บทที่ 4
เชิงไม่กำหนดและทฤษฎีบทของคลีน
(Non-deterministic and Kleene's Theorem)

ในบทนี้จะได้กล่าวถึงการนิยามภาษาปกติโดยใช้เครื่องหรือตัวแบบที่มีความคล้ายคลึงกับออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด ซึ่งการนิยามยังคงต้องประกอบด้วยเซตของสถานะ ชุดตัวอักษรของสัญลักษณ์รับเข้า สถานะเริ่มต้น เซตของสถานะสิ้นสุด และฟังก์ชันการผ่าน แต่จะมีความยืดหยุ่นในด้านกฎเกณฑ์มากกว่า ซึ่งจะทำให้การสร้างหรือนิยามภาษาสามารถทำได้ง่ายขึ้น อีกทั้งยังเป็นเครื่องมือที่สามารถนิยามภาษาเดียวกันกับออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนดได้ด้วยโดยจะแสดงให้เห็นในส่วนของทฤษฎีบทของคลีน

เครื่องหรือตัวแบบที่จะพูดถึงในบทนี้คือ ออโตมาตาจำกัดเชิงไม่กำหนดและกราฟการผ่าน สำหรับออโตมาตาจำกัดเชิงไม่กำหนด จะสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 แบบ คือออโตมาตาจำกัดเชิงไม่กำหนด (Non-deterministic Finite Automata) หรือเอ็นเอฟเอ (NFA) และออโตมาตาจำกัดเชิงไม่กำหนดที่มีการผ่านด้วยสายอักขระว่าง (Non-deterministic Finite Automata with empty string (Λ) transition) หรือ เอ็นเอฟเอ-Λ (NFA-Λ) ส่วนกราฟการผ่านจะแบ่งออกได้เป็น 2 แบบคือ กราฟการผ่าน (Transition Graph) หรือ ทีจี (TG) และการกราฟการผ่านวางนัยทั่วไป (Generalized Transition Graph) หรือ จีทีจี (GTG)

นอกจากนี้จะได้พูดถึงออโตมาตาจำกัดที่น่าสนใจเพิ่มเติมบางตัวเพื่อแสดงถึงความสามารถในการทำงานหรือการตรวจสอบที่แตกต่างออกไป เครื่องหรือตัวแบบนี้คือออโตมาตาจำกัดที่มีข้อมูลออก

4.1 ออโตมาตาจำกัดเชิงไม่กำหนด(Non-deterministic Finite Automata) หรือ เอ็นเอฟเอ (NFA)

สำหรับเครื่องหรือตัวแบบตัวแรกที่จะกล่าวถึงในบทนี้คือเอ็นเอฟเอซึ่งสามารถนิยามได้ดังนี้

บทนิยามที่ 4.1

ออโตมาตาจำกัดเชิงไม่กำหนด (Non-deterministic Finite Automata) หรือ เอ็นเอฟเอ (NFA) ประกอบด้วยลำดับของสมาชิก 5 ตัว (5-Tuple) คือ (Q, Σ, q_0, A, δ) โดยที่

1. Q คือ เซตจำกัดของสถานะ
2. Σ คือ ชุดตัวอักษรของสัญลักษณ์รับเข้า
3. q_0 คือ สถานะเริ่มต้น (start state) 1 สถานะ; $q_0 \in Q$
4. A คือ เซตจำกัดของสถานะสิ้นสุด (final state) และอาจจะมีหรือไม่มีก็ได้

$A \subseteq Q$

5. δ คือ เซตจำกัดของฟังก์ชันการผ่าน (transitions function) ที่จะอธิบายถึงแต่ละสถานะ และแต่ละสัญลักษณ์รับเข้าว่าจะต้องเดินทางไปยังสถานะใดต่อไป โดยเขียนให้อยู่ในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ได้เป็น

$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ (2^Q หมายถึง เซตของเซตย่อย (Subset) ของ Q)

■

เมื่อพิจารณาฟังก์ชันการผ่านของเอ็นเอฟเอแล้ว จะเห็นว่าการกำหนดทางเดินมีการระบุทิศทางที่จะทำให้คำในภาษาสามารถถูกยอมรับโดยเอ็นเอฟเอเท่านั้น และการกำหนดทางเดินของสมาชิกแต่ละตัวใน Σ ในแต่ละสถานะอาจจะไม่มีทางเดินหรือถ้ามีก็อาจมีมากกว่า 1 เส้นทางก็ได้ สำหรับการตรวจสอบสายอักขระใด ๆ ว่าจะเป็นคำในภาษาที่มีเอ็นเอฟเอยอมรับ สามารถแสดงได้โดยการใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ที่เรียกว่าฟังก์ชันการผ่านตามนิยามต่อไปนี้

บทนิยามที่ 4.2

ให้ $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ เป็นออโตมาตาจำกัดเชิงไม่กำหนด จะกำหนดฟังก์ชันการผ่านของออโตมาตาจำกัดเชิงไม่กำหนดโดยเขียนแทนด้วย δ^*

ที่ซึ่ง $\delta^* : Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$ ได้ดังนี้

1. สำหรับ q ใด ๆ $q \in Q$, $\delta^*(q, \Lambda) = \{q\}$
2. สำหรับ y ใด ๆ $y \in \Sigma^*$, a ใด ๆ $a \in \Sigma$ และ q ใด ๆ $q \in Q$ จะได้ว่า

$$\delta^*(q, ya) = \bigcup_{p \in \delta^*(q, y)} \delta(p, a)$$

■

สำหรับการระบุว่าสายอักขระใดๆ จะถูกยอมรับโดยเอ็นเอฟเอ รวมถึงภาษาใดๆ ที่จะมีเอ็นเอฟเอยอมรับนั้นจะสามารถนิยามให้ชัดเจนได้ดังนี้

บทนิยามที่ 4.3

ให้ $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ เป็นออโตมาตาจำกัดเชิงไม่กำหนด สายอักขระ $x \in \Sigma^*$ จะถูกยอมรับโดย M ถ้า $\delta^*(q_0, x) \cap A \neq \varnothing$ ส่วนภาษาที่ถูกยอมรับ (Accepted or Recognized) โดย M คือเซต $L(M) = \{ x \in \Sigma^* \mid x$ ถูกยอมรับโดย M$\}$ โดยสามารถกล่าวในอีกนัยหนึ่งได้ว่า ถ้า L เป็นภาษาใด ๆ บน Σ, L จะถูกยอมรับโดย M ก็ต่อเมื่อ $L = L(M)$

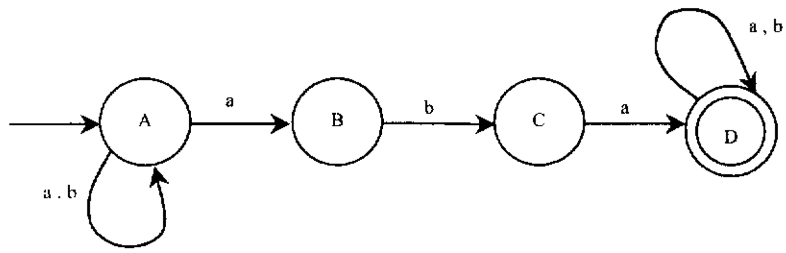
■

แนวความคิดของเอ็นเอฟเออาจมีความซับซ้อนกว่าดีเอฟเอโดยเฉพาะในส่วนของการทำฟังก์ชันการผ่าน แต่ข้อดีของเอ็นเอฟเอคือ ช่วยให้การพิสูจน์ข้อความต่าง ๆ

เกี่ยวกับดีเอฟเอง่ายขึ้น อีกทั้งการสร้างเอ็นเอฟเอที่ยอมรับภาษาที่กำหนดให้ โดยมากจะทำได้ง่ายกว่าการสร้างโดยออโตมาจำกัดเชิงกำหนด ดังได้กล่าวมาแล้วข้างต้น

ตัวอย่างที่ 4.1

จากชุดตัวอักษร $\Sigma = \{ a , b \}$



จงตรวจสอบว่าสายอักขระ X = aabbabaabaa จะถูกยอมรับโดยเอ็นเอฟเอข้างต้นหรือไม่

$\underline{\delta' (A , aabbabaabaa)}$

$= \cup \left(\begin{matrix} \delta(p, a) \\ p \in \underline{\delta' (A , aabbabaaba)} \end{matrix} \right) \rightarrow \delta(A, a) \cup \delta(B, a) \cup \delta(D, a) \Rightarrow \{A, B, D\}$

สิ้นสุด

เริ่ม

$= \cup \left(\begin{matrix} \delta(p, a) \\ p \in \underline{\delta' (A , aabbabaab)} \end{matrix} \right) \rightarrow \delta(A, a) \cup \delta(C, a) \cup \delta(D, a) \Rightarrow \{A, B, D\}$

$= \cup \left(\begin{matrix} \delta(p, b) \\ p \in \underline{\delta' (A , aabbabaa)} \end{matrix} \right) \rightarrow \delta(A, b) \cup \delta(C, b) \cup \delta(D, b) \Rightarrow \{A, C, D\}$

$= \cup \left(\begin{matrix} \delta(p, a) \\ p \in \underline{\delta' (A , aabbaba)} \end{matrix} \right) \rightarrow \delta(A, a) \cup \delta(B, a) \cup \delta(D, a) \Rightarrow \{A, B, D\}$

$= \cup \left(\begin{matrix} \delta(p, a) \\ p \in \underline{\delta' (A , aabbab)} \end{matrix} \right) \rightarrow \delta(A, a) \cup \delta(C, a) \Rightarrow \{A, B, D\}$

1 2

1 2

$$= \bigcup \left(\begin{array}{l} \delta(p,b) \\ p \in \underline{\delta^{'}(A, aabba)} \end{array} \right) \quad \rightarrow \delta(A,b) \cup \delta(B,b) \Rightarrow \{A, C\}$$

$$= \bigcup \left(\begin{array}{l} \delta(p,a) \\ p \in \underline{\delta^{'}(A, aabb)} \end{array} \right) \quad \rightarrow \delta(A,a) \Rightarrow \{A, B\}$$

$$= \bigcup \left(\begin{array}{l} \delta(p,b) \\ p \in \underline{\delta^{'}(A, aab)} \end{array} \right) \quad \rightarrow \delta(A,b) \cup \delta(C,b) \Rightarrow \{A\}$$

$$= \bigcup \left(\begin{array}{l} \delta(p,b) \\ p \in \underline{\delta^{'}(A, aa)} \end{array} \right) \quad \rightarrow \delta(A,b) \cup \delta(B,b) \Rightarrow \{A, C\}$$

$$= \bigcup \left(\begin{array}{l} \delta(p,a) \\ p \in \underline{\delta^{'}(A, a)} \end{array} \right) \quad \rightarrow \delta(A,a) \cup \delta(B,a) \Rightarrow \{A, B\}$$

$$= \bigcup \left(\begin{array}{l} \delta(p,a) \\ p \in \underline{\delta^{'}(A, \Lambda)} \end{array} \right) \rightarrow \{A\} \quad \rightarrow \delta(A,a) \Rightarrow \{A,B\}$$

จะได้ว่า X = aabbabaabaa ถูกยอมรับโดยเอ็นเอฟเอดังกล่าวเนื่องจากผลของการเดินมีสถานะยอมรับรวมอยู่ด้วย นั่นคือ $\{A, B, D\} \cap A = \{A\} \neq \phi$

■

หากพิจารณากลุ่มของภาษาที่นิยามโดยเอ็นเอฟเอ กับกลุ่มของภาษาที่นิยามโดยดีเอฟเอ จะพบว่ากลุ่มสองกลุ่มนี้เป็นกลุ่มเดียวกัน ดังนั้นในแง่ของการเป็นเครื่องที่ยอมรับภาษา ทั้งเอ็นเอฟเอและดีเอฟเอจะมีขีดความสามารถเท่าเทียมกันดังจะแสดงได้ในทฤษฎีบทต่อไปนี้

<u>ทฤษฎีบทที่ 4.1</u>

สำหรับ ออโตมาตาจำกัดเชิงไม่กำหนดใด ๆ **M** = $(Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ ที่ยอมรับภาษาL $\subseteq \Sigma^*$, จะมี ออโตมาตาจำกัด $\mathbf{M_1} = (Q_1, \Sigma, q_1, A_1, \delta_1)$ ที่ยอมรับภาษา **L** เช่นกัน

■

พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 4.1

เริ่มต้น $\mathbf{M_1}$จะถูกนิยามได้ดังนี้

1. $Q_1 = 2^Q$
2. $\Sigma = \Sigma$ เซตเดิม
3. $q_1 = \{ q_0 \}$
4. $A_1 = \{q \in Q_1 \mid q \cap A \neq \phi \}$
5. δ_1 นิยามได้ดังนี้ สำหรับ $q \in Q_1$และ $a \in \Sigma$

$$\delta_1(q, a) = \bigcup_{p \in q} \delta(p, a)$$

นิยามข้อ 4 เป็นจริงเพราะสายอักขระ x ควรจะถูกยอมรับโดย M_1 ถ้าเซตของสถานะซึ่ง M จะเดินสิ้นสุด (โดยเริ่มเดินจากสถานะเริ่มต้น q_0) เมื่ออ่านสายอักขระ x หมดและสมาชิกในเซตของสถานะที่เดินได้มีอย่างน้อยหนึ่งสถานะที่อยู่ใน A

การที่ M_1 ยอมรับภาษาเดียวกันกับ M จะเป็นไปตามความจริงที่ว่า สำหรับ $x \in \Sigma^*$ จะได้

$$\delta_1^*(q_1, x) = \delta^*(q_0, x)$$

จะพิสูจน์โดยวิธีอุปนัย (Induction Proof)

สังเกตว่าฟังก์ชันการผ่าน δ_1^* และ δ^* ถูกนิยามแตกต่างกัน δ^* นิยามในบทนิยามที่ 4.2 เมื่อ M เป็นเอ็นเอฟเอ และ δ_1^* นิยามในบทนิยามที่ 3.2 เมื่อ M_1 เป็นดีเอฟเอ

1. Basic Step: ถ้า $x = \Lambda$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\delta_1^*(q_1, x) &= \delta_1^*(q_1, \Lambda) \\
&= q_1 && \text{(ตามนิยาม } \delta_1^* \text{)} \\
&= \{q_0\} && \text{(ตามนิยามข้อ 3)} \\
&= \delta^*(q_0, \Lambda) && \text{(ตามนิยามของ } \delta^* \text{)} \\
&= \delta^*(q_0, x)
\end{aligned}$$

2. Induction Step: ให้ x เป็นสายอักขระใด ๆ $x \in \Sigma^*$ จะได้ฟังก์ชันการผ่านที่สอดคล้องกันระหว่างดีเอฟเอ กับเอ็นเอฟเอ คือ $\delta_1^*(q_1, x) = \delta^*(q_0, x)$

จะต้องพิสูจน์ให้ได้ว่า สำหรับ a ใด ๆ $a \in \Sigma$:

$\delta_1^*(q_1, xa) = \delta^*(q_0, xa)$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\delta_1^*(q_1, xa) &= \delta_1(\delta_1^*(q_1, x), a) && \text{(ตามนิยาม } \delta_1^* \text{)} \\
&= \delta_1(\delta^*(q_0, x), a) && \text{(โดย Induction Hypothesis)} \\
&= \bigcup_{p \in \delta^*(q_0, x)} \delta(p, a) && \text{(โดยนิยามของ } \delta_1 \text{ในข้อ 5)} \\
&= \delta^*(q_0, xa) && \text{(ตามนิยามของ } \delta^* \text{)}
\end{aligned}$$

จากการพิสูจน์จะได้ M และ M_1 นิยามภาษาเดียวกัน ซึ่งสำหรับสายอักขระ x ใด ๆ $x \in \Sigma^*$ จะได้ $\delta_1^*(q_1, x) = \delta^*(q_0, x)$

อาจพิจารณาได้ง่ายว่า สำหรับสายอักขระ x ใด ๆ $x \in \Sigma^*$ จะถูกยอมรับโดย M_1 ถ้า $\delta_1^*(q_1, x) \in A_1$ ข้อความนี้จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ $\delta^*(q_0, x) \in A_1$ และจากการใช้นิยามของ A_1 ในข้อ 4 จะสรุปได้ว่าข้อความดังกล่าวจะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ

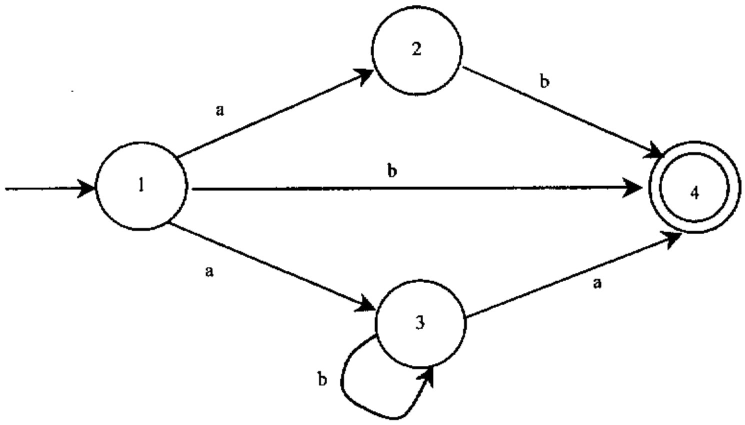
$\delta^*(q_0, x) \cap A \neq \phi$ หรือจะกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า สายอักขระ x ใด ๆ $x \in \Sigma^*$ จะถูกยอมรับโดย M_1 ก็ต่อเมื่อ สายอักขระ x จะต้องถูกยอมรับโดย M

จากการพิสูจน์ดังกล่าวทำให้สามารถทราบถึงวิธีการแปลงจากเอ็นเอฟเอไปเป็นดีเอฟเอ และถือว่าการพิสูจน์สมบูรณ์

■

ตัวอย่างที่ 4.2

จงแปลง เอ็นเอฟเอ M ต่อไปนี้ให้เป็น ดีเอฟเอ M_1 โดย $\Sigma = \{a, b\}$



สำหรับการสร้าง ดีเอฟเอโดยใช้การแปลงจาก เอ็นเอฟเอนั้นขั้นแรกต้องพิจารณาว่า เอ็นเอฟเอที่ให้มาประกอบด้วยอะไรบ้างโดยพิจารณาจากนิยามของเอ็นเอฟเอและจากที่โจทย์กำหนดมาให้ ซึ่งจะได้เอ็นเอฟเอที่สามารถแสดงรายละเอียดตามนิยามดังนี้

M = $(Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ โดยที่

$Q = \{1, 2, 3, 4\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$q_0 = 1$

$A = \{4\}$

δ แสดงได้ดังตารางการผ่านต่อไปนี้

q	$\delta(q, a)$	$\delta(q, b)$
1	{2, 3}	{4}
2	{}	{4}
3	{4}	{3}
4	{}	{}

จากนั้นพิจารณาตามขั้นตอนการพิสูจน์ในทฤษฎีบทที่ 4.1 เพื่อสร้างดีเอฟเอดังนี้

$M_1 = (Q_1, \Sigma, q_1, A_1, \delta_1)$ โดยที่

1. $Q_1 = 2^Q$

จะเห็นว่าสถานะที่จะนำมาใช้สร้างดีเอฟเอ ซึ่งได้จากเซตย่อยของ 2^Q มีจำนวนทั้งสิ้น 16 สถานะที่เป็นไปได้นั้นคือ {{}, {1}, {2}, {3}, {4}, {1, 2} {1, 3}, {1, 4}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 4}, {1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4}, {2, 3, 4}, {1, 2, 3, 4}} แต่อย่างไรก็ตามการนิยามดีเอฟเอ ที่ต้องการนี้อาจจะใช้สถานะน้อยกว่า 16 สถานะก็ได้เพราะการนิยามจะใช้เฉพาะสถานะที่สามารถเข้าถึงได้จากสถานะเริ่มต้นเท่านั้น

2. $\Sigma = \Sigma$ เซตเดิม

3. $q_1 = \{1\}$

4. $A_1 = \{q \in Q_1 \mid q \cap A \neq \phi\}$

เช่นเดียวกันการจะหา A_1 จะพิจารณาเฉพาะสถานะที่จะนำมาสร้าง เป็นดีเอฟเอเท่านั้น ซึ่งจะเก็บไว้พิจารณาภายหลังจากที่ได้หาฟังก์ชันการผ่าน δ_1 ในข้อ 5 เรียบร้อยแล้ว

5. δ_1 นิยามได้ดังนี้ สำหรับ $q \in Q_1$และ $a \in \Sigma$

$$\delta_1(q, a) = \bigcup_{p \in q} \delta(p, a)$$

สำหรับฟังก์ชันการผ่านของดีเอฟเอ จะทำการหาโดยเริ่มจากสถานะเริ่มต้นและเมื่อได้สถานะใหม่เกิดขึ้น จะมีการหาฟังก์ชันการผ่านให้กับสถานะนั้น ๆ ต่อไปอีกซึ่งจะมีการทำเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งไม่มีสถานะใหม่เกิดขึ้น

ในกรณีที่บางสถานะไม่สามารถเดินไปยังสถานะใดได้ นั่นคือเมื่อทำการหาฟังก์ชันการผ่านแล้วได้เซตว่าง ({} หรือ $\varnothing$) ให้ถือว่าเซตว่างเป็นสถานะหนึ่งสถานะและเป็นสถานะที่มีฟังก์ชันการผ่านเป็นการวนรอบด้วยสมาชิกทุกตัวใน Σ

รายละเอียดต่อไปนี้จะเป็นการหาสถานะทั้งหมด ที่จำเป็นต้องใช้ในการนิยามดีเอฟเอรวมทั้งฟังก์ชันการผ่านของแต่ละสถานะโดยทำการเริ่มต้นหาจากสถานะเริ่มต้น (สถานะ {1}) ดังนี้

