป็นภาษาว่าง และถ้าพบว่า $L_3 = \varnothing$ จะได้ว่า $L_1 = L_2$ ■

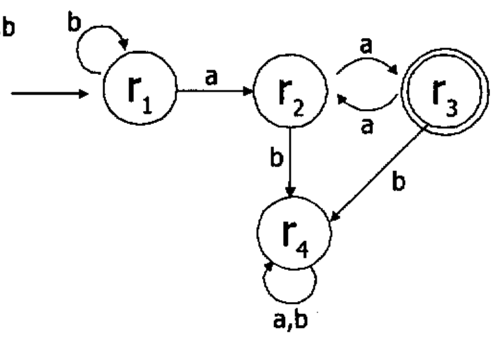
ตัวอย่างที่ 5.5





FA_1 FA_2





FA_1' FA_2'

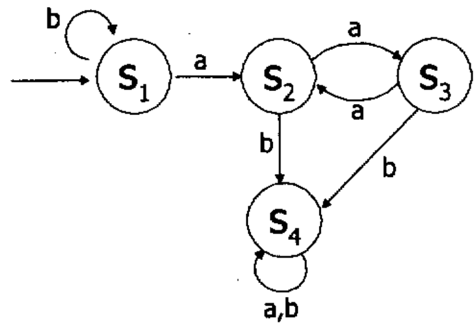
ให้ FA_1 ยอมรับภาษา L_1

FA_2 ยอมรับภาษา L_2

จะแสดงว่า $L_1 = L_2$ โดยพิจารณาภาษา $L_3 = (L_1 \cap L_2') + (L_1' \cap L_2)$ ถ้าพบว่า $L_3 = \varnothing$ จะได้ว่า $L_1 = L_2$

เนื่องจาก L_3 เป็นภาษาปกติ ดังนั้นจะมีเอฟเอ ยอมรับ L_3 มาพิจารณา L_3 ทีละส่วน

สามารถหา เอฟเอที่ยอมรับ $(L_1 \cap L_2')$ ได้ดังรูปต่อไปนี้



FA_3

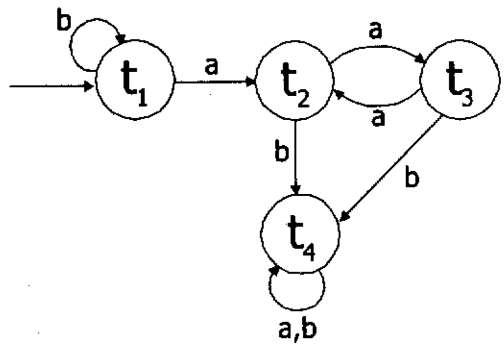
โดยที่ s_1 คือ x_1 หรือ r_1

s_2 คือ x_2 หรือ r_2

s_3 คือ x_2 หรือ r_3

s_4 คือ x_3 หรือ r_4

สามารถหา เอฟเอ ที่ยอมรับ $(L_1' \cap L_2)$ ได้ดังรูปข้างล่างนี้



FA_4

โดยที่ t_1 คือ q_1 หรือ y_1

t_2 คือ q_2 หรือ y_2

t_3 คือ q_2 หรือ y_3

t_4 คือ q_3 หรือ y_4

จะเห็นว่า FA_3 และ FA_4 ต่างก็ไม่ยอมรับคำใดๆ เลย ดังนั้น $FA_3 + FA_4$ จึงไม่ยอมรับคำใดๆ นั่นคือ $L_1 = L_2$

■

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5

1. จงหาว่าภาษาต่อไปนี้เป็นภาษาไม่ปกติ (Non-Regular Language) หรือไม่ โดยใช้ทฤษฎีการปั๊ม (Pumping Lemma) ช่วยในการพิสูจน์

$$L = \{a^i b^n a^j b^m a^k \mid m < n\} ; \Sigma = \{a, b\}$$

2. จงหาว่าภาษาต่อไปนี้เป็นภาษาไม่ปกติ (Non-Regular Language) หรือไม่ โดยใช้ทฤษฎีการปั๊ม (Pumping Lemma) ช่วยในการพิสูจน์

$$L = \{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\} ; \Sigma = \{0, 1\}$$