$\delta_1 (\{1\}, a) \Rightarrow \{2, 3\}$

$\delta_1 (\{1\}, b) \Rightarrow \{4\}$

$$\delta_1 (\{2, 3\}, a) \Rightarrow (\delta^* \{2, 3\}, a) = \left(\bigcup_{p \in \{2, 3\}} \delta(p, a) \right) = \delta(2, a) \cup \delta(3, a) = \varnothing \cup \{4\} = \{4\}$$

$$\delta_1 (\{2, 3\}, b) \Rightarrow (\delta^* \{2, 3\}, b) = \left(\bigcup_{p \in \{2, 3\}} \delta(p, b) \right) = \delta(2, b) \cup \delta(3, b) = \{4\} \cup \{3\} = \{3, 4\}$$

$$\delta_1 (\{4\}, a) \Rightarrow (\delta^* \{4\}, a) = \left(\bigcup_{p \in \{4\}} \delta(p, a) \right) = \delta(4, a) = \varnothing$$

$$\delta_1 (\{4\}, b) \Rightarrow (\delta^* \{4\}, b) = \left(\bigcup_{p \in \{4\}} \delta(p, b) \right) = \delta(4, b) = \varnothing$$

$$\delta_1 (\{3, 4\}, a) \Rightarrow (\delta^* \{3, 4\}, a) = \left(\bigcup_{p \in \{3, 4\}} \delta(p, a) \right) = \delta(3, a) \cup \delta(4, a) = \{4\} \cup \varnothing = \{4\}$$

$$\delta_1 (\{3, 4\}, b) \Rightarrow (\delta^* \{3, 4\}, b) = \left(\bigcup_{p \in \{3, 4\}} \delta(p, b) \right) = \delta(3, b) \cup \delta(4, b) = \{3\} \cup \varnothing = \{3\}$$

δ_1 ({3}, a) $\Rightarrow$ ($\delta^{\cdot}$ {3}, a)

$$= \left(\bigcup_{p \in \{3\}} \delta(p, a)\right) = \delta(3, a) = \{4\}$$

δ_1 ({3}, b) $\Rightarrow$ ($\delta^{\cdot}$ {3}, b)

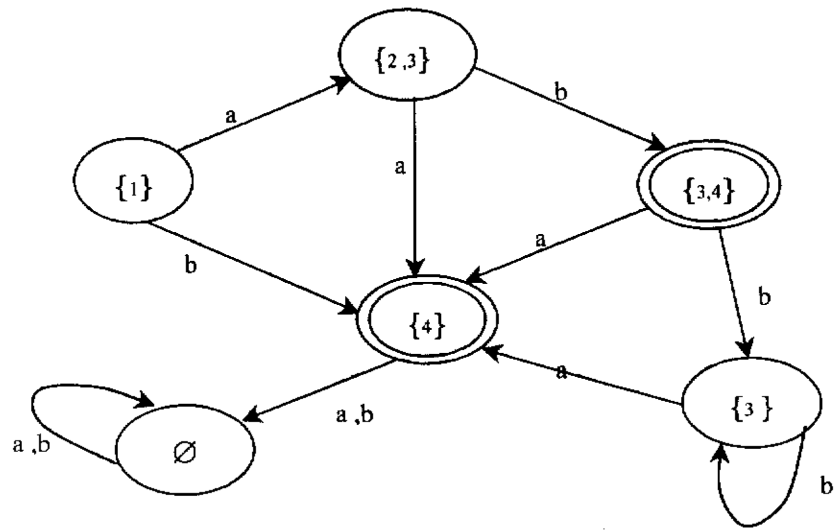
$$= \left(\bigcup_{p \in \{3\}} \delta(p, b)\right) = \delta(3, b) = \{3\}$$

สำหรับการพิจารณาสถานะยอมรับจะได้จากการนำเอา A = {4} มาทำผลร่วม (Intersection) กับแต่ละสถานะของ ดีเอฟเอ ที่ได้จากการหาข้างต้น (นั่นคือ {1}, {2 , 3}, {3 , 4}, {4}, และ {3}) โดยจะต้องไม่เท่ากับ $\varnothing$

(ตามนิยาม $A_1 = \{q \in Q_1 \mid q \cap A \neq \phi\}$)

ดังนั้นสถานะยอมรับที่ได้คือ $A_1 = \{\{3,4\}, \{4\}\}$

สุดท้ายจะสามารถนำเอาสิ่งที่หาได้ทั้งหมดมาสร้างแผนภาพการผ่านดังนี้



■

4.2 ออโตมาตาจำกัดเชิงไม่กำหนดที่มีการผ่านด้วยสายอักขระว่าง (Nondeterministic Finite Automata with empty string (Λ) transition หรือ เอ็นเอฟเอ-Λ (NFA-Λ))

สำหรับนิยามของเอ็นเอฟเอ-Λ สามารถนิยามได้ดังนี้

<u>บทนิยามที่ 4.4</u>

ออโตมาตาจำกัดเชิงไม่กำหนดที่มีการผ่านด้วยสายอักขระว่าง (Nondeterministic Finite Automata with empty string (Λ) transition) หรือ เอ็นเอฟเอ-Λ (NFA-Λ) ประกอบด้วยลำดับของสมาชิก 5 ตัว (5-Tuple) คือ (Q, Σ, q_0, A, δ) โดยที่

1. Q คือ เซตจำกัดของสถานะ
2. Σ คือ ชุดตัวอักษรของสัญลักษณ์รับเข้า
3. q_0 คือ สถานะเริ่มต้น (start state) 1 สถานะ; $q_0 \in Q$
4. A คือ เซตจำกัดของสถานะสิ้นสุด (final state) และอาจจะมีหรือไม่มีก็ได้ $A \subseteq Q$
5. δ คือ เซตจำกัดของฟังก์ชันการผ่าน (transitions function) ที่จะอธิบายแต่ละสถานะ และแต่ละสัญลักษณ์รับเข้าว่าจะต้องเดินทางไปยังสถานะใดต่อไป

เขียนให้อยู่ในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ได้เป็น

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\Lambda\}) \rightarrow 2^Q$$

2^Q หมายถึง เซตของเซตย่อย (Subset) ของ Q

■

เมื่อพิจารณาจากฟังก์ชันการผ่านของเอ็นเอฟเอ-Λ จะเห็นว่า สัญลักษณ์บนเส้นเชื่อมของการกำหนดทางเดินของเอ็นเอฟเอ-Λ จะเหมือนกับการกำหนดทางเดินของเอ็นเอฟเอ แต่จะยอมให้มีการเดินด้วย Λ (Λ-transition) เพิ่มเข้ามา

การตรวจสอบสายอักขระใด ๆ ว่าจะเป็นคำในภาษาที่มีเอ็นเอฟเอ-Λ สามารถแสดงได้โดยการใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ที่เรียกว่าฟังก์ชันการผ่าน แต่จะต้องมีการพิจารณาการผ่านด้วยสายอักขระว่างเพิ่มขึ้น ซึ่งวิธีพิจารณานั้นจะพิจารณาจาก Λ-โคลเชอร์ของเซตของสถานะ

(Λ-Closure of a set of states) ที่สามารถนิยามได้ดังนี้

<u>บทนิยามที่ 4.5</u>

(Λ-โคลเชอร์ของเซตของสถานะ(Λ-Closure of a set of states))

ให้ **M** = (Q, Σ, q_0, A, δ) ออโตมาตาจำกัดเชิงไม่กำหนดที่มีการผ่านด้วยสายอักขระว่างและให้ S เป็นเซตย่อยใดๆ ของ Q

Λ-โคลเชอร์ของ S คือ เซตซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ Λ(S) จะสามารถนิยามได้ดังนี้

1. ทุก ๆ สมาชิดของ S เป็นสมาชิกของ Λ(S)
2. สำหรับ q ใดๆ $q \in \Lambda(S)$, ทุก ๆ สมาชิกของ $\delta(q, \Lambda)$ จะอยู่ใน Λ(S) ด้วย
3. จะไม่มีสมาชิกอื่นๆ นอกจากสมาชิกที่ได้จากข้อ 1 และข้อ 2 ของ Q ที่อยู่ใน Λ(S) ■

จากนั้นฟังก์ชันการผ่านของเอ็นเอฟเอ-Λ จะนิยามได้ด้วยนิยามต่อไปนี้

<u>บทนิยามที่ 4.6</u>

ให้ M = (Q, Σ, q_0, A, δ) เป็นออโตมาตาจำกัดเชิงไม่กำหนดที่มีการผ่านด้วยสายอักขระว่าง กำหนดฟังก์ชันการผ่านของออโตมาตาจำกัดเชิงไม่กำหนดที่มีการผ่านด้วยสายอักขระว่าง โดยเขียนแทนด้วย δ^*

ที่ซึ่ง $\delta^* : Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$ ได้ดังนี้

1. สำหรับ q ใด ๆ $q \in Q$, $\delta^*(q, \Lambda) = \Lambda(\{q\})$
2. สำหรับ q ใด ๆ $q \in Q$, y ใด ๆ $y \in \Sigma^*$, และ a ใด ๆ $a \in \Sigma$ จะได้ว่า

$$\delta^*(q, ya) = \Lambda\left(\bigcup_{p \in \delta^*(q, y)} \delta(p, a)\right)$$

■

สำหรับการระบุว่าสายอักขระใดๆ จะถูกยอมรับโดยเอ็นเอฟเอ-Λ รวมถึงภาษาใดๆ ที่จะมีเอ็นเอฟเอ-Λ ยอมรับนั้นจะสามารถนิยามให้ชัดเจนได้ดังนี้

<u>บทนิยามที่ 4.7</u>

ให้ $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ เป็นออโตมาตาจำกัดเชิงไม่กำหนดที่มีการผ่านด้วยสายอักขระว่าง สายอักขระ $x \in \Sigma^*$ จะถูกยอมรับโดย M ถ้า $\delta^*(q_0, x) \cap A \neq \varnothing$

ส่วนภาษาที่ถูกยอมรับ (Accepted or Recognized) โดย M คือเซต

$L(M) = \{ x \in \Sigma^* \mid x$ ถูกยอมรับโดย $M\}$ โดยสามารถกล่าวในอีกนัยหนึ่งได้ว่า

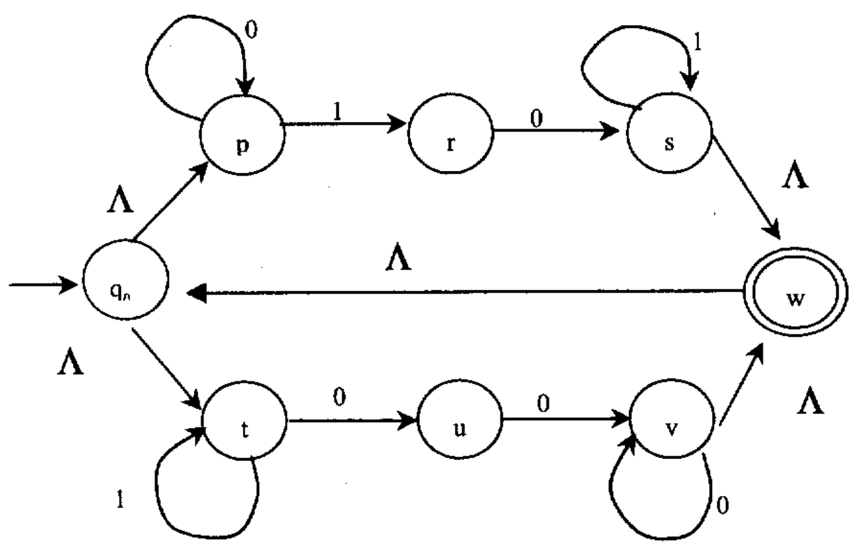
ถ้า L เป็นภาษาใด ๆ บน Σ, L จะถูกยอมรับโดย M ก็ต่อเมื่อ $L = L(M)$

■

ตัวอย่างที่ 4.3

จากรูป จงตรวจสอบคำที่ให้มาว่าถูกยอมรับโดยสายอักขระนี้หรือไม่ โดยสายอักขระที่จะตรวจสอบคือ

$x_1 = 010$, $x_2 = 01011001$



$\Sigma = \{0, 1\}$

$Q = \{ q_0, p, r, s, t, u, v, w \}$

$A = \{w\}$

δ = แสดงตามเส้นเชื่อมในแผนภาพการผ่านข้างต้น

ตรวจสอบ $\delta^*(q_0, x_1) = \delta^*(q_0, 010) = ?$

$$\delta^*(q_0, 010) = \Lambda\left(\bigcup_{p \in \delta^*(q_0, 01)} \delta(p, 0)\right) = \Lambda(\delta(r, 0)) = \Lambda(\{s\}) = \{s, w, q_0, p, t\}$$

เริ่มต้น สิ้นสุด

$$\delta^*(q_0, 01) = \Lambda\left(\bigcup_{p \in \delta^*(q_0, 0)} \delta(p, 1)\right) = \Lambda(\delta(p, 1) \cup \delta(u, 1)) = \Lambda(\{r\}) = \underline{\{r\}}$$

$$\delta^*(q_0, 0) = \Lambda\left(\bigcup_{p \in \delta^*(q_0, \Lambda)} \delta(p, 0)\right) = \Lambda(\delta(q_0, 1) \cup \delta(p, 0) \cup \delta(t, 0)) = \Lambda(\varnothing \cup \{p\} \cup \{u\}) = \underline{\{p, u\}}$$

$$\delta^*(q_0, \Lambda) = \Lambda(\{q_0\}) = \underline{\{q_0, p, t\}}$$

เนื่องจากเซตของสถานะสิ้นสุดคือ $\{w\}$และ $\delta^*(q_0, 010) = \{ s, w, q_0, p, t \}$ เมื่อ $\{w\} \cap \{ s, w, q_0, p, t \} = \{w\} \neq \varnothing$ จึงทำให้สายอักขระ x_1 ถูกยอมรับโดยเครื่อง เอ็นเอฟเอ-Λ ดังกล่าว

หมายเหตุ : จากการตรวจสอบสายอักขระ x_1 ซึ่งได้มีการแสดงเส้นทางการได้มาซึ่งผลลัพธ์แล้วนั้น สำหรับสายอักขระถัดไปจะไม่มีการแสดงเส้นทางการได้มาซึ่งผลลัพธ์อีก

ตรวจสอบ $\delta^*(q_0, x_2) = \delta^*(q_0, 01011001) = ?$

$$\delta^*(q_0, 01011001) = \Lambda\left(\bigcup_{p \in \delta^*(q_0, 0101100)} \delta(p, 1)\right) = \Lambda(\delta(v,1) \cup \delta(p,1) \cup \delta(u,1) \cup \delta(w,1) \cup \delta(q_0,1) \cup \delta(t,1)) = \Lambda(\{r, t\}) = \{q_0, p, t, w, s, r\}$$

$$\delta^*(q_0, 0101100) = \Lambda\left(\bigcup_{p \in \delta^*(q_0, 010110)} \delta(p, 0)\right) = \Lambda(\delta(u,0) \cup \delta(s,0) \cup \delta(p,0) \cup \delta(w,0) \cup \delta(q_0,0) \cup \delta(t,0)) = \Lambda(\{v, p, u\}) = \{v, p, u, w, q_0, t\}$$

$$\delta^*(q_0, 010110) = \Lambda\left(\bigcup_{p \in \delta^*(q_0, 01011)} \delta(p, 0)\right) = \Lambda(\delta(s,0) \cup \delta(t,0) \cup \delta(r,0) \cup \delta(w,0) \cup \delta(q_0,0) \cup \delta(p,0)) = \Lambda(\{u, s, p\}) = \{u, s, p, w, q_0, t\}$$

$$\delta^*(q_0, 01011) = \Lambda\left(\bigcup_{p \in \delta^*(q_0, 0101)} \delta(p, 1)\right) = \Lambda(\delta(s,1) \cup \delta(r,1) \cup \delta(t,1) \cup \delta(w,1) \cup \delta(q_0,1) \cup \delta(p,1)) = \Lambda(\{s, t, r\}) = \{s, t, r, w, q_0, p\}$$

$$\delta^*(q_0, 0101) = \Lambda\left(\bigcup_{p \in \delta^*(q_0, 010)} \delta(p, 1)\right) = \Lambda(\delta(s,1) \cup \delta(w,1) \cup \delta(q_0,1) \cup \delta(p,1) \cup \delta(t,1)) = \Lambda(\{s, r, t\}) = \{s, r, t, w, q_0, p\}$$

$$\delta^*(q_0, 010) = \Lambda\left(\bigcup_{p \in \delta^*(q_0, 01)} \delta(p, 0)\right) = \Lambda(\delta(r, 0) = \Lambda(\{s\}) = \{s, w, q_0, p, t\}$$

$$\delta^*(q_0, 01) = \Lambda\left(\bigcup_{p \in \delta^*(q_0, 0)} \delta(p, 1)\right) = \Lambda(\delta(p,1) \cup \delta(u,1)) = \Lambda(\{r\}) = \{r\}$$

$$\delta^*(q_0, 0) = \Lambda\left(\bigcup_{p \in \delta^*(q_0, \Lambda)} \delta(p, 0)\right) = \Lambda(\delta(q_0,1) \cup \delta(p,0) \cup \delta(t,0)) = \Lambda(\varnothing \cup \{p\} \cup \{u\}) = \{p, u\}$$

$$\delta^*(q_0, \Lambda) = \Lambda(\{q_0\}) = \{q_0, p, t\}$$

เนื่องจากเซตของสถานะสิ้นสุดคือ $\{w\}$และ $\delta^*(q_0, 01011001) = \{q_0, p, t, w, s, r\}$เมื่อ $\{w\} \cap \{q_0, p, t, w, s, r\} = \{w\} \neq \varnothing$ จึงทำให้สายอักขระ x_2 ถูกยอมรับโดยเครื่อง เอ็นเอฟเอ-Λ ดังกล่าว

■

หากพิจารณากลุ่มของภาษาที่ยอมรับโดยเอ็นเอฟเอ-Λ กับกลุ่มของภาษาที่ยอมรับโดยเอ็นเอฟเอ จะพบว่ากลุ่มภาษาสองกลุ่มนี้เป็นกลุ่มเดียวกัน ดังนั้นในแง่ของการเป็นเครื่องที่ยอมรับภาษา ทั้งเอ็นเอฟเอ-Λ และเอ็นเอฟเอจะมีขีดความสามารถเท่าเทียมกัน ดังจะแสดงได้ในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 4.2

ถ้าภาษา $L \subseteq \Sigma^*$ เป็นภาษาที่ถูกยอมรับโดย เอ็นเอฟเอ-Λ $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ จากนั้นจะมี เอ็นเอฟเอ $M_1 = (Q_1, \Sigma, q_1, A_1, \delta_1)$ ซึ่งยอมรับภาษา L เช่นเดียวกัน

■

พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 4.2

จาก $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ เป็น เอ็นเอฟเอ-Λ จะสามารถสร้าง $M_1 = (Q, \Sigma, q_0, A_1, \delta_1)$ เป็นเอ็นเอฟเอ ที่ซึ่งสำหรับ q ใด ๆ $q \in Q$ และ a ใด ๆ $a \in \Sigma$

$$\delta_1(q, a) = \delta^*(q, a)$$

และ

$$A_1 = \begin{cases} A \cup \{q_0\} \text{ ถ้า } \Lambda(\{q_0\}) \cap A \neq \varnothing \text{ ใน } M \\ A \text{ ถ้าเป็นกรณีอื่น} \end{cases}$$

สำหรับเป้าหมายการนิยาม δ_1 เนื่องจากต้องการให้ $\delta_1(q, a)$ ได้ผลลัพธ์เป็นเซตของสถานะที่เครื่อง M สามารถเข้าถึงจากสถานะ q โดยการอ่านสายอักขระ x รวมกับการทำฟังก์ชันการผ่านด้วย Λ (Λ-transition) หรืออีกนัยหนึ่งก็เพื่อต้องการให้

$$\delta_1^*(q, x) = \delta^*(q, x)$$

ในกรณีนี้อาจไม่เป็นจริงทั้งหมดเนื่องจาก $\delta_1^*(q, \Lambda)$ อาจจะมีความแตกต่างกับ $\delta^*(q, \Lambda)$ ซึ่งเหตุผลนี้เองจึงได้มีการนิยามสถานะยอมรับ A_1 ใหม่ ดังที่กล่าวมาแล้ว ส่วนกรณีอื่น ๆ จะถือได้ว่า $\delta_1^*(q, x) = \delta^*(q, x)$ เป็นจริง โดยจะพิสูจน์ให้เห็นด้วยวิธีอุปนัย (Induction proof) ดังนี้

1. Basic Step: พิจารณา x = a โดยที่ $a \in \Sigma$ จะได้ว่า

$\delta^*(q, a) = \delta_1(q, a)$ (ตามนิยาม δ_1)

และ $\delta_1(q, a) = \delta_1^*(q, a)$ (เนื่องจาก M_1 เป็นเอ็นเอฟเอซึ่งจะได้ว่าฟังก์ชันการผ่านของ δ_1 และ δ_1^* จะได้ค่าเท่ากันในกรณีที่สายอักขระที่จะตรวจสอบมีความยาวเป็น 1)

2. Induction Step: ให้ y เป็นสายอักขระใด ๆ $y \in \Sigma^*$ และ $|y| \geq 1$ จะได้ฟังก์ชันการผ่านที่สอดคล้องกันระหว่างเอ็นเอฟเอ กับเอ็นเอฟเอ-Λ คือ

$\delta_1^*(q, y) = \delta^*(q, y)$ สำหรับ q ใด ๆ $q \in Q$ จากนั้นจะต้องพิสูจน์ให้เห็นว่าสำหรับ a ใด ๆ $a \in \Sigma$ จะได้ $\delta_1^*(q, ya) = \delta^*(q, ya)$

$$\delta_1^*(q, ya) = \bigcup_{p \in \delta_1^*(q, y)} \delta_1(p, a) \quad \text{(จากนิยามของเอ็นเอฟเอ)}$$

$$= \bigcup_{p \in \delta^*(q, y)} \delta_1(p, a) \quad \text{(จาก Induction hypothesis)}$$

$$= \bigcup_{p \in \delta^*(q, y)} \delta^*(p, a) \quad \text{(จากนิยาม } \delta_1\text{)}$$

จากผลข้างต้น คาดหวังว่าเซตที่ได้คือ $\delta^*(q, ya)$ แต่จากที่ตั้งข้อสังเกตไว้คือ Λ-closure ของเซตนี้คือ $\delta^*(q, ya)$ (โดยนิยามของ δ^*) แต่สำหรับ $\delta^*(p, a)$ และ $\delta^*(q, y)$ ต่างก็เป็น Λ-closure ของตัวมัน (ตามนิยามของ δ^* เช่นกัน) และจะถือว่าเป็น Λ-closure สำหรับการ Union ด้วย นั่นคือจะสามารถกล่าวได้อีกนัยหนึ่งว่าเซตดังกล่าวจะเท่ากับ Λ-closure ของตัวมันเองและจะเท่ากับ

$\delta^*(q, ya)$ นั่นเอง ซึ่งทำให้การพิสูจน์สมบูรณ์

ถัดมาจะได้แสดงว่า M_1 สามารถนิยามภาษา L ซึ่งเป็นภาษาที่สามารถนิยามด้วย M เช่นกัน

ขั้นตอนแรกจะพิจารณากรณี $\Lambda(\{q_0\}) \cap A = \varnothing$ ใน M กรณีนี้หมายความว่าสายอักขระว่าง (Empty string) จะไม่ถูกยอมรับโดย M และ M_1 สำหรับสายอักขระ x อื่นๆ ก็ได้ทำการแสดงให้เห็นแล้วว่า $\delta_1^*(q, x) = \delta^*(q, x)$ ส่วนสถานะสิ้นสุดของ M และ M_1 นั้นก็เหมือนกัน ดังนั้น x จะถูกยอมรับโดย M_1 ก็ต่อเมื่อมันถูกยอมรับโดย M

อีกกรณีเมื่อ $\Lambda(\{q_0\}) \cap A \neq \varnothing$ ซึ่งได้กำหนดให้ $A_1 = A \cup \{q_0\}$ ในกรณีนี้หมายถึง เอ็นเอฟเอ-Λ สามารถเข้าถึงสถานะสิ้นสุดจากสถานะเริ่มต้น q_0 โดยใช้ฟังก์ชันการผ่านด้วย Λ (Λ-transition) แต่เมื่อเป็นเอ็นเอฟเอจะมีการตัด Λ ทิ้งซึ่งจะทำให้ฟังก์ชันการผ่านด้วย Λ (Λ-transition) ถูกตัดทิ้งไปด้วยและอาจทำให้ความหมายของเอ็นเอฟเอที่ยอมรับภาษาเดียวกันกับเอ็นเอฟเอ-Λเปลี่ยนไป วิธีแก้ปัญหาคือจะมีการกำหนดให้สถานะ q_0 เป็นสถานะยอมรับใน เอ็นเอฟเอด้วยซึ่งจะทำให้ M และ M_1 ยอมรับคำที่อยู่ในภาษาเดียวกันทั้งหมด

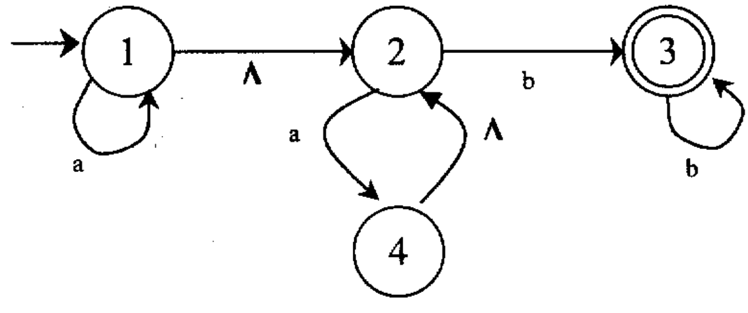
จากนิยาม $\delta^*(q, x)$ เป็นΛ-closure ของเซต ถ้า $\delta^*(q, x)$ ได้คำตอบโดยมี q_0 เป็นสมาชิกในคำตอบ Λ-closure จะต้องประกอบไปด้วยสมาชิกทุกตัวใน $\Lambda(\{q_0\})$

ดังนั้นเมื่อ $\Lambda(\{q_0\}) \cap A \neq \varnothing$ มันก็ต้องมีสมาชิกจาก A ตัวใดตัวหนึ่งเป็นสมาชิกของผลร่วม (intersection) นั่นเอง ในที่สุดจะสรุปได้ว่าทั้ง M และ M_1 ยอมรับสายอักขระเดียวกันอย่างแน่นอนซึ่งทำให้การพิสูจน์สมบูรณ์

■

ตัวอย่างที่ 4.4

จงแปลง เอ็นเอฟเอ-Λ ต่อไปนี้ไปเป็น เอ็นเอฟเอ



กระบวนการในการแปลง เอ็นเอฟเอ-Λ M = (Q, Σ, q_0, A, δ) ไปเป็น เอ็นเอฟเอ M_1 = (Q, Σ, q_0, A_1, δ_1) ตามการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 4.2 จะได้ว่า เซตของสถานะ Q, เซตของชุดตัวอักษรรับเข้า Σ, และสถานะเริ่มต้น q_0 จะเป็นตัวเดิมไม่มีการเปลี่ยนแปลง แต่สำหรับ เซตของสถานะยอมรับ A_1 และฟังก์ชันการผ่าน δ_1 จะเป็นชุดใหม่ ดังนั้นในขั้นตอนการแปลงนี้จะขอเริ่มหาที่ δ_1 ก่อน

การหา δ_1 จะพิจารณาจาก δ ของ เอ็นเอฟเอ-Λ ที่ให้มาซึ่งถ้าพิจารณาเขียนเป็นตารางการผ่านเพื่อความสะดวกในการอ้างถึงจะสามารถเขียนได้ดังนี้

q	δ(q, Λ)	δ(q, a)	δ(q, b)
1	{2}	{1}	{}
2	{}	{4}	{3}
3	{}	{}	{3}
4	{2}	{}	{}

ถัดมาจะได้เริ่มกระบวนการหา δ_1 ของเอ็นเอฟเอซึ่งจะหาได้จาก δ^* ของเอ็นเอฟเอ-Λโดยจะต้องหาฟังก์ชันการผ่านดังกล่าวในทุกสถานะที่มีอยู่ใน Q ดังแสดงวิธีการหาในแต่ละสถานะดังนี้

$$\delta_1(1, a) = \delta^*(1, a) = \Lambda\left(\bigcup_{p \in \underline{\delta^*(1, \Lambda)}} \delta(p, a)\right) = \Lambda(\delta(1, a) \cup \delta(2, a)) = \Lambda(\{1\} \cup \{4\}) = \Lambda(\{1,4\}) = \{1, 2, 4\}$$

$$\delta^*(1, \Lambda) = \Lambda(\{1\}) = \{1,2\}$$

$$\delta_1(1, b) = \delta^*(1, b) = \Lambda\left(\bigcup_{p \in \underline{\delta^*(1, \Lambda)}} \delta(p, b)\right) = \Lambda(\delta(1, b) \cup \delta(2, b)) = \Lambda(\varnothing \cup \{3\}) = \Lambda(\{3\}) = \{3\}$$

$$\delta^*(1, \Lambda) = \Lambda(\{1\}) = \{1,2\}$$

$$\delta_1(2,a) = \delta'(2,a) = \Lambda \left(\bigcup_{p \in \underline{\delta'(2,\Lambda)}} \delta(p,a) \right) = \Lambda(\delta(2,a)) = \Lambda(\{4\}) = \{4, 2\}$$

$$\delta'(2,\Lambda) = \Lambda(\{2\}) = \{2\}$$

$$\delta_1(2,b) = \delta'(2,b) = \Lambda \left(\bigcup_{p \in \underline{\delta'(2,\Lambda)}} \delta(p,b) \right) = \Lambda(\delta(2,b)) = \Lambda(\{3\}) = \{3\}$$

$$\delta'(2,\Lambda) = \Lambda(\{2\}) = \{2\}$$

$$\delta_1(3,a) = \delta'(3,a) = \Lambda \left(\bigcup_{p \in \underline{\delta'(3,\Lambda)}} \delta(p,a) \right) = \Lambda(\delta(3,a)) = \Lambda(\varnothing) = \varnothing$$

$$\delta'(3,\Lambda) = \Lambda(\{3\}) = \{3\}$$

$$\delta_1(3,b) = \delta'(3,b) = \Lambda \left(\bigcup_{p \in \underline{\delta'(3,\Lambda)}} \delta(p,b) \right) = \Lambda(\delta(3,b)) = \Lambda(\{3\}) = \{3\}$$

$$\delta'(3,\Lambda) = \Lambda(\{3\}) = \{3\}$$

$$\delta_1(4,a) = \delta'(4,a) = \Lambda \left(\bigcup_{p \in \underline{\delta'(4,\Lambda)}} \delta(p,a) \right) = \Lambda(\delta(2,a) \cup \delta(4,a)) = \Lambda(\{4\} \cup \varnothing) = \{4, 2\}$$

$$\delta'(4,\Lambda) = \Lambda(\{4\}) = \{4, 2\}$$

$$\delta_1(4,b) = \delta'(4,b) = \Lambda \left(\bigcup_{p \in \underline{\delta'(4,\Lambda)}} \delta(p,b) \right) = \Lambda(\delta(2,b) \cup \delta(4,b)) = \Lambda(\{3\} \cup \varnothing) = \{3\}$$

$$\delta'(4,\Lambda) = \Lambda(\{4\}) = \{4, 2\}$$

จากฟังก์ชันการผ่านของเอ็นเอฟเอที่หาได้ข้างต้นสามารถนำมาเขียนเป็นตาราง การผ่านโดยแสดงเปรียบเทียบกับตารางการผ่านของ เอ็นเอฟเอ-Λ ได้ดังตารางต่อไปนี้

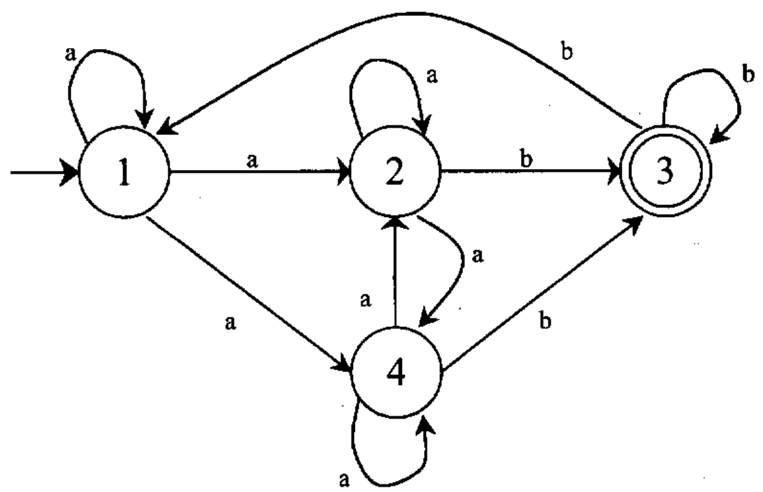
q	$\delta(q, \Lambda)$	$\delta(q, a)$	$\delta(q, b)$	$\delta_1(4, b) = \delta^*(4, b)$	$\delta_1(4, b) = \delta^*(4, b)$
1	{2}	{1}	{}	{1, 2, 4}	{3}
2	{}	{4}	{3}	{2, 4}	{3}
3	{}	{}	{3}	{}	{3}
4	{2}	{}	{}	{2, 4}	{3}

ขั้นตอนถัดมาจะเป็นการหาเซตของสถานะยอมรับของเอ็นเอฟเอ ซึ่งในทฤษฎีบทที่ 4.2 มีการพิจารณาเป็นสองแนวทางคือ

$$A_1 = \begin{cases} A \cup \{ q_0 \} \text{ ถ้า } \Lambda(\{ q_0 \}) \cap A \neq \varnothing \text{ ใน } M \\ A \text{ ถ้าเป็นกรณีอื่น} \end{cases}$$

จากที่ได้พิจารณาจะเห็นว่า$\Lambda(\{ q_0 \}) = \Lambda(\{1\}) = \{1,2\}$ และเมื่อนำเอา $\{1,2\} \cap A = \{1,2\} \cap \{3\} = \varnothing$ ซึ่งจะเป็นไปตามเงื่อนไขที่ 2 ดังนั้นจะสรุปได้ว่า $A_1 = A = \{3\}$

ขั้นตอนสุดท้ายสามารถนำเอาองค์ประกอบที่ได้ทั้งหมดมาเขียนเป็นแผนภาพการผ่าน เอ็นเอฟเอ ได้ดังแผนภาพต่อไปนี้



■

ขณะนี้ผู้อ่านได้รู้จักออโตมาตาจำกัด 3 ชนิดด้วยกันคือ ดีเอฟเอ เอ็นเอฟเอ และ เอ็นเอฟเอ-Λ การวัดระดับความสามารถของเครื่องแต่ละชนิดจะวัดด้วยกลุ่มของภาษาที่นิยามด้วยออโตมาตาจำกัดแต่ละชนิด สำหรับในทฤษฎีบทต่อไปนี้จะแสดงถึงขีดความสามารถของการเป็นเครื่องที่นิยามภาษาที่มีความเท่าเทียมกันของออโตมาตาจำกัดทั้งสาม

<u>ทฤษฎีบทที่ 4.3</u>

สำหรับอักขระใดๆ ใน Σ และภาษาใดๆ $L \subseteq \Sigma^*$ ข้อความทั้งสามข้อต่อไปนี้ถือว่าสมมูลกัน (Equivalence)

1. L สามารถถูกนิยามหรือยอมรับได้โดย ดีเอฟเอ
2. L สามารถถูกนิยามหรือยอมรับได้โดย เอ็นเอฟเอ
3. L สามารถถูกนิยามหรือยอมรับได้โดย เอ็นเอฟเอ-Λ

■

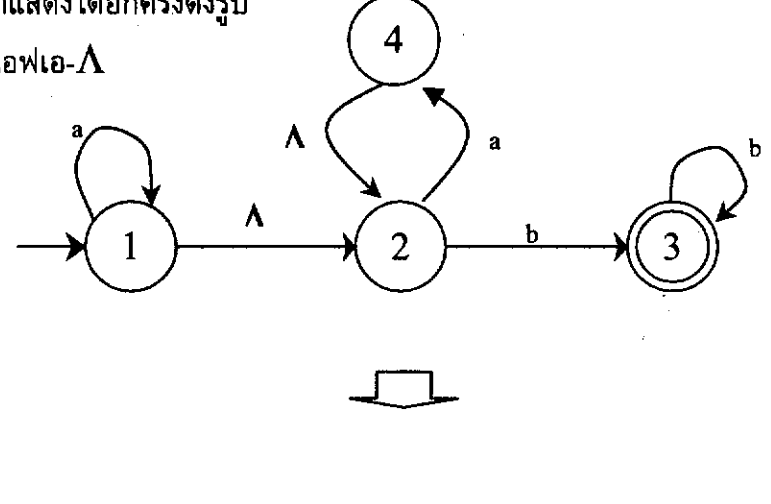
ตัวอย่างที่ 4.5

จงแปลง เอ็นเอฟเอ-Λ จากตัวอย่างที่ 4.4 ไปเป็น ดีเอฟเอ

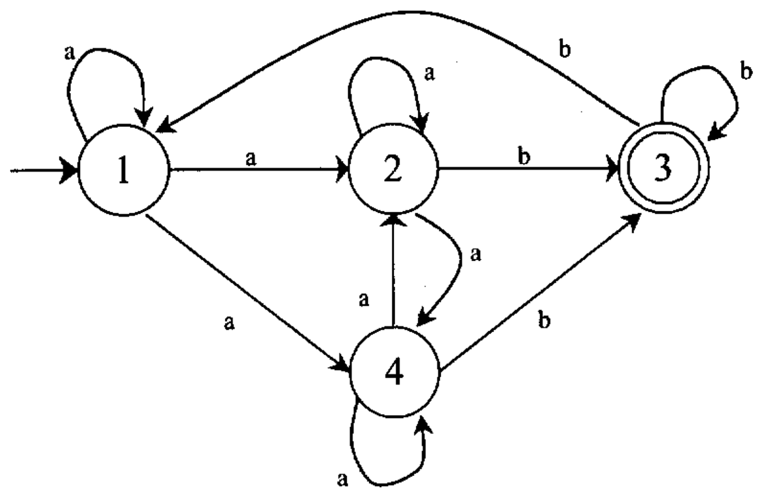
ในตัวอย่างนี้จะได้นำเอาทฤษฎีบทที่ 4.1 และ 4.2 มาช่วยในการนิยาม ดีเอฟเอ ซึ่งสามารถทำได้โดยใช้ทฤษฎีบทที่ 4.2 แปลง เอ็นเอฟเอ-Λ ไปเป็น เอ็นเอฟเอก่อน จากนั้นจึงใช้ทฤษฎีบทที่ 4.1แปลง เอ็นเอฟเอที่ได้ไปเป็น ดีเอฟเอ ในที่สุด

จากตัวอย่างก่อนหน้าได้ทำการแปลง เอ็นเอฟเอ-Λ ไปเป็น เอ็นเอฟเอ เรียบร้อยแล้วซึ่งสามารถแสดงได้อีกครั้งดังรูป

จาก เอ็นเอฟเอ-Λ



จะได้ เอ็นเอฟเอ



จากนั้นจะแปลง เอ็นเอฟเอดังกล่าวไปเป็น ดีเอฟเอดังนี้

$\delta_1 (\{1\}, a) \Rightarrow \{1, 2, 4\}$

$\delta_1 (\{1\}, b) \Rightarrow \varnothing$

$$\delta_1 (\{1, 2, 4\}, a) \Rightarrow (\delta' \{1, 2, 4\}, a)$$

$$\cup \begin{pmatrix} \delta(p, a) \\ p \in \{1, 2, 4\} \end{pmatrix} = \delta(1, a) \cup \delta(2, a) \cup \delta(4, a) = \{1, 2, 4\} \cup \{2, 4\} \cup \{2, 4\} = \{1, 2, 4\}$$

$$\delta_1 (\{1, 2, 4\}, b) \Rightarrow (\delta' \{1, 2, 4\}, b)$$

$$\cup \begin{pmatrix} \delta(p, b) \\ p \in \{1, 2, 4\} \end{pmatrix} = \delta(1, b) \cup \delta(2, b) \cup \delta(4, b) = \varnothing \cup \{3\} \cup \{3\} = \{3\}$$

$\delta_1(\{3\}, a) \Rightarrow (\delta^{*}\{3\}, a)$

$$\cup\begin{pmatrix}\delta(p, a)\\ p\in\{3\}\end{pmatrix} \quad \begin{aligned}&= \delta(3, a)\\ &= \varnothing\end{aligned}$$

$\delta_1(\{3\}, b) \Rightarrow (\delta^{*}\{3\}, b)$

$$\cup\begin{pmatrix}\delta(p, b)\\ p\in\{3\}\end{pmatrix} \quad \begin{aligned}&= \delta(3, b)\\ &= \{1, 3\}\end{aligned}$$

$\delta_1(\{1, 3\}, a) \Rightarrow (\delta^{*}\{1, 3\}, a)$

$$\cup\begin{pmatrix}\delta(p, a)\\ p\in\{1, 3\}\end{pmatrix} \quad \begin{aligned}&= \delta(1, a) \cup \delta(3, a)\\ &= \{1, 2, 4\} \cup \varnothing = \{1, 2, 4\}\end{aligned}$$

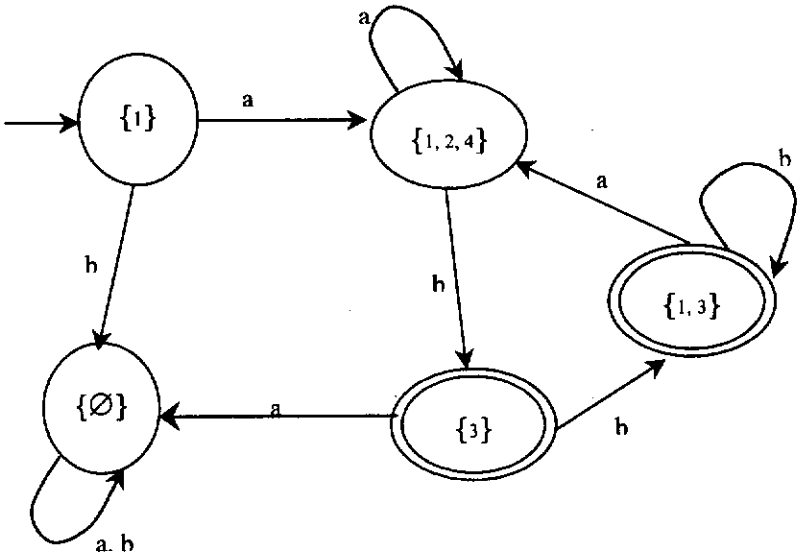
$\delta_1(\{1, 3\}, b) \Rightarrow (\delta^{*}\{1, 3\}, b)$

$$\cup\begin{pmatrix}\delta(p, b)\\ p\in\{1, 3\}\end{pmatrix} \quad \begin{aligned}&= \delta(1, b) \cup \delta(3, b)\\ &= \varnothing \cup \{1, 3\} = \{1, 3\}\end{aligned}$$

$A_{NFA} = \{3\}$ หาสถานะยอมรับจากการนำเอา A_{NFA} มา Intersect กับสถานะของ ดีเอฟเอ ที่หาได้จากการทำฟังก์ชันการผ่านข้างต้น โดยจะได้

$$\{3\} \cap \{\{1\}, \{1, 2, 4\}, \{3\}, \{1, 3\}\} = \{\{3\}, \{1, 3\}\} = A_{DFA}$$

สุดท้ายสามารถแสดงแผนภาพการผ่านของออโตมาตาจำกัดเชิงไม่กำหนดที่ต้องการได้ดังรูปต่อไปนี้


{1}
a
{1, 2, 4}
a
b
b
a
b
{1, 3}
{∅}
a
{3}
b
a, b

■

4.3 กราฟการผ่าน (Transition Graphs)

กราฟการผ่านแบ่งได้เป็น 2 แบบคือกราฟการผ่าน (Transition Graph) หรือทีจี (TG) และกราฟการผ่ายวางนัยทั่วไป (Generalized Transition Graph) หรือ จีทีจี (GTG) ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในตอนต้น นอกจากจะได้เรียนรู้นิยามของกราฟการผ่านแล้ว ยังจะได้นำเอากราฟการผ่านไปใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทของคลีนด้วยซึ่งจะได้กล่าวต่อไป

สำหรับบทนิยามของทีจี สามารถนิยามได้ดังนี้

<u>บทนิยามที่ 4.8</u>

กราฟการผ่าน (transition graph) หรือ ทีจี (TG) ประกอบด้วยลำดับของสมาชิก 5 ตัว (5-Tuple) คือ (Q, Σ, S, A, δ) โดยที่

1. Q คือ เซตจำกัดของสถานะ
2. Σ คือ ชุดตัวอักษรของสัญลักษณ์รับเข้า
3. S คือ เซตจำกัดของสถานะเริ่มต้น (start state) อย่างน้อย 1 สถานะ; $S \subseteq Q$
4. A คือ เซตจำกัดของสถานะสิ้นสุด (final state) และอาจจะมีหรือไม่มีก็ได้; $A \subseteq Q$
5. δ คือ เซตจำกัดของฟังก์ชันการผ่าน (transitions function) ที่อธิบายถึง วิธีที่จะเดินทางจากสถานะหนึ่ง ไปยังอีกสถานะหนึ่งโดยได้จากการอ่านสายอักขระย่อยหรือการอ่านสายอักขระว่าง Λ เขียนให้อยู่ในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ได้เป็น