3. จงหาว่าภาษาต่อไปนี้เป็นภาษาไม่ปกติ (Non-Regular Language) หรือไม่ โดยใช้ทฤษฎีการปั๊ม (Pumping Lemma) ช่วยในการพิสูจน์

$$L = \{a^i b^j a^k b^l a^m \mid i > k \text{ or } j > 2l \text{ or } k > 4m\} ; \Sigma = \{a, b\}$$

4. จงหาว่าภาษาต่อไปนี้เป็นภาษาไม่ปกติ (Non-Regular Language) หรือไม่ โดยใช้ทฤษฎีการปั๊ม (Pumping Lemma) ช่วยในการพิสูจน์ โดยที่ $\Sigma = \{a,b,c\}$

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i + j \geq k\} ; \Sigma = \{a, b, c\}$$

5. จงหาว่าภาษาต่อไปนี้เป็นภาษาไม่ปกติ (Non-Regular Language) หรือไม่ โดยใช้ทฤษฎีการปั๊ม (Pumping Lemma) ช่วยในการพิสูจน์

$$L = \{a^i b^j c^k d^l e^m \mid i > k \text{ or } j > 2l \text{ or } k > 4m\}; \Sigma = \{a, b, c, d, e\}$$

6. จงหาว่าภาษาต่อไปนี้เป็นภาษาไม่ปกติ (Non-Regular Language) หรือไม่ โดยใช้ทฤษฎีการปั๊ม (Pumping Lemma) ช่วยในการพิสูจน์

$$L = \{a^i b^j c^k d^l e^m \mid 2i > k+l \text{ or } 2j > l + m\}, \Sigma = \{a, b, c, d, e\}$$

7. จงหาว่าภาษาต่อไปนี้เป็นภาษาไม่ปกติ (Non-Regular Language) หรือไม่ โดยใช้ทฤษฎีการปั๊ม (Pumping Lemma) ช่วยในการพิสูจน์

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ and if } i = 1 \text{ then } j = k\}; \Sigma = \{a, b, c\}$$

8. จงหาว่าภาษาต่อไปนี้เป็นภาษาไม่ปกติ (Non-Regular Language) หรือไม่ โดยใช้ทฤษฎีการปั๊ม (Pumping Lemma) ช่วยในการพิสูจน์

$$L = \{ 1^i 0^j \mid j = 2i \text{ or } j = 4i \}; \Sigma = \{0, 1\}$$

9. จงหาว่าภาษาต่อไปนี้เป็นภาษาไม่ปกติ (Non-Regular Language) หรือไม่ โดยใช้ทฤษฎีการปั๊ม (Pumping Lemma) ช่วยในการพิสูจน์

$L = \{ 0^i 1^j \mid j = i \text{ or } j = 2i \}$; $\Sigma = \{0, 1\}$

10. จงหาว่าภาษาต่อไปนี้เป็นภาษาไม่ปกติ (Non-Regular Language) หรือไม่โดยใช้ทฤษฎีการปั๊ม (Pumping Lemma) ช่วยในการพิสูจน์

$L = \{ x \in \{0, 1\}^* \mid n_0(x) < 2\, n_1(x) \}$

11. จงหาว่าภาษาต่อไปนี้เป็นภาษาไม่ปกติ (Non-Regular Language) หรือไม่โดยใช้ทฤษฎีการปั๊ม (Pumping Lemma) ช่วยในการพิสูจน์

L = { $x \in \{0, 1\}^*$ | สายอักขระย่อยส่วนหน้าของ x จะต้องมีจำนวนของ 1 มากกว่าจำนวนของ 0 เสมอ (no prefix of x has more 0's than 1's) }

12. จงหาว่าภาษาต่อไปนี้เป็นภาษาไม่ปกติ (Non-Regular Language) หรือไม่โดยใช้ทฤษฎีการปั๊ม (Pumping Lemma) ช่วยในการพิสูจน์