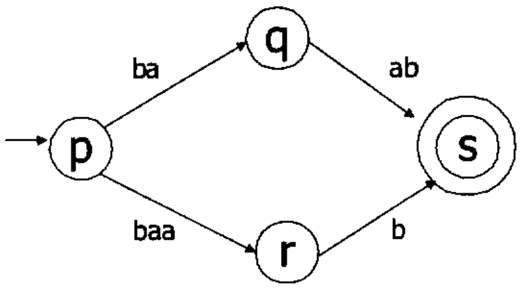
$$\delta : Q \times \Sigma^{*} \rightarrow 2^{Q}$$

2^{Q} หมายถึง เซตของเซตย่อย (Subset) ของ Q

■

จะเห็นว่า ทีจี สามารถมีสถานะเริ่มต้นได้หลายสถานะ และการทำงานของทีจีนั้นสามารถอ่านสัญลักษณ์จากสายอักขระรับเข้าได้มากกว่าทีละ 1 สัญลักษณ์ นั่นคือสามารถอ่านสายอักขระย่อย หรืออ่านสายอักขระว่างได้ ซึ่งทำให้ลำดับของสถานะมีได้มากกว่า 1 เส้นทาง เนื่องจากสามารถอ่านสายอักขระย่อยได้หลายวิธี จะเห็นว่าทีจีสามารถมีสถานะ

เริ่มต้น ได้หลายสถานะและการทำงานของทีจีนั้น สามารถอ่านสัญลักษณ์จากสายอักขระรับเข้า ได้มากกว่าทีละ 1 สัญลักษณ์ นั่นคือสามารถอ่านสายอักขระย่อย หรืออ่านสายอักขระว่าง ได้ ซึ่งทำให้ลำดับของสถานะ มีได้มากกว่า 1 เส้นทาง เนื่องจากสามารถอ่านสายอักขระย่อย ได้หลายวิธี ตัวอย่างเช่น



ลองพิจารณาว่าคำ baab จะถูกยอมรับโดยทีจีดังกล่าวนี้หรือไม่ โดยเริ่มต้นที่สถานะเริ่มต้นจากนั้นอ่าน ba ซึ่งทำให้เดินทางไปยังสถานะ q จากนั้นอ่าน ab ซึ่งทำให้เดินทางไปยังสถานะสิ้นสุด ดังนั้นทีจีดังกล่าวนี้จึงยอมรับคำ baab แต่ว่ายังมีวิธีอื่นๆ ในการอ่านสัญลักษณ์จากสายอักขระรับเข้าได้อีก เช่น เริ่มต้นที่สถานะเริ่มต้นจากนั้นอ่าน baa ซึ่งทำให้เดินทางไปยังสถานะ y จากนั้นอ่าน b ซึ่งทำให้สามารถเดินทางไปยังสถานะสิ้นสุด ได้ ดังนั้นทีจีนี้จึงยอมรับคำ baab แต่ถ้าลองพิจารณาเส้นทางอื่นดูบ้างเช่น จากสถานะเริ่มต้น ถ้าอ่าน b จะพบว่าไม่มีเส้นเชื่อมออก ใดที่เขียนกำกับด้วย b เลย ทำให้ไม่สามารถเดินทางต่อไปได้ ดังนั้นจะสิ้นสุดการเดินทางที่จุดนี้ นั่นคือทีจี ดังกล่าวนี้ไม่ยอมรับคำ baab เนื่องจากการทำงานไม่ได้สิ้นสุดที่สถานะสิ้นสุด

จะพบว่ามีมากกว่า 1 เส้นทางที่ baab สามารถเดินได้บนทีจีนี้ ซึ่งมีทั้งเส้นทางที่ถูกยอมรับและไม่ยอมรับ ดังนั้นจะนิยามความหมายของการยอมรับคำของทีจีดังนี้คือ ถ้ามีอย่างน้อย 1 เส้นทางที่สามารถเดินทางไปถึงสถานะสิ้นสุดจะกล่าวว่าทีจีจะยอมรับสายอักขระรับเข้านั้น จะเห็นว่าในแต่ละขั้นของการเดินทางนั้น ต้องทำการตัดสินใจว่าจะแบ่งคำเป็นสายอักขระย่อยได้อย่างไร เพื่อให้สอดคล้องกับสายอักขระย่อยหรือสัญลักษณ์ที่เขียนกำกับอยู่บนเส้นเชื่อม

นอกจากนี้ จะไม่จำเป็นต้องระบุถึงจำนวนของเส้นเชื่อมออกที่ออกจากแต่ละสถานะว่าต้องมีจำนวนเท่ากับจำนวนสมาชิกในชุดตัวอักษร เส้นเชื่อมออกของแต่ละสถานะบางเส้น อาจมีสัญลักษณ์เขียนกำกับเหมือนกันได้มากกว่า 1 เส้นเชื่อม หรือสัญลักษณ์บางตัวจากชุดตัวอักษรอาจไม่ถูกเขียนกำกับบนเส้นเชื่อมออกก็ได้

ลักษณะของเครื่องที่ต้องมีการตัดสินใจของคนเข้ามาเกี่ยวข้องในการอ่านสายอักขระรับเข้าว่าจะอ่านสัญลักษณ์ทีละกี่ตัว หรือต้องตัดสินใจว่าจะต้องเลือกเดินไปตามเส้นทางไหนนั้น กล่าวว่าเครื่อง นี้เป็นลักษณะเชิงไม่กำหนด (non-deterministic)

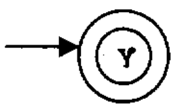
<u>หมายเหตุ</u> สังเกตว่า ทุก ๆ เอฟเอ ก็เป็นทีจี ด้วย

ตัวอย่างที่ 4.6

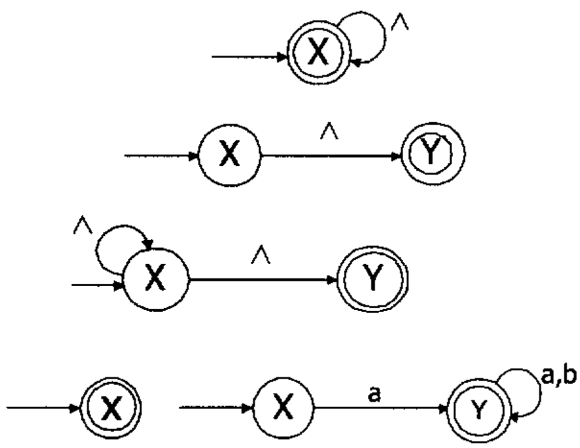
ทีจีดังกล่าวนี้ไม่ยอมรับคำใด ๆ เลย เนื่องจากไม่มีสถานะสิ้นสุด

■

ตัวอย่างที่ 4.7

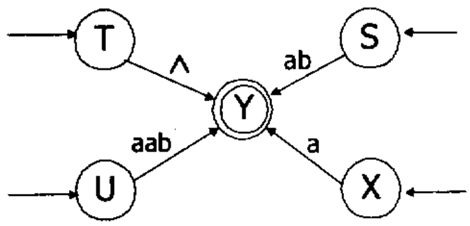


ทีจีดังกล่าวนี้ยอมรับเฉพาะคำ Λ นอกจากนี้ยังมีทีจี อื่น ๆ ที่ยอมรับเฉพาะ Λ ได้อีกเช่น



■

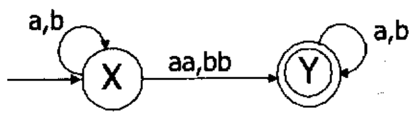
ตัวอย่างที่ 4.8



ทีจีดังกล่าวนี้ยอมรับเฉพาะคำ Λ , a , ab , aab

■

ตัวอย่างที่ 4.9

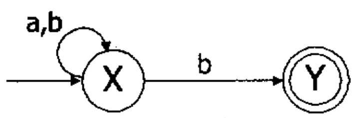


ทีจีดังกล่าวนี้ยอมรับคำทุกคำที่ประกอบด้วย aa หรือ bb

$(a+b)^*(aa+bb)(a+b)^*$

■

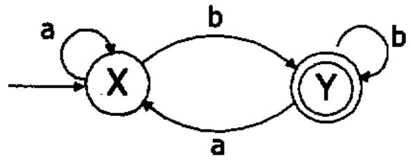
ตัวอย่างที่ 4.10



ทีจี ดังกล่าวนี้ยอมรับคำทุกคำที่ลงท้ายด้วย b

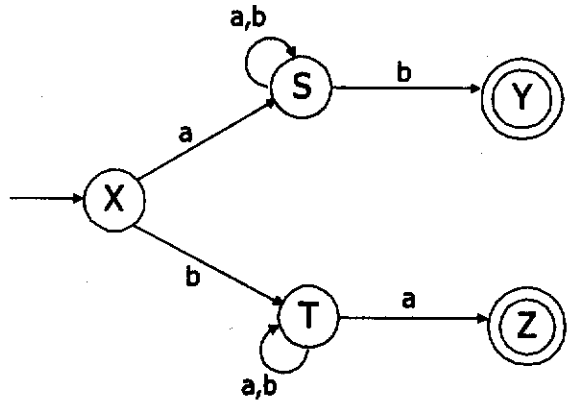
$(a+b)^*b$

จะเห็นว่าสามารถเข้าใจความหมายของทีจีดังกล่าวนี้ได้ง่ายกว่าเอฟเอต่อไปนี้ ที่ซึ่งยอมรับคำทุกคำที่ลงท้ายด้วย b เช่นเดียวกัน



■

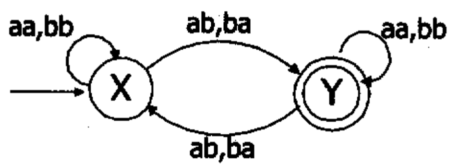
ตัวอย่างที่ 4.11



ทีจีดังกล่าวนี้ยอมรับคำทุกคำที่ขึ้นต้นด้วย a และลงท้ายด้วย b หรือขึ้นต้นด้วย b ลงท้ายด้วย a

■

ตัวอย่างที่ 4.12



ทีจีดังกล่าวนี้ยอมรับภาษา EVEN-EVEN

■

ถัดมาจะเป็นนิยามของจีทีจีซึ่งสามารถนิยามได้ดังนี้

<u>บทนิยามที่ 4.9</u>

กราฟการผ่านวางนัยทั่วไป (generalized transition graph) หรือ จีทีจี (GTG) ประกอบด้วยลำดับของสมาชิก 5 ตัว (5-Tuple) คือ (Q, Σ, S, A, δ) โดยที่

1. Q คือ เซตจำกัดของสถานะ
2. Σ คือ ชุดตัวอักษร ของสัญลักษณ์รับเข้า
3. S คือ เซตจำกัดของสถานะเริ่มต้น (start state) อย่างน้อย 1 สถานะ ; $S \subseteq Q$
4. A คือ เซตจำกัดของสถานะสิ้นสุด (final state) และอาจจะมีหรือไม่มีก็ได้; $A \subseteq Q$
5. δ คือ เซตจำกัดของฟังก์ชันการผ่าน (transitions function) ที่อธิบายถึง วิธีที่จะเดินทางจากสถานะหนึ่ง โดยเส้นเชื่อมระบุทิศทาง (directed edges) ที่เชื่อมระหว่างสถานะแต่ละเส้นเชื่อมจะถูกเขียนกำกับด้วยนิพจน์ปกติ ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ได้เป็น

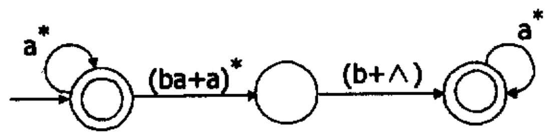
$$\delta : Q \times RE \rightarrow 2^Q$$

RE เป็นนิพจน์ปกติบน Σ

2^Q หมายถึง เซตของเซตย่อย (Subset) ของ Q

■

ตัวอย่างที่ 4.13



จีทีจี ดังกล่าวนี้ยอมรับคำทุกคำยกเว้นคำที่ประกอบด้วย bb

■

สรุปความสัมพันธ์ระหว่าง ดีเอฟเอ เอ็นเอฟเอ เอ็นเอฟเอ-Λ ทีจี และ จีทีจี

ความสัมพันธ์ของเครื่องหรือตัวแบบย่อยทั้ง 5 ตัวนี้ จะพิจารณาจากฟังก์ชันการผ่านดังต่อไปนี้

1. การระบุฟังก์ชันการผ่านของดีเอฟเอแสดงได้ด้วยสูตรทางคณิตศาสตร์ดังนี้คือ

$$\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$$

จากฟังก์ชันการผ่านของดีเอฟเอ สามารถตีความได้ว่า สัญลักษณ์บนเส้นเชื่อมของการกำหนดทางเดินของดีเอฟเอจะต้องระบุทิศทางที่เป็นได้ทั้งหมดจาก Σ ให้กับแต่ละสถานะ และต้องกำหนดทางเดินของสมาชิกใน Σ แต่ละตัวให้มีทางเดินเพียงเส้นทางเดียวในแต่ละสถานะ

2. การระบุฟังก์ชันการผ่านของเอ็นเอฟเอแสดงได้ด้วยสูตรทางคณิตศาสตร์ดังนี้คือ

$$\delta: Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$$

จากฟังก์ชันการผ่านของเอ็นเอฟเอ สามารถตีความได้ว่า สัญลักษณ์บนเส้นเชื่อมของการกำหนดทางเดินของเอ็นเอฟเอจะระบุทิศทางที่เป็นทางเดินที่จะทำให้สายอักขระในภาษาที่กำลังพิจารณาถูกยอมรับเท่านั้น และการกำหนดทางเดินของสมาชิกแต่ละตัวใน Σ ในแต่ละสถานะอาจจะไม่มีทางเดินหรือถ้ามีก็อาจมีมากกว่า 1 เส้นทางก็ได้

3. การระบุฟังก์ชันการผ่านของเอ็นเอฟเอ-Λ แสดงได้ด้วยสูตรทางคณิตศาสตร์ดังนี้คือ

$$\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\Lambda\}) \rightarrow 2^Q$$

จากฟังก์ชันการผ่านของเอ็นเอฟเอ-Λ สามารถตีความได้ว่า สัญลักษณ์บนเส้นเชื่อมของการกำหนดทางเดินของเอ็นเอฟเอ-Λ จะเหมือนกับการกำหนดทางเดินของเอ็นเอฟเอ แต่จะยอมให้มีการเดินด้วย Λ (Λ-transition) เพิ่มเข้ามา

4. การระบุฟังก์ชันการผ่านของทีจีแสดงได้ด้วยสูตรทางคณิตศาสตร์ดังนี้คือ

$$\delta: Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$$

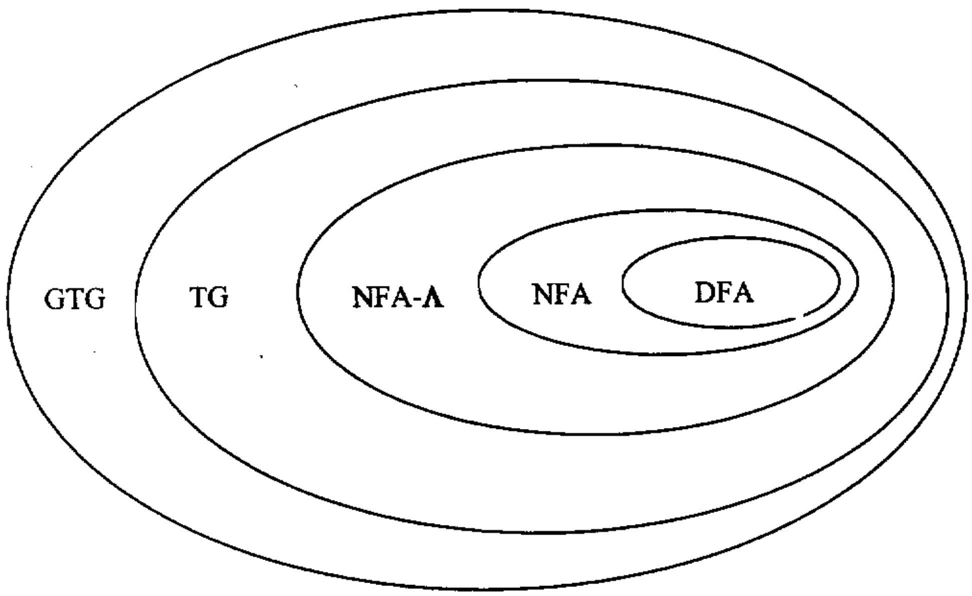
จากฟังก์ชันการผ่านของทีจี สามารถตีความได้ว่า สัญลักษณ์บนเส้นเชื่อมของการกำหนดทางเดินของทีจีจะเหมือนกับ เอ็นเอฟเอ-Λ แต่จะยอมให้ใช้สัญลักษณ์ที่เป็นสายอักขระย่อยใน Σ^* ด้วย

5. การระบุฟังก์ชันการผ่านของจีทีจีแสดงได้ด้วยสูตรทางคณิตศาสตร์ดังนี้คือ

$$\delta : Q \times RE \rightarrow 2^Q$$

จากฟังก์ชันการผ่านของจีทีจีสามารถตีความได้ว่า สัญลักษณ์บนเส้นเชื่อมของการกำหนดทางเดินของจีทีจีจะเหมือนกับทีจี แต่จะยอมให้ใช้สัญลักษณ์ที่เป็นนิพจน์ปกติที่สร้างจาก Σ ด้วย

จากรายละเอียดข้างต้นสามารถสรุปความสัมพันธ์ได้ดังรูปต่อไปนี้



4.4 ทฤษฎีบทของคลีน (Kleene's Theorem)

<u>ทฤษฎีบทที่ 4.4</u>

ภาษาใด ๆ ที่สามารถถูกนิยามได้ด้วย

1. นิพจน์ปกติ (regular expression)

หรือ 2. ออโตมาตาจำกัด (finite automata)

หรือ 3. กราฟการผ่าน (Transition graph)

จะสามารถถูกนิยามได้ทั้ง 3 วิธี

■

การพิสูจน์จะพิจารณาเป็น 3 ส่วน คือ

ส่วน 1 : ทุก ๆ ภาษาที่สามารถนิยามหรือยอมรับได้ด้วยออโตมาตาจำกัด จะสามารถถูกนิยามหรือยอมรับได้ด้วยกราฟการผ่าน

ส่วน 2 : ทุก ๆ ภาษาที่สามารถนิยามหรือยอมรับได้ด้วยกราฟการผ่าน จะสามารถถูกนิยามได้ด้วยนิพจน์ปกติ

ส่วน 3 : ทุก ๆ ภาษาที่สามารถนิยามได้ด้วยนิพจน์ปกติ จะสามารถถูกนิยามหรือยอมรับได้ด้วยออโตมาตาจำกัด

<u>การพิสูจน์ส่วนที่ 1</u>

เนื่องจากทุก ๆ ออโตมาตาจำกัด เป็นกราฟการผ่านดังนั้นภาษาใด ๆ ที่นิยามหรือยอมรับได้ด้วยออโตมาตาจำกัดก็สามารถถูกนิยามหรือยอมรับได้ด้วยกราฟการผ่าน

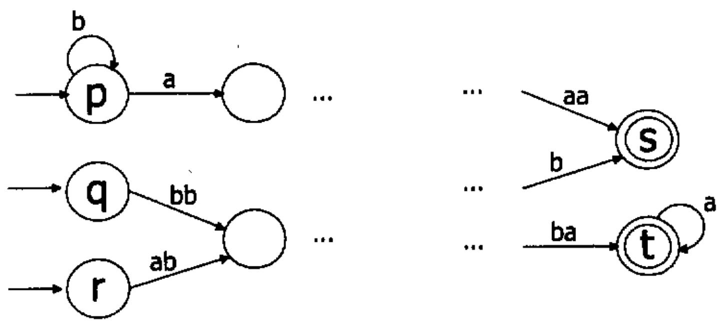
<u>การพิสูจน์ส่วนที่ 2</u>

การพิสูจน์ส่วนนี้จะทำโดยการใช้ **ขั้นตอนวิธีสร้างเสริมหมายความว่า** จะทำการแสดงขั้นตอนโดยเริ่มจากแผนภาพการผ่านและสิ้นสุดที่นิพจน์ปกติ ที่นิยามภาษาเดียวกัน

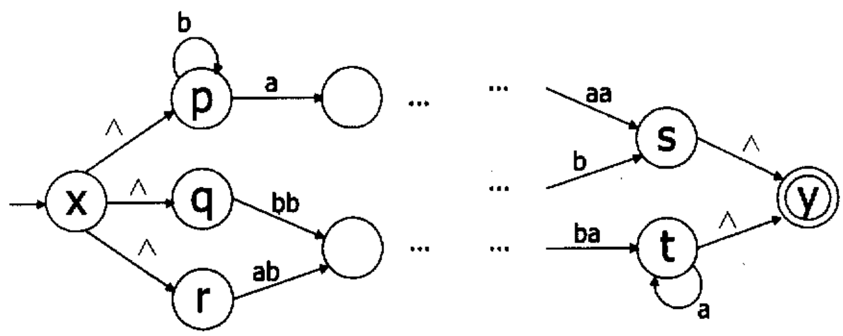
ขั้นตอนวิธี ที่จะใช้ในการพิสูจน์นี้ จะเป็นขั้นตอนวิธีในการกำจัดสถานะ (state-elimination algorithm) ซึ่งแสดงได้ดังนี้

ขั้นที่ 1 : สร้างสถานะเริ่มต้น ที่มีเฉพาเส้นเชื่อมออก 1 สถานะ และ สร้างสถานะสิ้นสุด ที่มีเฉพาะเส้นเชื่อมเข้า 1 สถานะ

ตัวอย่างเช่น



พิจารณาบางส่วนของทีจี ดังกล่าวนี้ จะเห็นว่ามีสถานะ p , q และ r เป็นสถานะเริ่มต้น ดังนั้นต้องทำให้เหลือสถานะเริ่มต้นที่มีเฉพาะเส้นเชื่อมออกเพียงสถานะเดียว ทำนองเดียวกัน มีสถานะ y และ z เป็นสถานะสิ้นสุด ดังนั้นต้องทำให้เหลือสถานะสิ้นสุดที่มีเฉพาะเส้นเชื่อมเข้า เพียงสถานะ เดียว ซึ่งแสดงได้ดังรูปต่อไปนี้



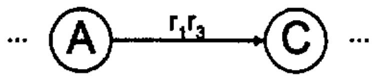
สำหรับขั้นต่อๆ ไป จะทำการแปลงทีจี ไปเป็นทีจีที

ขั้นที่ 2 : กำจัดทุกๆ สถานะ ที่ไม่ใช่สถานะเริ่มต้น และสถานะสิ้นสุดในทีจี สถานะ จะถูกกำจัดโดยการเชื่อมต่อกันของแต่ละเส้นเชื่อมเข้า กับแต่ละเส้นเชื่อมออก ซึ่งแต่ละเส้นเชื่อม ที่เป็นผลลัพธ์ของการเชื่อมต่อกันนั้นจะถูกเขียนกำกับใหม่ด้วยการเขียนต่อกันของสัญลักษณ์ที่ถูกเขียนกำกับบนเส้นเชื่อมเข้ากับสัญลักษณ์ที่ถูกเขียนกำกับบนวง

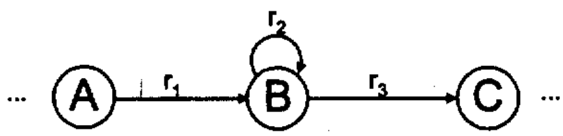
วน (กรณีมีวงวนบนสถานะนั้น) และเขียนต่อกันกับสัญลักษณ์ที่ถูกเขียนกำกับบนเส้นเชื่อมออก

ตัวอย่างเช่น

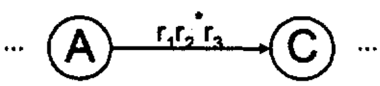
สถานะ A , B และ C ถูกเชื่อมต่อในแถวเดียวกัน โดยที่ r_1 และ r_3 เป็นนิพจน์ปกติหรือเป็นสายอักขระ สามารถตัดสถานะ B ออกได้โดยใช้เส้นเชื่อมเส้นใหม่ ที่ซึ่งถูกเขียนกำกับด้วยนิพจน์ปกติที่เป็นการเชื่อมต่อกันของนิพจน์เดิม ซึ่งแสดงได้ดังรูปต่อไปนี้



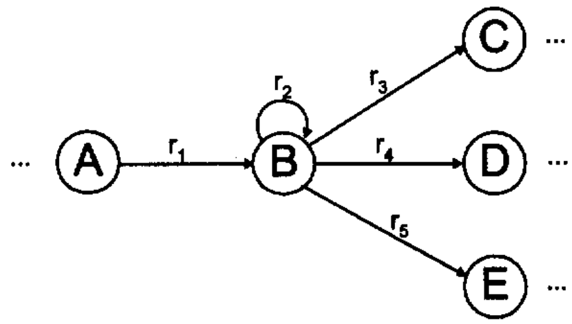
แต่ถ้ากรณีที่สถานะ B มีวงวนกลับเข้าหาตัวเอง ดังรูปต่อไปนี้



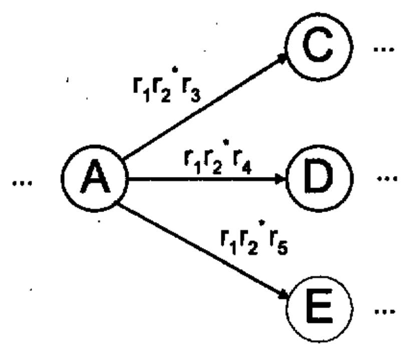
โดยที่ r_2 เป็นนิพจน์ปกติหรือเป็นสายอักขระ สามารถตัดสถานะ B ออกได้ดังนี้



ถ้าสถานะ B มีการเชื่อมต่อกับสถานะ อื่นๆ มากกว่า 1 สถานะ ดังรูปต่อไปนี้

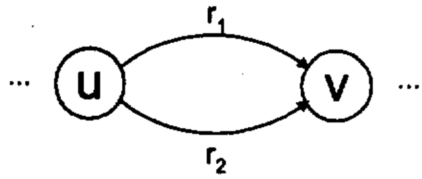


โดยที่ r_4 และ r_5 เป็นนิพจน์ปกติ หรือ สายอักขระ จะได้ว่า เมื่อตัดสถานะ B ออก ต้องสามารถเดินทางจากสถานะ A ไปยังสถานะ C , D และ E ได้เหมือนเดิม ซึ่งแสดงได้ดังรูปต่อไปนี้

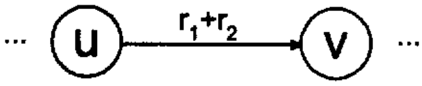


ขั้นที่ 3 : เมื่อ 2 สถานะถูกเชื่อมต่อกันมากกว่า 1 เส้นเชื่อมที่มีทิศทางไปในทางเดียวกัน ให้ทำการรวมแต่ละเส้นเชื่อมให้เหลือเพียงเส้นเดียว โดยที่เส้นเชื่อมใหม่นี้จะถูกเขียนกำกับด้วยผลบวกของสัญลักษณ์ในแต่ละเส้นเชื่อม

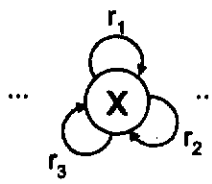
ตัวอย่างเช่น



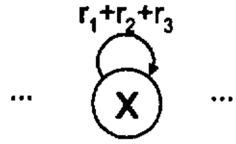
สถานะ u และ v ถูกเชื่อมต่อกันโดยเส้นเชื่อม 2 เส้น ที่เดินทางไปในทิศเดียวกัน โดยที่ r_1 และ r_2 เป็นนิพจน์ปกติหรือเป็นสายอักขระ ดังนั้นจะทำการรวมให้เหลือเพียงเส้นเชื่อมเดียวที่ถูกเขียนกำกับด้วยนิพจน์ปกติ ได้ดังนี้



พิจารณาสถานะต่อไปนี้



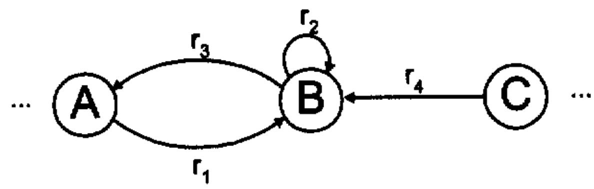
สมมุติให้ x เป็นสถานะหนึ่งของทีจีที่ประกอบด้วย 3 วงวน โดยที่ r_1 , r_2 และ r_3 เป็นนิพจน์ปกติหรือเป็นสายอักขระสามารถแทนทั้ง 3 วงวน ได้ด้วย 1 วงวน ที่ถูกเขียนกำกับด้วยนิพจน์ปกติดังนี้



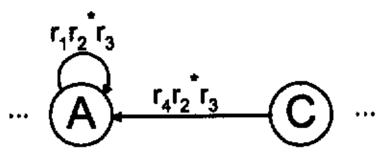
ขั้นที่ 4 : สุดท้ายจะเหลือเส้นเชื่อมเพียง 1 เส้น ที่เดินทางจากสถานะเริ่มต้นไปยังสถานะสิ้นสุดนิพจน์ที่ถูกเขียนกำกับอยู่บนเส้นเชื่อม นั่นก็คือนิพจน์ปกติ ที่สร้างภาษาเดียวกันกับทีจีเครื่องเดิม

■

ลองมาดูตัวอย่างอื่นๆ กันบ้างเช่น

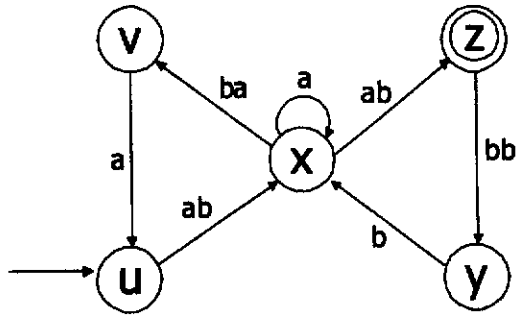


จากรูปดังกล่าวสามารถกำจัดสถานะ B ได้ดังรูปต่อไปนี้คือ

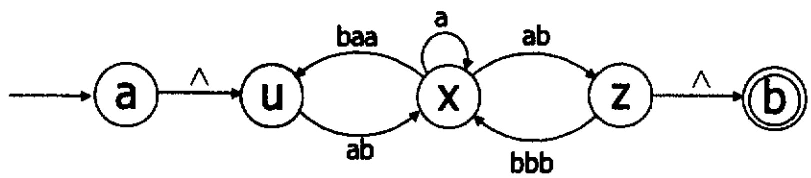


จะเห็นว่าเดิมสามารถเดินทางจาก A ไปยัง B แล้วกลับมายัง A ได้ และสามารถเดินทางจาก C ผ่าน B แล้วไปยัง A ได้ ซึ่งเมื่อตัด B ออกไปแล้ว จากรูปใหม่ที่ได้ ก็ยังคงสามารถเดินทางได้เหมือนเดิม ไม่มีเส้นทางไหนถูกตัดทิ้งหรือเพิ่มขึ้นมา

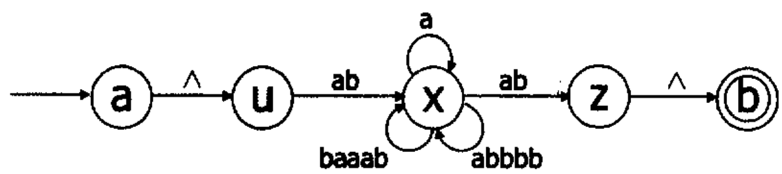
ตัวอย่างที่ 4.14



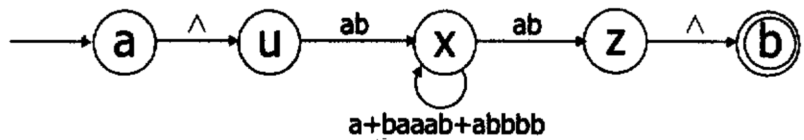
จากทีจีดังกล่าวนี้ สามารถแปลงเป็นนิพจน์ปกติได้ดังนี้



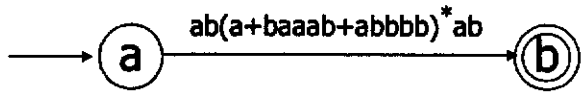
เริ่มต้นด้วยการสร้างสถานะเริ่มต้นที่มีเฉพาะเส้นเชื่อมออก 1 สถานะกับสถานะสิ้นสุดที่มีเฉพาะเส้นเชื่อมเข้า 1 สถานะ จากนั้นกำจัดสถานะ v และ y โดยใช้ขั้นตอนวิธีในการกำจัดสถานะ ขั้นที่ 2 หลังจากนั้น จะทำการแปลงวิถี ที่เดินทางจาก x ผ่าน u แล้วเดินทางกลับมายัง x และวิถี ที่เดินทางจาก x ผ่าน z แล้วกลับมายัง x ให้อยู่ในรูปของนิพจน์ปกติที่เขียนกำกับอยู่บนวงวนบนสถานะ x ซึ่งแสดงได้ดังนี้



ต่อไปจะใช้ขั้นตอนวิธีในการกำจัดสถานะขั้นที่ 3 ในการแทนทั้ง 3 วงวนที่อยู่บนสถานะ x ด้วย 1 วงวนที่ถูกเขียนกำกับด้วยนิพจน์ปกติ ดังนี้



จากนั้น ใช้ขั้นตอนวิธี ในขั้นที่ 2 อีกครั้ง จะได้

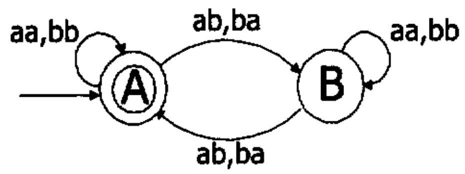


สรุปได้ว่านิพจน์ปกติที่ต้องการคือ

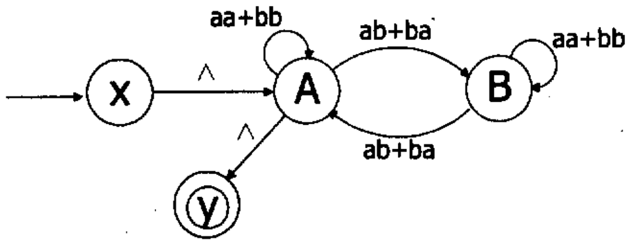
$ab(a+baaab+abbbb)^*ab$

■

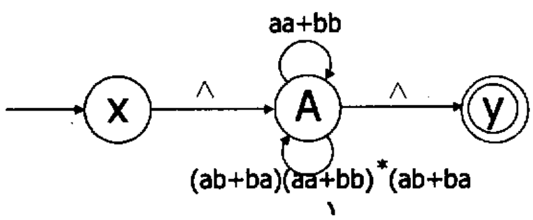
ตัวอย่างที่ 4.15



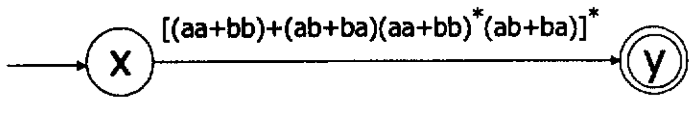
จะใช้ขั้นตอนวิธีในการกำจัดสถานะในการแปลงทีจี ดังกล่าวนี้ให้อยู่ในรูปของนิพจน์ปกติ ดังนั้น เริ่มต้นจะได้รูปดังแสดงต่อไปนี้



ต่อไปกำจัดสถานะ B ซึ่งจะได้



สุดท้ายกำจัดสถานะ A จะได้



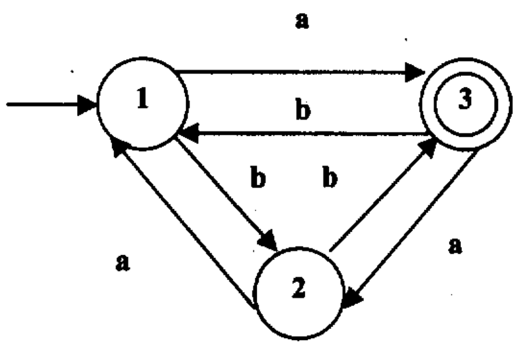
ซึ่งเขียนเป็นนิพจน์ปกติได้คือ

$$[(aa+bb)+(ab+ba)(aa+bb)^{*}(ab+ba)]^{*}$$

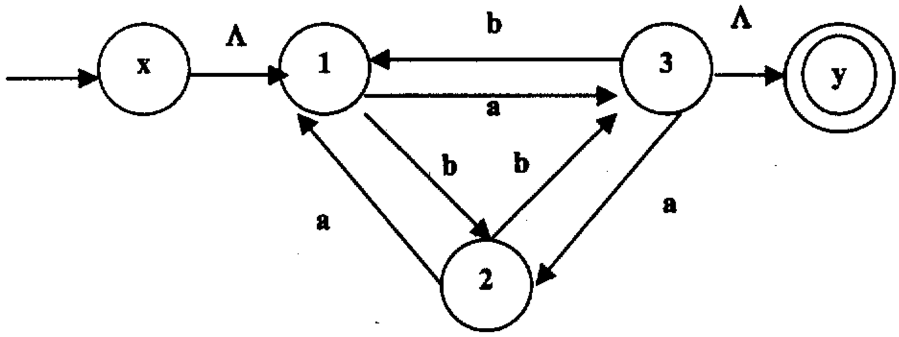
■

ตัวอย่างที่ 4.16

จงหานิพจน์ปกติที่นิยามภาษาเดียวกันกับดีเอฟเอต่อไปนี้



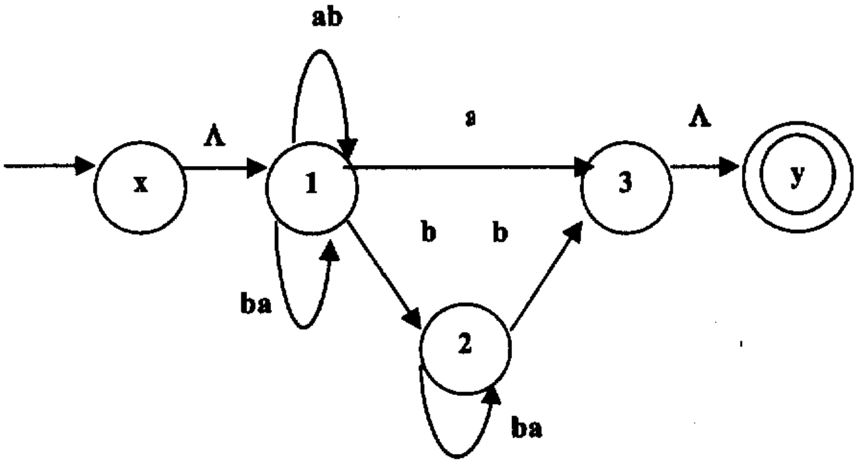
เริ่มต้นด้วยการสร้างสถานะเริ่มต้น ที่มีเฉพาะเส้นเชื่อมออก 1 สถานะ กับสถานะสิ้นสุดที่มีเฉพาะเส้นเชื่อมเข้า 1 สถานะ ซึ่งแสดงได้ดังนี้



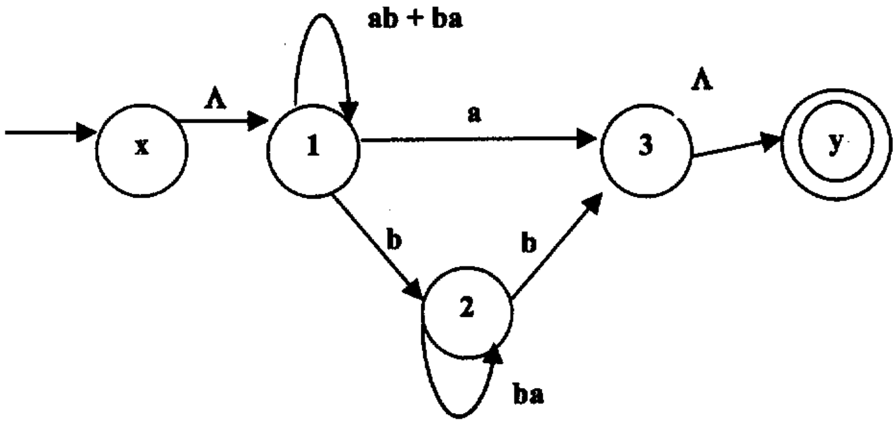
จากนั้น จะทำการแปลงวิถี 3 วิธีดังนี้

1. วิถี ที่เดินทางจาก 1 ผ่าน 3 แล้วเดินทางกลับมายัง 1
2. วิถี ที่เดินทางจาก 1 ผ่าน 3 แล้วเดินทางกลับมายัง 1
3. วิถี ที่เดินทางจาก 2 ผ่าน 3 แล้วเดินทางกลับมายัง 2

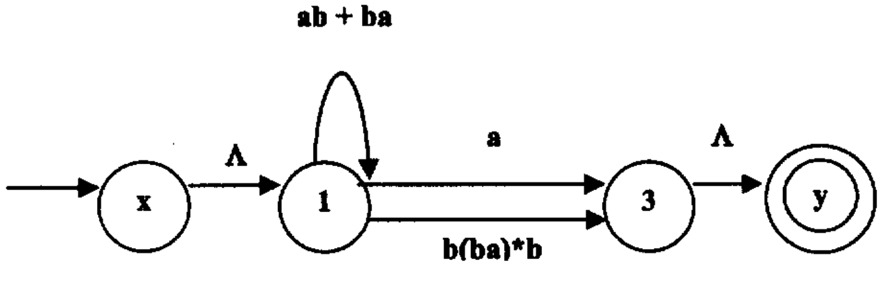
โดยเขียนให้อยู่ในรูปของนิพจน์ปกติที่เขียนกำกับอยู่บนวงวนบนสถานะ 1 และ 2 ตามลำดับ



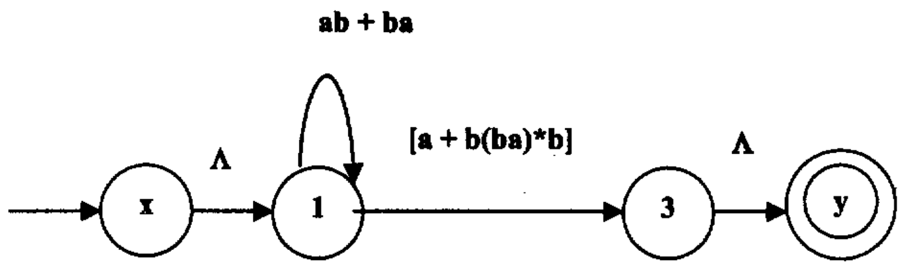
ต่อไปจะใช้ขั้นตอนวิธีในการกำจัดสถานะขั้นที่ 3 ในการแทนทั้ง 3 วงวนที่อยู่บนสถานะ x ด้วย 1 วงวน ที่ถูกเขียนกำกับด้วยนิพจน์ปกติ ดังนี้



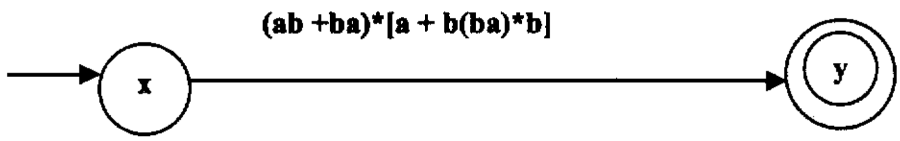
จากนั้นกำจัดสถานะ 2 โดยใช้ขั้นตอนวิธีในการกำจัดสถานะขั้นที่ 2



ใช้ขั้นตอนวิธี ขั้นที่ 2 รวมเส้นเชื่อมที่มีทิศไปทางเดียวกันระหว่างสถานะ ที่ 1 และ 2 ให้เหลือเพียงเส้นเดียว



จากนั้น ใช้ขั้นตอนวิธี ในขั้นที่ 2 จะได้



■

<u>ทฤษฎีบทที่ 4.5</u>

ภาษาที่ถูกยอมรับโดย ออโตมาตาจำกัดใดๆ จะเป็นภาษาปกติ

■

การพิสูจน์สามารถใช้การพิสูจน์ส่วนที่ 2 มาประกอบการพิจารณาโดยใช้ออโตมาตาจำกัดแทนกราฟการผ่าน (FA ⊂ TG) จากนั้นก็ทำการหานิพจน์ปกติที่สอดคล้องกับ FA ที่ให้มาและนิพจน์ปกติที่ได้จะเป็นนิพจน์ปกติที่สอดคล้องกับภาษาที่ยอมรับโดย FA ดังกล่าว และเมื่อมีนิพจน์ปกติที่สอดคล้องกับภาษาจะได้ว่า ภาษาดังกล่าวเป็นภาษาปกติ

นอกจากนี้อาจจะนำเอาอัลกอริทึมสำหรับหานิพจน์ปกติที่สอดคล้องกับดีเอฟเอที่กำหนดมาให้ โดยอัลกอริทึมดังกล่าวสามารถแสดงได้ดังนี้

<u>อัลกอริทึม 4.1</u>

1. $L(q, q, 0) = \begin{cases} \{a \in \Sigma \mid \delta(p, a) = q\} \text{ ถ้า } p \neq q \\ \{a \in \Sigma \mid \delta(p, a) = q\} \cup \{\Lambda\} \text{ถ้า } p = q \end{cases}$