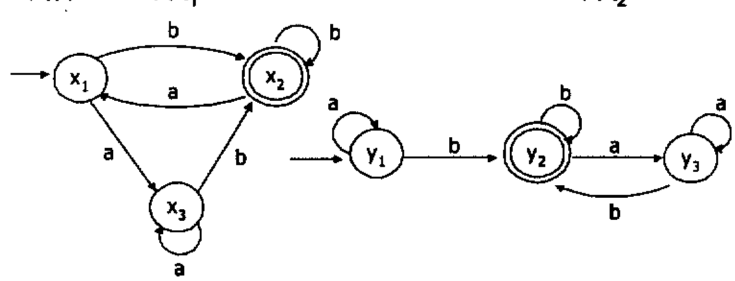
$L = \{ a^{n!} b^{n!} \}$ = { ab aabb aaaaaabbbbbb ... }; $\Sigma = \{a, b\}$

13. จงหาว่าภาษาต่อไปนี้เป็นภาษาไม่ปกติ (Non-Regular Language) หรือไม่โดยใช้ทฤษฎีการปั๊ม (Pumping Lemma) ช่วยในการพิสูจน์

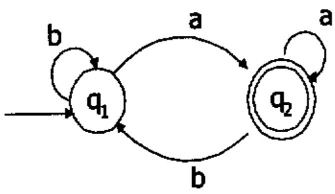
L = EVENPALINDROME = { คำทุกคำที่อยู่ใน PALINDROME ที่มีความยาวเป็นจำนวนคู่ } = { aa, bb, aaaa, abba, baab, bbbb, ... }; $\Sigma = \{a, b\}$

14. จงพิจารณาว่า FA_1 สมมูลกับ FA_2 หรือไม่ จงอธิบายโดยใช้ขั้นตอนวิธี (algorithm)ในการพิจารณาภาษาของ $(L_1 \cap L_2') + (L_2 \cap L_1')$

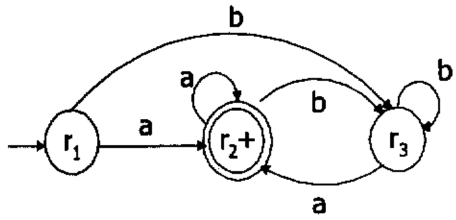
14.1 FA_1 FA_2



14.2

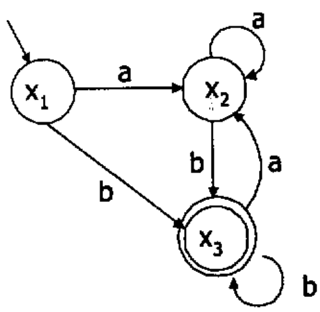


FA$_1$

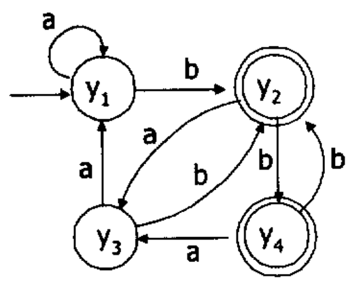


FA$_2$

14.3

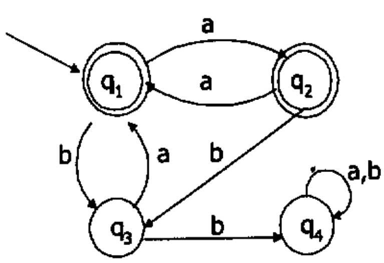


FA$_1$

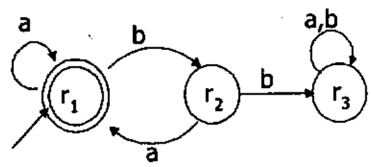


FA$_2$

14.4

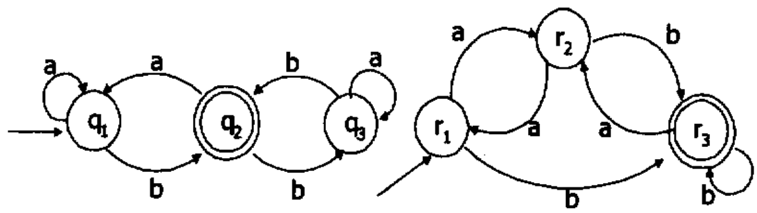


FA$_1$



FA$_2$

14.5



FA$_1$ FA$_2$