2. $L(p, q, k+1) = L(p, q, k) \cup L(p, k+1, k)\, L(k+1, k+1, k)^{*}\, L(k+1, q, k)$

3. $L(p, q) = L(p, q, n); k+1 = n$

4. $$L = \bigcup_{q \in A} L(q_0, q)$$

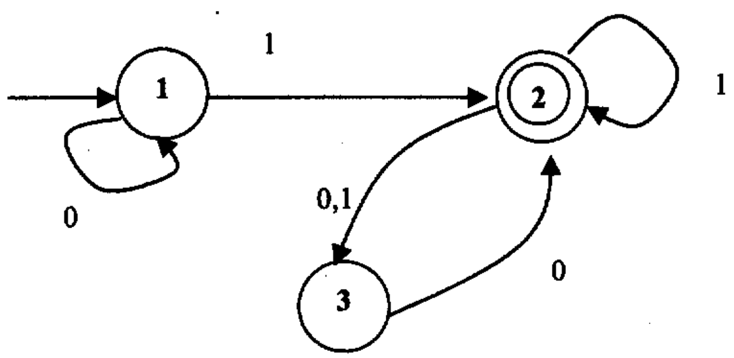
ในขั้นตอนการหาจะมีการสร้างตารางแสดงนิพจน์ปกติ r(p, q, j) ที่สอดคล้องกับภาษา L(p, q, j) สำหรับ $0 \leq j \leq n-1$ และ $p, q \in Q$ (สัญลักษณ์ที่ใช้จะมีการกำหนดเป็นตัวเลข) โดยที่ n เป็นจำนวนสถานะทั้งหมดใน FA

จากนั้นจะเป็นขั้นตอนในการหานิพจน์ปกติ ที่สอดคล้องกับภาษาจากอัลกอริทึม 4.1 ข้อที่ 4

เนื้อหาส่วนนี้จะไม่มีการแสดงการพิสูจน์เพื่อให้ได้มาซึ่งอัลกอริทึม 4.1 ข้างต้น แต่จะใช้ตัวอย่างเพื่อแสดงความเข้าใจในการนำเอาอัลกอริทึมไปใช้ดังนี้

ตัวอย่างที่ 4.17

จงหานิพจน์ปกติที่สอดคล้องกับดีเอฟเอที่กำหนดให้ต่อไปนี้



ในกรณีที่ดีเอฟเอที่ให้มาไม่ได้ใช้ตัวเลขเป็นชื่อของสถานะ จะมีการเปลี่ยนชื่อสถานะที่ให้มาไปเป็นตัวเลข เพื่อให้เกิดความสะดวกและสอดคล้องกับอัลกอริทึมที่ใช้ในการหานิพจน์ปกติดังกล่าว

จากนั้นจะได้สร้างตารางเพื่อแสดงนิพจน์ปกติ $r(p, q, j)$ ที่สอดคล้องกับภาษา $L(p, q, j)$ สำหรับ $0 \leq j \leq 2$ และ $p, q \in Q$ โดยนิพจน์ปกติสามารถหาได้ด้วยสูตรต่อไปนี้

ตารางที่ 1 พิจารณานิพจน์ปกติ $r(p, q, 0)$ ที่สอดคล้องกับภาษา $L(p, q, 0)$ ($j = 0$ และ $p, q \in Q$) สามารถหาได้โดยใช้อัลกอริทึม 4.1 ข้อ 1 ดังนี้

$$r(q, q, 0) = \begin{cases} \{a \in \Sigma \mid \delta(p, a) = q\} \text{ ถ้า } p \neq q & \Rightarrow \text{ เงื่อนไขที่ 1} \\ \{a \in \Sigma \mid \delta(p, a) = q\} \cup \{\Lambda\} \text{ ถ้า } p = q & \Rightarrow \text{ เงื่อนไขที่ 2} \end{cases}$$

$r(1, 1, 0) = 0 + \Lambda$ (เงื่อนไขที่ 2)

$r(1, 2, 0) = 1$ (เงื่อนไขที่ 1)

$r(1, 3, 0) = \varnothing$ (เงื่อนไขที่ 1)

$r(2, 1, 0) = \varnothing$ (เงื่อนไขที่ 1)

$r(2, 2, 0) = 1 + \Lambda$ (เงื่อนไขที่ 2)

$r(2, 3, 0) = 0$ (เงื่อนไขที่ 1)

$r(3, 1, 0) = \varnothing$ (เงื่อนไขที่ 1)

$r(3, 2, 0) = 0 + 1$ (เงื่อนไขที่ 1)

$r(3, 3, 0) = \Lambda$ (เงื่อนไขที่ 2)

สรุปตาราง ที่ 1 สำหรับการหานิพจน์ $r(p, q, 0)$ ที่สอดคล้องกับภาษา $L(p, q, 0)$ ได้ดัง

p	r(p, 1, 0)	r(p, 2, 0)	r(p, 3, 0)
1	$0 + \Lambda$	1	$\varnothing$
2	$\varnothing$	$1 + \Lambda$	0
3	$\varnothing$	$0 + 1$	Λ

ตารางที่ 2 พิจารณานิพจน์ปกติ r(p, q, 1) ที่สอดคล้องกับภาษา L(p, q, 1) (j = 1 และ p, q $\in$ Q) สามารถหาได้โดยใช้อัลกอริทึม 4.1 ข้อ 2 ดังนี้

$$
\begin{aligned}
r(p, q, k+1) &= r(p, q, k) + r(p, k+1, k)\, r(k+1, k+1, k)\ \ r(k+1, q, k) \\
r(1, 1, 1) &= r(1, 1, 0) + r(1, 1, 0)r(1, 1, 0)^*r(1, 1, 0) \\
&= (0+\Lambda) + (0+\Lambda)(0+\Lambda)^*(0+\Lambda) \\
&= 0^* \\
r(1, 2, 1) &= r(1, 2, 0) + r(1, 1, 0)r(1, 1, 0)^*r(1, 2, 0) \\
&= 1 + (0+\Lambda)(0+\Lambda)^*(1) \\
&= 1 + 0^*1 \\
&= 0^*1 \\
r(1, 3, 1) &= r(1, 3, 0) + r(1, 1, 0)r(1, 1, 0)^*r(1, 3, 0) \\
&= \varnothing + (0+\Lambda)(0+\Lambda)^*(\varnothing) = \varnothing
\end{aligned}
$$

หมายเหตุ การต่อกันระหว่างนิพจน์ปกติใด ๆ กับ เซตว่าง จะได้ผลลัพธ์เป็นเซตว่าง

$$
\begin{aligned}
r(2, 1, 1) &= r(2, 1, 0) + r(2, 1, 0)r(1, 1, 0)^*r(1, 1, 0) \\
&= \varnothing + (\varnothing)(0+\Lambda)^*(0+\Lambda) \\
&= \varnothing \\
r(2, 2, 1) &= r(2, 2, 0) + r(2, 1, 0)r(1, 1, 0)^*r(1, 2, 0) \\
&= (1 + \Lambda) + (\varnothing)(0+\Lambda)^*(1) \\
&= 1 + \Lambda \\
r(2, 3, 1) &= r(2, 3, 0) + r(2, 1, 0)r(1, 1, 0)^*r(1, 3, 0) \\
&= 0 + (\varnothing)(0+\Lambda)^*(\varnothing) \\
&= 0 \\
r(3, 1, 1) &= r(3, 1, 0) + r(3, 1, 0)r(1, 1, 0)^*r(1, 1, 0) \\
&= \varnothing + (\varnothing)(0+\Lambda)^*(0+\Lambda) \\
&= \varnothing
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r(3, 2, 1) &= r(3, 2, 0) + r(3, 1, 0)r(1, 1, 0)^*r(1, 2, 0) \\
&= (0+1) + (\varnothing)(0+\Lambda)^*(1) \\
&= 0+ 1 \\
r(3, 3, 1) &= r(3, 3, 0) + r(3, 1, 0)r(1, 1, 0)^*r(1, 3, 0) \\
&= \Lambda + (\varnothing)(0+\Lambda)^*(\varnothing) \\
&= \Lambda
\end{aligned}
$$

สรุปตาราง ที่ 2 สำหรับการหานิพจน์ r(p, q, 1) ที่สอดคล้องกับภาษา L(p, q, 1) ได้ดังนี้

p	r(p, 1, 1)	r(p, 2, 1)	r(p, 3, 1)
1	0^*	0^*1	$\varnothing$
2	$\varnothing$	$1 + \Lambda$	0
3	$\varnothing$	$0 + 1$	Λ

ตารางที่ 3 พิจารณานิพจน์ปกติ r(p, q, 1) ที่สอดคล้องกับภาษา L(p, q, 1) (j = 2 และ p, q $\in$ Q) สามารถหาได้โดยใช้อัลกอริทึม 4.1 ข้อ 2 ดังนี้

$$
\begin{aligned}
r(p, q, k+1) &= r(p, q, k) + r(p, k+1, k)\, r(k+1, k+1, k)^*\, r(k+1, q, k) \\
r(1, 1, 2) &= r(1, 1, 1) + r(1, 2, 1)r(2, 2, 1)^*r(2, 1, 1) \\
&= 0^* + (0^*1)(1 + \Lambda)^*(\varnothing) \\
&= 0^* \\
r(1, 2, 2) &= r(1, 2, 1) + r(1, 2, 1)r(2, 2, 1)^*r(2, 2, 1) \\
&= 0^*1 + (0^*1)\underline{(1 + \Lambda)^*(1 + \Lambda)} \\
&= 0^*1 + (0^*1)\underline{(1 + \Lambda)^+} \\
&= 0^*1 + \underline{(0^*1)1^*} \\
&= \underline{0^*1 + 0^*1^+} \\
&= 0^*1^+
\end{aligned}
$$

$r(1, 3, 2) = r(1, 3, 1) + r(1, 2, 1)r(2, 2, 1)^*r(2, 3, 1)$
$= \varnothing + (0^*1)(1 + \Lambda)^*(0)$
$= 0^*1^*0$

$r(2, 1, 2) = r(2, 1, 1) + r(2, 2, 1)r(2, 2, 1)^*r(2, 1, 1)$
$= \varnothing + (1 + \Lambda)(1 + \Lambda)^*(\varnothing) \quad = \varnothing$

$r(2, 2, 2) = r(2, 2, 1) + r(2, 2, 1)r(2, 2, 1)^*r(2, 2, 1)$
$= (1 + \Lambda) + (1 + \Lambda)(1 + \Lambda)^*(1 + \Lambda)$
$= 1^*$

$r(2, 3, 2) = r(2, 3, 1) + r(2, 2, 1)r(2, 2, 1)^*r(2, 3, 1)$
$= 0 + (1 + \Lambda)(1 + \Lambda)^*(0)$
$= 1^*0$

$r(3, 1, 2) = r(3, 1, 1) + r(3, 2, 1)r(2, 2, 1)^*r(2, 1, 1)$
$= \varnothing + (0+1)(1 + \Lambda)^*(\varnothing) \quad = \varnothing$

$r(3, 2, 2) = r(3, 2, 1) + r(3, 2, 1)r(2, 2, 1)^*r(2, 2, 1)$
$= (0+1) + \underline{(0+1)(1 + \Lambda)^*(1 + \Lambda)}$
$= (0+1) + \underline{(0+1)(1 + \Lambda)^+}$
$= \underline{(0+1) + (0+1)1^*}$
$= (0+1)1^*$

$r(3, 3, 2) = r(3, 3, 1) + r(3, 2, 1)r(2, 2, 1)^*r(2, 3, 1)$
$= (\Lambda) + (0+1)(1 + \Lambda)^*(0)$
$= (\Lambda) + (0+1)1^*0$

สรุปตาราง ที่ 3 สำหรับการหานิพจน์ r(p, q, 2) ที่สอดคล้องกับภาษา L(p, q, 2) ได้ดังนี้

p	r(p, 1, 2)	r(p, 2, 2)	r(p, 3, 2)
1	0 *	0*1*	0*1*0
2	$\varnothing$	1 *	1*0
3	$\varnothing$	(0 + 1)1*	(Λ) + (0+1)1*0

ขั้นตอนสุดท้ายจะใช้อัลกอริทึม 4.1 ข้อ 6

$$L = \bigcup_{q \in A} L(q_0, q)$$

เพื่อหาการรวมกันแบบ Union ของนิพจน์ปกติ r(p,q) ที่สอดคล้องกับภาษา L(p,q) ซึ่งใช้ อัลกอริทึม 4.1 ข้อ 5 ช่วยในการตีความ

L(p, q) = L(p, q, n); k+1 = n

สำหรับภาษา L(p,q) จะพิจารณาเริ่มจากสถานะเริ่มต้นไปยังสถานะสิ้นสุดทุกตัวในเซตของสถานะยอมรับ

ดังนั้นในตัวอย่างนี้จะได้นิพจน์ปกติที่ต้องการหาคือ

r(1, 2) = r(1, 2, 3) = r(1, 2, 2) + r(1, 3, 2)(3, 3, 2)*(3, 2, 2)

= 0^*1^+ + (0*1*0)(Λ + (0+1)1*0)*((0 + 1)1*)

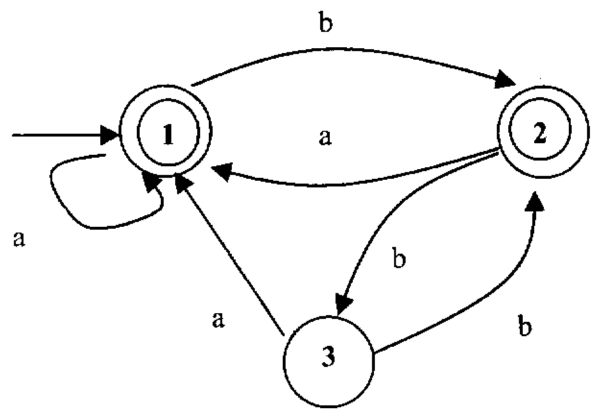
∴ นิพจน์ปกติที่นิยามภาษาที่สอดคล้องกับดีเอฟเอที่ให้มาคือ

0^*1^+ + (0*1*0)(Λ + (0+1)1*0)*((0 + 1)1*)

■

ตัวอย่างที่ 4.18

จงหานิพจน์ปกติที่สอดคล้องกับดีเอฟเอที่กำหนดให้ต่อไปนี้



ในตัวอย่างนี้จะไม่แสดงรายละเอียดการหาเหมือนตัวอย่างก่อนหน้า โดยจะแสดงผลการได้มาแต่ละขั้นตอนโดยสรุปเท่านั้น

ในขั้นตอนการหานิพจน์ปกติจะเริ่มด้วยการสร้างตารางเพื่อแสดงนิพจน์ปกติ $r(p, q, j)$ ที่สอดคล้องกับภาษา $L(p, q, j)$ สำหรับ $0 \leq j \leq 2$ และ $p, q \in Q$ โดยนิพจน์ปกติสามารถหาได้ด้วยสูตรต่อไปนี้

ตารางที่ 1 พิจารณานิพจน์ปกติ $r(p, q, 0)$ ที่สอดคล้องกับภาษา $L(p, q, 0)$ ($j = 0$ และ $p, q \in Q$) สามารถหาได้โดยใช้อัลกอริทึม 4.1 ข้อ 1 ดังนี้

$$r(q, q, 0) = \begin{cases} \{a \in \Sigma \mid \delta(p, a) = q\} \text{ ถ้า } p \neq q & \Rightarrow \text{ เงื่อนไขที่ 1} \\ \{a \in \Sigma \mid \delta(p, a) = q\} \cup \{\Lambda\} \text{ถ้า } p = q & \Rightarrow \text{ เงื่อนไขที่ 2} \end{cases}$$

สรุปตาราง ที่ 1 สำหรับการหานิพจน์ $r(p, q, 0)$ ที่สอดคล้องกับภาษา $L(p, q, 0)$ ได้ดังนี้

p	r(p, 1, 0)	r(p, 2, 0)	r(p, 3, 0)
1	$a + \Lambda$	b	$\varnothing$
2	a	Λ	b
3	a	b	Λ

ตารางที่ 2 พิจารณานิพจน์ปกติ r(p, q, 1) ที่สอดคล้องกับภาษา L(p, q, 1) (j = 1 และ p, q $\in$ Q) สามารถหาได้โดยใช้อัลกอริทึม 4.1 ข้อ 2 ดังนี้

$$r(p, q, k+1) = r(p, q, k) + r(p, k+1, k)\, r(k+1, k+1, k)^{*}\, r(k+1, q, k)$$

สรุปตาราง ที่ 2 สำหรับการหานิพจน์ r(p, q, 1) ที่สอดคล้องกับภาษา L(p, q, 1) ได้ดังนี้

p	r(p, 1, 1)	r(p, 2, 1)	r(p, 3, 1)
1	a^*	a^*b	$\emptyset$
2	a^+	$\Lambda + a^+b$	b
3	a^+	a^*b	Λ

ตารางที่ 3 พิจารณานิพจน์ปกติ r(p, q, 1) ที่สอดคล้องกับภาษา L(p, q, 1) (j = 2 และ p, q $\in$ Q) สามารถหาได้โดยใช้อัลกอริทึม 4.1 ข้อ 2 ดังนี้

$$r(p, q, k+1) = r(p, q, k) + r(p, k+1, k)\, r(k+1, k+1, k)^{*}\, r(k+1, q, k)$$

สรุปตาราง ที่ 3 สำหรับการหานิพจน์ r(p, q, 2) ที่สอดคล้องกับภาษา L(p, q, 2) ได้ดังนี้

P	r(p, 1, 2)	r(p, 2, 2)	r(p, 3, 2)
1	$a^*(ba^+)^*$	$a^*(ba^+)^*b$	$a^*(ba^+)^*bb$
2	$a^+(ba^+)^*$	$(a^+b)^*$	$(a^+b)^*b$
3	$a^+ + a^*(ba^+)^+$	$a^*b(a^+b)^*$	$\Lambda + a^*b(a^+b)^*b$

ขั้นตอนสุดท้ายจะใช้อัลกอริทึม 4.1 ข้อ 6

$$L = \bigcup_{q \in A} L(q_0, q)$$

เพื่อหาการรวมกันแบบ Union ของนิพจน์ปกติ r(p,q) ที่สอดคล้องกับภาษา L(p,q) ซึ่งใช้ อัลกอริทึม 4.1 ข้อ 5 ช่วยในการตีความ

$L(p, q) = L(p, q, n);\ k+1 = n$

สำหรับภาษา $L(p,q)$ จะพิจารณาเริ่มจากสถานะเริ่มต้นไปยังสถานะสิ้นสุดทุกตัวในเซตของสถานะยอมรับ

ดังนั้นในตัวอย่างนี้จะได้นิพจน์ปกติที่ต้องการหาคือ $r(1, 1, 3) + r(1, 2, 3)$ โดยในขั้นตอนการหาจะได้มีการจัดรูปของนิพจน์ปกติให้อยู่ในรูปอย่างง่ายในกรณีที่จัดรูปได้

$$
\begin{aligned}
r(1, 1, 3) &= r(1, 1, 2) + r(1, 3, 2)r(3, 3, 2)^*r(3, 1, 2) \\
&= a^*(ba^+)^* + (a^*(ba^+)^*bb)(\Lambda+a^*b(a^+b)^*b)^*(a^+ + a^*(ba^+)^+) \\
&= a^*(ba^+)^* + (a^*(ba^+)^*bb)(a^*b(a^+b)^*b)^*(a^+ + a^*(ba^+)^+) \\
r(1, 2, 3) &= r(1, 2, 2) + r(1, 3, 2)r(3, 3, 2)^*r(3, 2, 2) \\
&= a^*(ba^+)^*b + (a^*(ba^+)^*bb)(\Lambda+a^*b(a^+b)^*b)^*(a^*b(a^+b)^*) \\
&= a^*(ba^+)^*b + (a^*(ba^+)^*bb)(a^*b(a^+b)^*b)^*(a^*b(a^+b)^*)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ นิพจน์ปกติที่นิยามภาษาที่สอดคล้องกับดีเอฟเอที่ให้มาคือ

$$
\begin{aligned}
r &= r(1, 1, 3) + r(1, 2, 3) \\
&= (a^*(ba^+)^* + (a^*(ba^+)^*bb)(a^*b(a^+b)^*b)^*(a^+ + a^*(ba^+)^+)) + \\
&\quad (a^*(ba^+)^*b + (a^*(ba^+)^*bb)(a^*b(a^+b)^*b)^*(a^*b(a^+b)^*))
\end{aligned}
$$

■

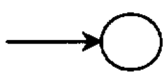
การพิสูจน์ส่วนที่ 3

ใช้ Induction Proof ในการพิสูจน์โดยพิจารณานิพจน์ปกติที่สอดคล้องกับภาษาปกติและพิจารณาหา เอ็นเอฟเอ-Λ ที่ยอมรับภาษาดังกล่าว

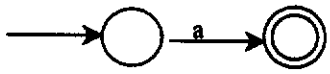
การหาเริ่มพิจารณาจากภาษาพื้นฐาน 3 รูปแบบซึ่งสามารถถูกยอมรับด้วย เอ็นเอฟเอ-Λ และเมื่อ L_1 และ L_2 เป็นภาษาที่มี เอ็นเอฟเอ-Λ ยอมรับ ภาษาใหม่ก็สามารถถูกสร้างขึ้นมาโดยการนำเอา L_1 และ L_2 มาทำการ Union, Concatenation, และ Kleene เพื่อให้ได้ เอ็นเอฟเอ-Λ ตัวใหม่ซึ่งยอมรับภาษาใหม่ดังกล่าวต่อไป

เอ็นเอฟเอ-Λ สำหรับภาษาพื้นฐานแสดงได้ดังนี้

จากนิยามจะมีภาษาปกติบน Σ ที่เป็นเซตที่เล็กที่สุดดังนี้

1.  ➔ แทนภาษา ϕ

2.  ➔ แทนภาษา $\{\Lambda\}$

3. 

➔ แทนภาษา $\{a\}$, $a \in \Sigma$

จากนั้นถ้า L_1 และ L_2 ถูกยอมรับโดย เอ็นเอฟเอ-Λ M_1 และ M_2 ตามลำดับ สำหรับการนิยามของ เอ็นเอฟเอ-Λ M_i (i = 1 หรือ 2)

$$M_i = (Q_i, \Sigma, q_i, A_i, \delta_i)$$

ในกรณีที่สถานะใน Q_1 และ Q_2 มีชื่อซ้ำ ($Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$) ให้ทำการเปลี่ยนชื่อสถานะที่ซ้ำก่อน จากนั้นจะเป็นกระบวนการในการสร้าง เอ็นเอฟเอ-Λ M_u, M_c, และ M_k ที่ยอมรับภาษา

$L_1 \cup L_2$, $L_1 L_2$, และ L_1^* ตามลำดับ

จะมีการแสดงภาพประกอบเพื่อง่ายต่อการเข้าใจ โดย M_1 และ M_2 จะถูกแสดงในภาพโดยมีสถานะยอมรับ 2 สถานะ

1. การสร้าง $M_u = (Q_u, \Sigma, q_u, A_u, \delta_u)$ สามารถทำได้ดังนี้

ให้ q_u เป็นสถานะใหม่ซึ่งไม่อยู่ใน Q_1 และ Q_2 และให้

$$Q_u = Q_1 \cup Q_2 \cup \{ q_u \}$$

$$A_u = A_1 \cup A_2$$

δ_u เป็นฟังก์ชันการผ่านของ M_u โดยสามารถพิจารณาการเดินเริ่มจากสถานะเริ่มต้นไป q_1 หรือ q_2 ด้วย การทำฟังก์ชันการผ่านด้วยสายอักขระว่าง (Λ-transition) และทำฟังก์ชันการผ่านจากจุดนี้ตาม M_i ซึ่งจะนิยามได้ดังต่อไปนี้

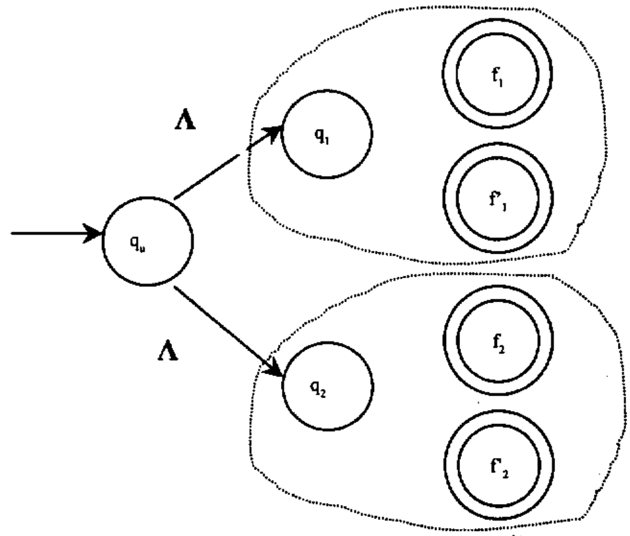
$$\delta_u(q_u, \Lambda) = \{ q_1, q_2 \}$$

$$\delta_u(q_u, a) = \varnothing \text{ สำหรับทุกๆ } a \in \Sigma$$

และสำหรับแต่ละ $q \in Q_1 \cup Q_2$ และ $a \in \Sigma \cup \{\Lambda\}$

$$\delta_u(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & \text{if} \quad q \in Q_1 \\ \delta_2(q,a) & \text{if} \quad q \in Q_2 \end{cases}$$

รูปต่อไปนี้แสดงแผนภาพการผ่านของดีเอฟเอ-Λ M_u ที่นิยามภาษา $L_1 \cup L_2$



2. การสร้าง $M_c = (Q_c, \Sigma, q_c, A_c, \delta_c)$ สามารถทำได้ดังนี้

ในกรณีนี้จะไม่มีการเพิ่มสถานะใหม่เข้ามาซึ่งจะทำได้

$Q_c = Q_1 \cup Q_2$

$q_c = q_1$

$A_c = A_2$

(จากรูปให้ f_2 และ f'_2 เป็นสถานะสิ้นสุดใน M_c แต่ไม่รวม f_1 และ f'_1)

δ_c เป็นฟังก์ชันการผ่านของ M_c ที่รวมเอาทุกๆ ฟังก์ชันการผ่านของ M_1 และ M_2 รวมกับ ฟังก์ชันการผ่านด้วยสายอักขระว่าง (Λ-transition) จากสถานะใน A_1 ไป q_2 ด้วย

กล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า สำหรับ q ใดๆ ที่ไม่อยู่ใน A_1 และ $\propto \in \Sigma \cup \{\Lambda\}$, $\delta_c(q, \propto)$ สามารถถูกนิยามได้ด้วย $\delta_1(q, \propto)$ หรือไม่ก็นิยามด้วย $\delta_2(q, \propto)$ ขึ้นอยู่กับว่า q อยู่ใน Q_1 หรือ Q_2 และสำหรับ $q \in A_1$

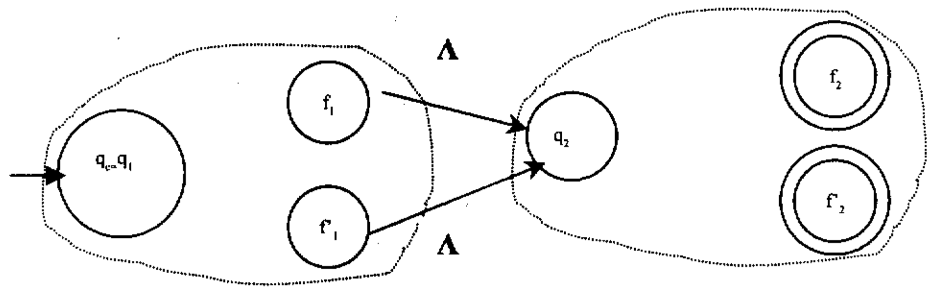
$\delta_c(q, a) = \delta_1(q, a)$ สำหรับ $a \in \Sigma$

$\delta_c(q, \Lambda) = \delta_1(q, \Lambda) \cup \{q_2\}$

สำหรับสายอักขระนำเข้า x_1x_2 โดย $x_i \in L_i$ สำหรับค่าของ i (i =1 หรือ i =2), M_c สามารถทำฟังก์ชันการผ่านกับสายอักขระย่อย x_1 บน M_1 ซึ่งจะทำฟังก์ชันการผ่านไปถึงสถานะใน A_1 จากนั้นจะทำฟังก์ชันการผ่านจากสถานะนี้ไป q_2 โดยฟังก์ชันการผ่านด้วยสายอักขระว่าง (Λ-transition) และจากนั้นจะทำฟังก์ชันการผ่านกับสายอักขระย่อย x_2 ตามฟังก์ชันการผ่านใน M_2 ดังนั้น x_1x_2 จะเป็นสายอักขระที่ถูกยอมรับโดย M_c หรือสามารถกล่าวได้อีกนัยหนึ่งว่าถ้า x ถูกยอมรับโดย M_c ถ้ามีลำดับของการทำฟังก์ชันการผ่านที่สอดคล้องกับ x ซึ่งเริ่มที่ q_1 และสิ้นสุดที่สมาชิกใน A_2

เนื่องจาก $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$, ดังนั้นผลการทำฟังก์ชันการผ่านส่วนแรกทั้งหมดจะอยู่ระหว่างสมาชิกใน Q_1 และผลการทำฟังก์ชันการผ่านส่วนหลังทั้งหมดจะอยู่ระหว่างสมาชิกใน Q_2 จะได้ว่า $x = x_1\Lambda x_2 = x_1x_2$ โดย x_1 จะถูกยอมรับโดย M_1 และ x_2 จะถูกยอมรับโดย M_2 นั่นคือ $x \in L_1 L_2$

รูปต่อไปนี้แสดงแผนภาพการผ่านของดีเอฟเอ-Λ M_c ที่นิยามภาษา L_1L_2



3. การสร้าง $M_k = (Q_k, \Sigma, q_k, A_k, \delta_k)$ สามารถทำได้ดังนี้

ให้ q_k เป็นสถานะใหม่ซึ่งไม่อยู่ใน Q_1

$Q_k = Q_1 \cup \{q_k\}$

$A_k = \{q_k\}$

δ_k เป็นฟังก์ชันการผ่านของ M_k ที่รวมเอาทุก ๆ ฟังก์ชันการผ่านของ M_1 รวมกับฟังก์ชันการผ่านด้วยสายอักขระว่าง (Λ-transition) จากสถานะ q_k ไปสถานะ q_1 และมี

ฟังก์ชันการผ่านด้วยสายอักขระว่าง (Λ-transition) จากสมาชิกในเซตสถานะยอมรับ A_1 ไปสถานะ q_k และเพื่อให้ชัดเจนยิ่งขึ้นจะมีการนิยามได้อีกรูปแบบดังต่อไปนี้

$\delta_k(q_k, \Lambda) = \{ q_1\}$ และ $\delta_k(q_k, a) = \varnothing$ สำหรับ $a \in \Sigma$

สำหรับ $q \in Q$ และ $\propto \in \Sigma \cup \{\Lambda\}$, $\delta_k(q, \propto) = \delta_1(q, \propto)$ ยกเว้น $q \in A_1$ และ $\propto = \Lambda$

สำหรับ $q \in A_1$, $\delta_k(q_k, \Lambda) = \delta_1(q, \Lambda) \cup \{q_k\}$

สมมติ $x \in L_1^*$ ถ้า $x = \Lambda$ จะได้ว่า x ถูกยอมรับโดย M_k แน่นอนและเมื่อ $m \geq 1$, $x = x_1x_2x_3 \ldots x_m$ โดย $x_i \in L_1$ สำหรับแต่ละค่าของ i เมื่อใช้ฟังก์ชันการผ่านด้วยสายอักขระว่าง (Λ-transition) จะทำให้ M_k สามารถเดินจาก q_k ไปยัง q_1

สำหรับแต่ละค่าของ i, M_k จะดินจาก q_1 ไปยังสมาชิก f_i ของ A_1 โดยใช้ฟังก์ชันการผ่านที่สอดคล้องตาม x_i และในทำนองเดียวกันสำหรับแต่ละค่าของ i, M_k จะเดินจาก f_i กลับไปยัง q_k โดยใช้ฟังก์ชันการผ่านด้วยสายอักขระว่าง (Λ-transition)

การทำฟังก์ชันการผ่านดังกล่าวจะเป็นไปตามลักษณะดังนี้

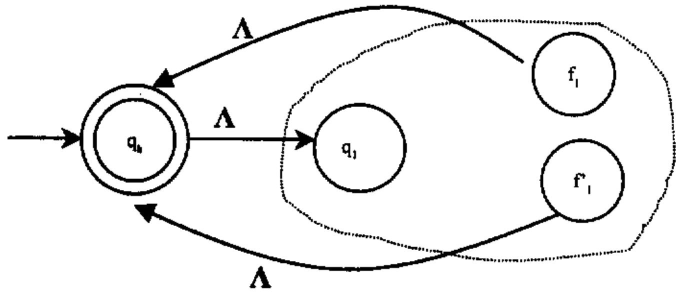
$(\Lambda x_1\Lambda)(\Lambda x_2\Lambda)(\Lambda x_3\Lambda)\ldots(\Lambda x_m\Lambda) = x$ ซึ่งถูกยอมรับโดย M_k

สามารถอธิบายในอีกลักษณะคือ ถ้า x เป็นสายอักขระที่ถูกยอมรับโดย M_k มันจะมีลำดับของการทำฟังก์ชันการผ่านที่สอดคล้องกับ x ซึ่งเริ่มและสิ้นสุดที่ q_k เหตุผลนี้ก็เนื่องมาจากมีการทำฟังก์ชันการผ่านแบบเดียวคือการทำฟังก์ชันการผ่านด้วยสายอักขระว่าง (Λ-transition)จาก q_k ไปยัง q_1 และมีการทำฟังก์ชันการผ่านแบบเดียวคือการทำฟังก์ชันการผ่านด้วยสายอักขระว่าง (Λ-transition) จากสมาชิกในเซต A_1 ไป q_k โดย x จะเขียนแยกในรูปแบบดังนี้

$x = (\Lambda x_1\Lambda)(\Lambda x_2\Lambda)(\Lambda x_3\Lambda)\ldots(\Lambda x_m\Lambda)$

โดยที่แต่ละค่าของ i, $1 \leq i \leq m$, จะมีลำดับของการทำฟังก์ชันการผ่านที่สอดคล้องกับ x_i จาก q_1 ไปยังสมาชิกของ A_1 ดังนั้น $x \in L_1^*$

รูปต่อไปนี้แสดงดีเอฟเอ-Λ M_k ที่นิยามภาษา L_1^*



เมื่อทำการสร้าง เอ็นเอฟเอ-Λ ที่ยอมรับภาษา L ตามแต่ละกรณีจากทั้ง 3 กรณี แล้วจะถือว่าการพิสูจน์สมบูรณ์

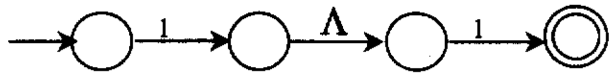
■

ตัวอย่างที่ 4.19

จงหา เอ็นเอฟเอ-Λจากภาษา L ที่นิยามได้ด้วยนิพจน์ปกติต่อไปนี้

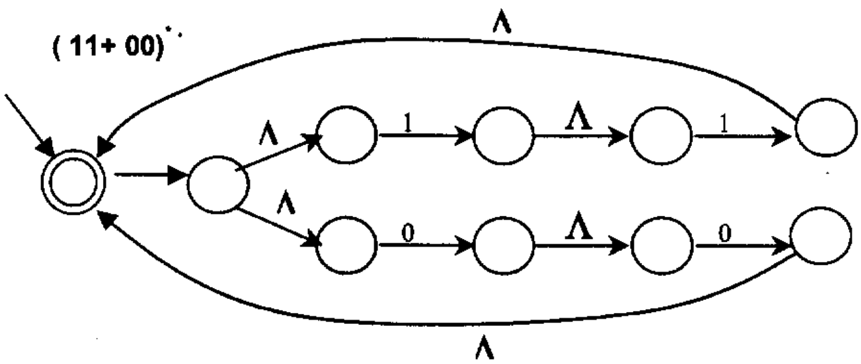
RE = $(11+00)^*(010)^*$

11

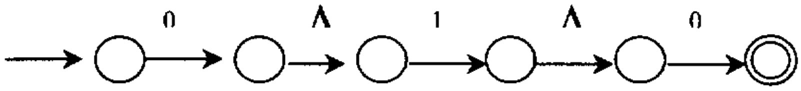


00

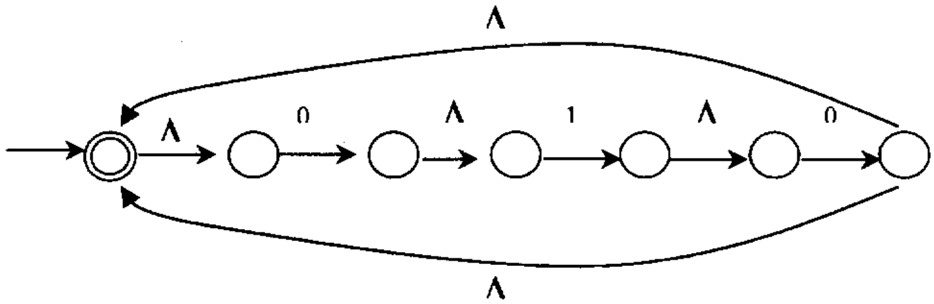
$(11+00)^*$



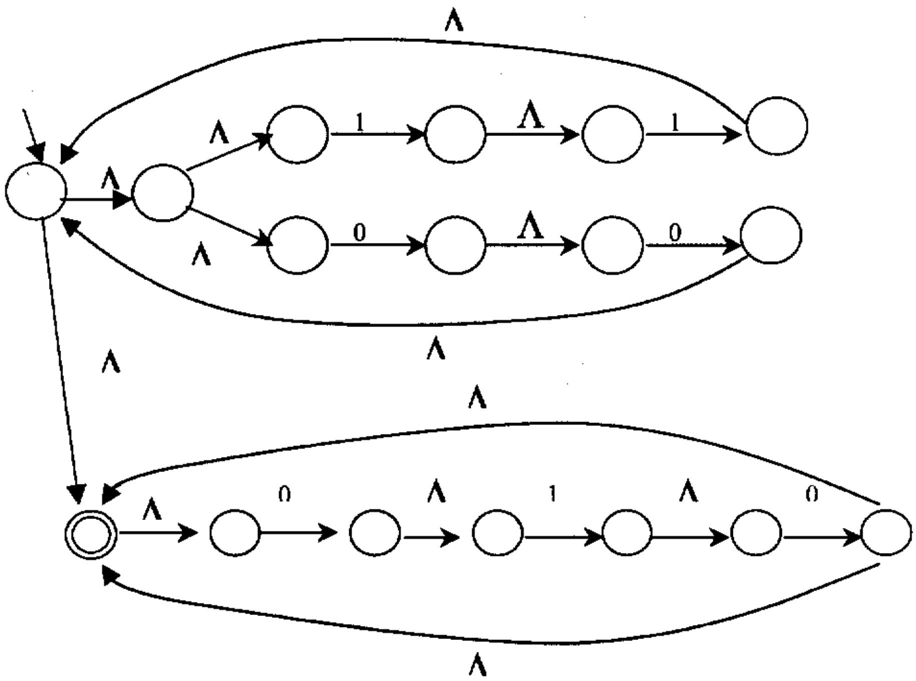
010



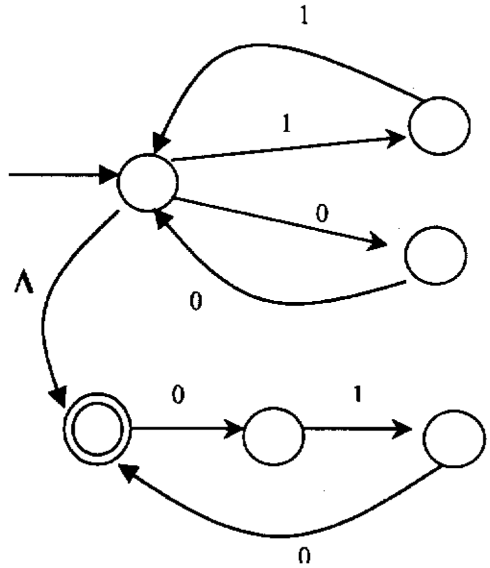
(010)*



(11+ 00)* (010)*



จัดให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้เป็น



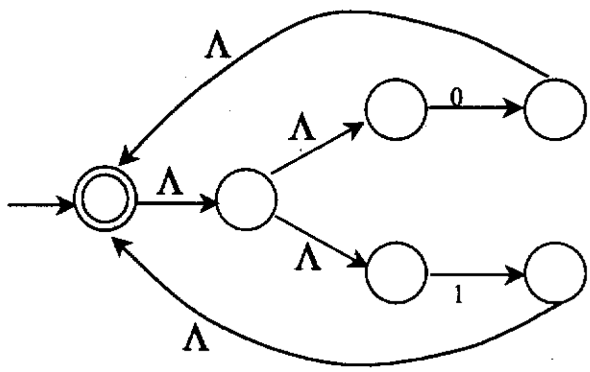
■

ตัวอย่างที่ 4.20

จงหา เอ็นเอฟเอ-Λจากภาษา L ที่นิยามได้ด้วยนิพจน์ปกติต่อไปนี้

RE = $(0+1)^* (00 + 01 + 11 + 10) (0+1)^*$

$(0+1)^*$



(1)

00

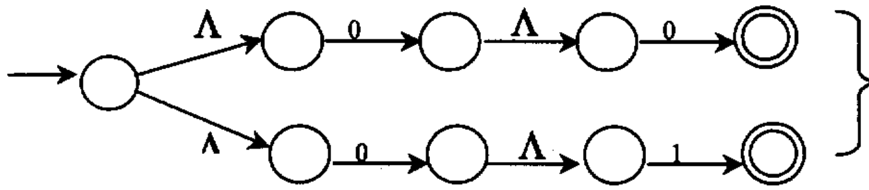
(2)

01  (3)

11  (4)

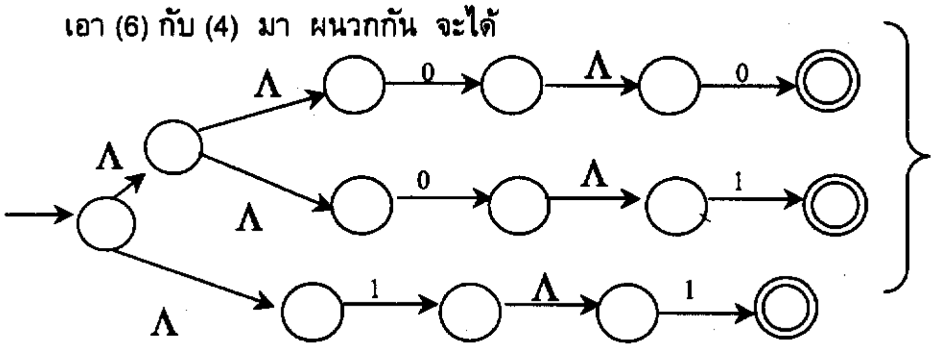
10  (5)

เอา (2) กับ (3) มา ผนวกกัน จะได้



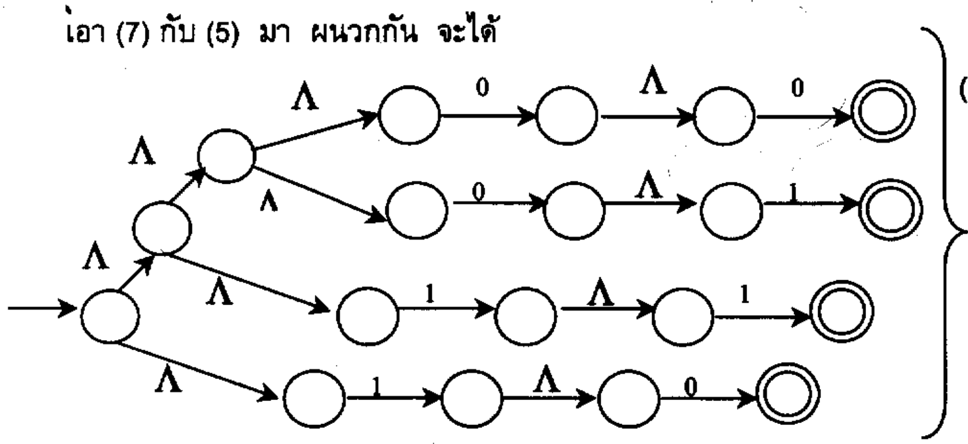
(6)

เอา (6) กับ (4) มา ผนวกกัน จะได้



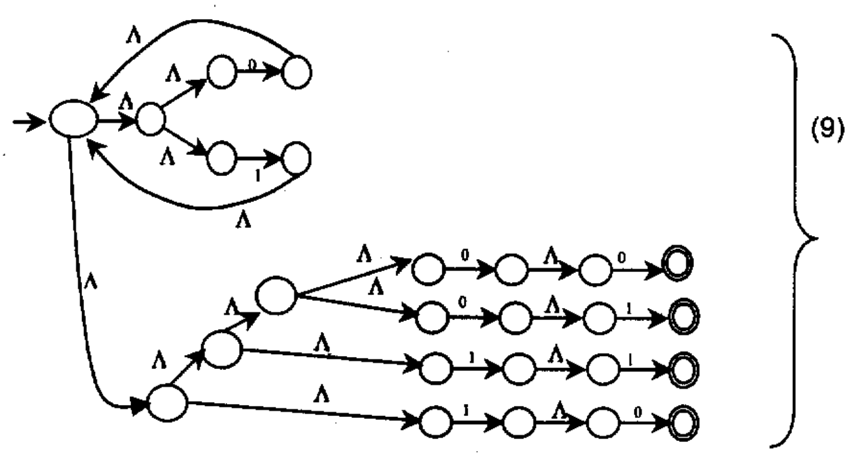
(7)

เอา (7) กับ (5) มา ผนวกกัน จะได้

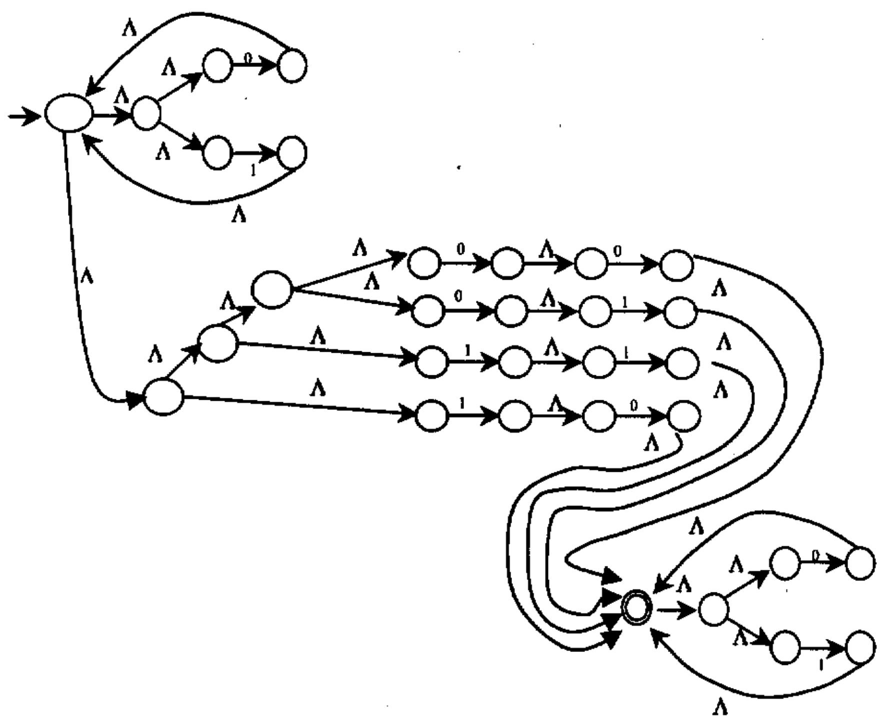


(8)

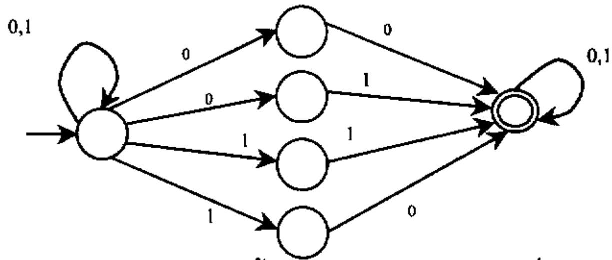
เอา 1 มา ต่อกันกับ 8 จะได้



เอา 9 มา ต่อกันกับ 1 จะได้



ในตัวอย่างนี้สามารถจัดให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้ดังนี้



จะเห็นว่าการจัดให้อยู่ในรูปอย่างง่ายนี้อาจจะทำให้รูปสุดท้ายที่ไม่มีการผลิตด้วย Λ ซึ่งจะทำแผนภาพดังกล่าวเป็นเอ็นเอฟเอด้วย

■

<u>ทฤษฎีบทที่ 4.6</u>

ภาษาปกติใด ๆ จะสามารถถูกนิยามหรือยอมรับโดย ออโตมาตาจำกัด

■

<u>ทฤษฎีบทที่ 4.7</u>

ถ้า L_1 และ L_2 เป็นภาษาปกติ (regular language)

จะได้ว่า $L_1 + L_2$, L_1L_2 , L_1^* , L_1' และ $L_1 \cap L_2$ ก็เป็นภาษาปกติ (regular language) ด้วย

■

พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 4.7

กรณีการพิสูจน์ของ $L_1 \cup L_2$, L_1L_2, L_1^* ว่าเป็นภาษาปกติหรือไม่ จะสามารถอ้างการพิสูจน์ส่วนที่ 3 ของทฤษฎีบทที่ 4.4 (Kleene's Theorem) ได้

สำหรับ $L_1 \cap L_2$ สามารถพิสูจน์ได้ดังนี้

เนื่องจาก L_1 เป็นภาษาปกติ ดังนั้นจะมี FA_1 เป็นเอฟเอที่ยอมรับ L_1

จะทำการสร้าง FA_2 เป็นเอฟเอที่ยอมรับ L_1' โดยจะสร้าง FA_2 เหมือนกับ FA_1 ทุกประการ ยกเว้นสถานะสิ้นสุด ใน FA_1 จะกลายเป็นสถานะไม่สิ้นสุด ใน FA_2 และสถานะไม่สิ้นสุด ใน FA_1 จะกลายเป็นสถานะสิ้นสุด ใน FA_2 นั่นคือ ถ้าสายอักขระรับเข้า

เดิมเคยจบที่สถานะไม่สิ้นสุด ใน FA_1 แต่ถ้านำมาประมวลผลบน FA_2 สายอักขระนั้นจะจบที่สถานะสิ้นสุดและในทางกลับกันก็เช่นเดียวกัน สรุปได้ว่า FA_2 ที่สร้างขึ้นนี้ได้ยอมรับคำทุกคำที่ไม่ถูกยอมรับจาก FA_1 และไม่ยอมรับคำทุกคำที่ FA_1 เคยยอมรับ ดังนั้น FA_2 จึงยอมรับเฉพาะภาษา L_1' นั่นคือ L_1' จึงเป็นภาษาปกติ

เนื่องจาก L_1 และ L_2 เป็นภาษาปกติ ดังนั้น L_1' และ L_2' จึงเป็นภาษาปกติด้วย และเนื่องจาก L_1' และ L_2' เป็นภาษาปกติดังนั้น

$L_1' + L_2'$ จึงเป็นภาษาปกติด้วย และเนื่องจาก $L_1' + L_2'$ เป็นภาษาปกติดังนั้น $(L_1' + L_2')'$ จึงเป็นภาษาปกติด้วย

จากกฎของเดอมอร์แกน พบว่า $(L_1' + L_2')' = L_1 \cap L_2$ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $L_1 \cap L_2$ จึงเป็นภาษาปกติ

4.5 ออโตมาตาจำกัดที่มีข้อมูลออก (Finite Automata With Output)

สำหรับออโตมาตาจำกัดที่มีข้อมูลออกที่จะกล่าวถึงนี้ มีด้วยกัน 2 ตัวคือเครื่องมัวร์ (Moore Machine) และเครื่องมีลลี (Mealy machine) โดยจะได้นิยามและแสดงตัวอย่างประกอบดังต่อไปนี้

บทนิยามที่ 4.10

เครื่องมัวร์ (Moore machine) ประกอบด้วย

1. เซตจำกัดของสถานะ $q_0, q_1, q_2, \ldots$ โดยที่ q_0 เป็นสถานะเริ่มต้น
2. ชุดตัวอักษร Σ ของสัญลักษณ์รับเข้า เช่น $\Sigma = \{a, b, c, \ldots\}$
3. ชุดตัวอักษร Γ ของสัญลักษณ์นำออก เช่น $\Gamma = \{x, y, z, \ldots\}$
4. ตารางการผ่าน (transition table) ที่อธิบายถึง แต่ละสถานะและแต่ละสัญลักษณ์รับเข้าว่าจะต้องเดินทางไปยังสถานะใดต่อไป
5. ตารางนำออก (output table) ที่อธิบายถึง การพิมพ์สัญลักษณ์นำออก จาก Γ เมื่อเดินทางไปถึงสถานะต่าง ๆ

■

เครื่องมัวร์จะเริ่มต้นพิมพ์สัญลักษณ์ตัวแรกในสถานะเริ่มต้น ดังนั้น ถ้าสายอักขระรับเข้า มีความยาว 5 ตัวอักษร จะได้ว่าสายอักขระนำออก จะมีความยาว 6 ตัวอักษร

จะเห็นว่าเครื่องมัวร์ไม่มีสถานะสิ้นสุด ดังนั้นเครื่องนี้จึงไม่ได้ทำหน้าที่ในการยอมรับภาษา แต่จะทำหน้าที่ในการอ่านสายอักขระรับเข้า และสร้างสายอักขระนำออก

ตัวอย่างที่ 4.21

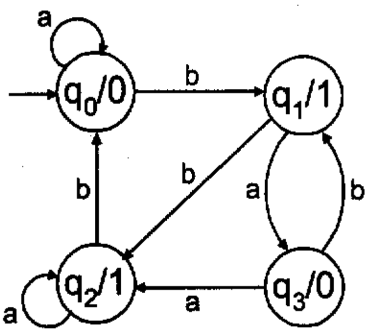
ให้ $\Sigma = \{a, b\}$

และ $\Gamma = \{0, 1\}$

ให้ q_0, q_1, q_2, q_3 เป็นสถานะ โดยที่ q_0 เป็นสถานะเริ่มต้น

	ตารางการผ่าน (transition table)		ตารางนำออก
	a	b	(output table)
q_0	q_0	q_1	0
q_1	q_3	q_2	1
q_2	q_2	q_0	1
q_3	q_2	q_1	0

สามารถใช้แผนภาพแสดงเครื่องมัวร์ได้ดังรูปต่อไปนี้



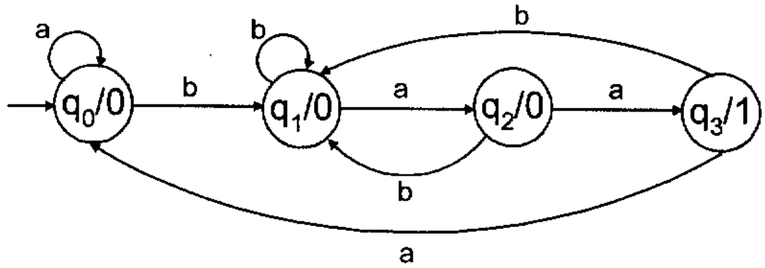
สำหรับเครื่องมัวร์ จะระบุสถานะเริ่มต้น โดยใช้ลูกศร

จากตัวอย่างนี้ ถ้าพิจารณาสายอักขระนำเข้า abbab จะได้สายอักขระนำออก คือ 001110

■

ตัวอย่างที่ 4.22

ถ้าอยากทราบว่า สายอักขระนำเข้า ที่กำลังพิจารณาอยู่นั้นประกอบด้วยสายอักขระย่อย baa ทั้งหมดเป็นจำนวนเท่าใด สามารถสร้างเครื่องมัวร์ในการนับจำนวนของ baa ให้ได้ดังรูปต่อไปนี้



ถ้าสายอักขระรับเข้า ที่กำลังพิจารณาคือ aababaaabaa จะพบว่าเมื่อนำสายอักขระนี้ไปประมวลผลบนเครื่องมัวร์ดังกล่าวก่อนหน้า จะได้สายอักขระนำออก 000000010001 นั่นคือจำนวนของ 1 ที่พบในสายอักขระนี้ก็คือจำนวนของ baa ในสายอักขระนี้นั่นเอง

■

<u>บทนิยามที่ 4.11</u>

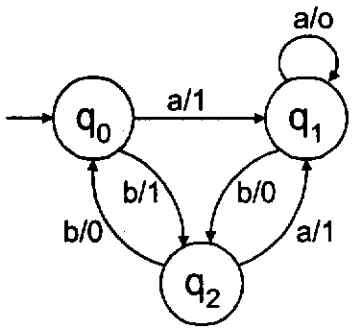
เครื่องมีลลี (Mealy machine) ประกอบด้วย

1. เซตจำกัดของสถานะ $q_0, q_1, q_2, \ldots$ โดยที่ q_0 เป็นสถานะเริ่มต้น
2. ชุดตัวอักษร Σ ของสัญลักษณ์รับเข้า เช่น $\Sigma = \{a, b, c, \ldots\}$
3. ชุดตัวอักษร Γ ของสัญลักษณ์นำออก เช่น $\Gamma = \{x, y, z, \ldots\}$
4. รูปภาพที่ประกอบด้วย วงกลมวงเล็กแทนสถานะและเส้นเชื่อมระบุทิศทาง (directed edge) ที่ระบุถึงการผ่าน(transition) ระหว่างสถานะ โดยที่แต่ละเส้นเชื่อมจะถูกเขียนกำกับด้วยสัญลักษณ์ที่อยู่ในรูปแบบ i/o โดยที่ i เป็นสัญลักษณ์รับเข้า และ o เป็นสัญลักษณ์นำออก ทุกๆ สถานะต้องมีแค่ 1 เส้นเชื่อมสำหรับแต่ละสัญลักษณ์รับเข้า เส้นเชื่อมที่ต้องเดินทางผ่านไปนั้นจะถูกกำหนดโดย สัญลักษณ์รับเข้า i และขณะที่กำลังเดินทางไปบนเส้นเชื่อมนั้น จะต้องมีการพิมพ์สัญลักษณ์นำออก o ออกมา

■

ตัวอย่างที่ 4.23

รูปต่อไปนี้เป็นเครื่องมีลลีสังเกตว่าถ้าเดินทางไปยัง q_2 สิ่งที่พิมพ์ออกมาจะขึ้นอยู่กับว่าเดินทางมาจากเส้นทางใด ถ้าเดินทางมาจาก q_0 โดยการอ่าน b จะพิมพ์ 1 แต่ถ้าเดินทางมาจาก q_1 โดยการอ่าน b จะพิมพ์ 0

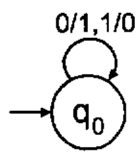


ถ้านำคำ abbbab มาประมวลผลบนเครื่องมีลลี ดังกล่าวก่อนหน้า จะได้สายอักขระนำออก คือ 100110 เนื่องจากเครื่องมีลลี จะพิมพ์สัญลักษณ์นำออกเมื่อเดินทางผ่านเส้นเชื่อม ดังนั้นเครื่องมีลลี จึงให้สายอักขระนำออก ที่มีความยาวเท่ากับสายอักขระรับเข้า

■

ตัวอย่างที่ 4.24

สามารถสร้างเครื่องมีลลี ในการพิมพ์ 1's complement ของสายอักขระรับเข้าได้ดังรูปต่อไปนี้

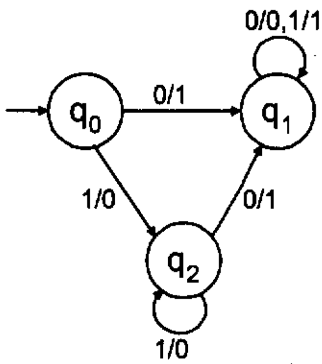


ถ้านำสายอักขระรับเข้า 110010 ไปประมวลผลบนเครื่องมีลลี ดังกล่าวก่อนหน้า จะได้สายอักขระนำออกคือ 001101

■

ตัวอย่างที่ 4.25

รูปต่อไปนี้เป็นเครื่องมีลลี ที่มีความสามารถในการเพิ่มค่าของตัวเลขจำนวนเต็มบวกทีละหนึ่ง



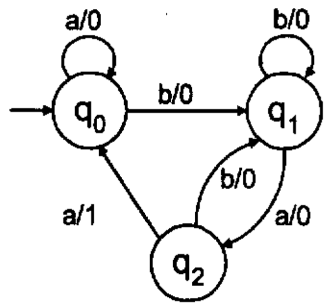
ก่อนที่สายอักขระรับเข้าจะถูกนำไปประมวลผลบนเครื่องดังกล่าวก่อนหน้า จะแปลงสายอักขระนั้นให้อยู่ในรูปของสายอักขระผันกลับจากนั้นจึงนำสายอักขระที่ได้ เข้าสู่การประมวลผลบนเครื่องดังกล่าวก่อนหน้า หลังจากประมวลผลเสร็จ จะแปลงสายอักขระนำออกให้อยู่ในรูปของสายอักขระผันกลับอีกครั้งหนึ่ง ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นสายอักขระที่ต้องการ

ตัวอย่างเช่น ถ้าสายอักขระนำเข้าคือ 1101 (มีค่าเท่ากับ 13) ก่อนการประมวลผล ต้องแปลงสายอักขระนี้ให้อยู่ในรูป 1011 จากนั้นนำ 1011 ไปประมวลผลบนเครื่องดังกล่าวก่อนหน้า ซึ่งจะได้สายอักขระนำออกคือ 0111 จากนั้นแปลงสายอักขระนี้ให้อยู่ในรูปของสายอักขระผันกลับคือ 1110 (มีค่าเท่ากับ 14) ซึ่งเป็นคำตอบที่ต้องการ

■

ตัวอย่างที่ 4.26

สามารถสร้างเครื่องมีลลี ในการนับจำนวนของสายอักขระย่อยได้เช่นเดียวกับเครื่องมัวร์ ในตัวอย่างที่ 4.22 ดังรูปต่อไปนี้



■

<u>บทนิยามที่ 4.12</u>

กำหนดให้ Me เป็นเครื่องมีลลี (Mealy machine)

และ Mo เป็นเครื่องมัวร์ (Moore machine)

โดยที่ สถานะเริ่มต้นของ Mo มีการพิมพ์สัญลักษณ์ x

จะกล่าวว่า Mo **สมมูล (equivalent)** กับ Me ถ้าทุกๆ สายอักขระรับเข้าของ Mo ได้ให้สายอักขระนำออกที่อยู่ในรูปแบบการต่อกันของ x กับสายอักขระนำออกจาก Me โดยที่ Me มีสายอักขระรับเข้าชุดเดียวกันกับ Mo

■

<u>ทฤษฎีบทที่ 4.8</u>

ถ้า Mo เป็นเครื่องมัวร์ (Moore machine)

จะได้ว่า จะมี Me เป็นเครื่องมีลลี (Mealy machine) ที่สมมูล กับ Mo

■

<u>พิสูจน์</u> (โดยใช้ขั้นตอนวิธีการสร้างเสริม)

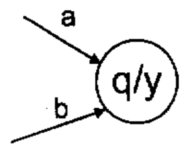
ให้ Mo เป็นเครื่องมัวร์

q เป็นสถานะใดๆ ใน M_0

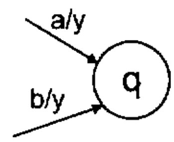
y เป็นสัญลักษณ์ที่ถูกพิมพ์เมื่อมีการเดินทางมาถึงสถานะ q

a, b เป็นสัญลักษณ์จาก Σ ที่ถูกเขียนกำกับบนเส้นเชื่อมที่เดินทางไปสู่สถานะ q

สามารถแปลง q และเส้นเชื่อมที่เดินทางเข้าสู่ q ได้ดังนี้



จะกลายเป็น

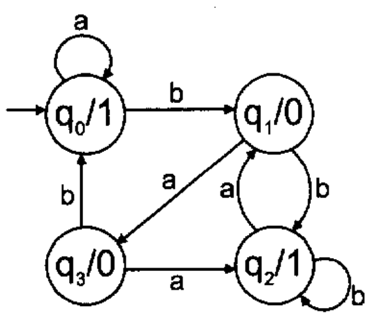


โดยจะทิ้งเส้นเชื่อมที่เดินทางออกจาก q ไว้ตามเดิม จากนั้นก็ทำขบวนการนี้ซ้ำๆ สำหรับทุกๆ สถานะใน Mo

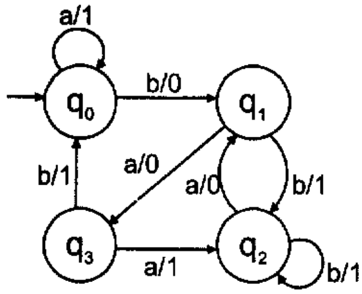
สำหรับสัญลักษณ์ที่เคยถูกพิมพ์เป็นตัวแรกใน Mo จะไม่ถูกพิมพ์เป็นตัวแรกอีกต่อไป แต่สายอักขระที่เหลือยังเหมือนเดิม ซึ่งสอดคล้องกับบทนิยามที่ 4.12 ดังนั้นโดยวิธีการนี้สามารถแปลงเครื่องมัวร์ ไปเป็นเครื่องมีลลี ได้

■

ตัวอย่างที่ 4.27



จากเครื่องมัวร์ ดังกล่าวก่อนหน้า สามารถแปลงเป็นเครื่องมีลลี ได้ดังรูปต่อไปนี้



■

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะเป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเครื่องเครื่องมีลลี (Mealy machine) กับเครื่องมัวร์ (Moore machine)

ทฤษฎีบทที่ 4.9

ถ้า Me เป็นเครื่องมีลลี (Mealy machine)

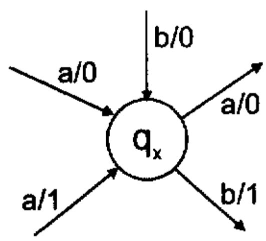
จะได้ว่า จะมี Mo เป็นเครื่องมัวร์ (Moore machine) ที่สมมูลกับ Me

■

พิสูจน์ (โดยใช้ขั้นตอนวิธีการสร้างเสริม)

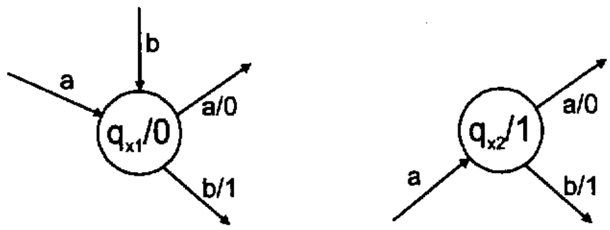
ให้ Me เป็นเครื่องมีลลี

q_x เป็นสถานะใน Me โดยที่เส้นเชื่อมที่เดินทางเข้าสู่ q_x มีการพิมพ์สัญลักษณ์ได้มากกว่า 1 วิธี ตัวอย่างเช่น



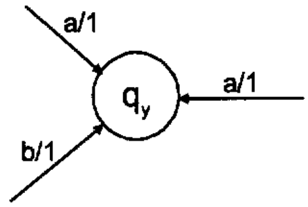
ดังนั้นในการแปลงให้อยู่ในรูปของเครื่องมัวร์ จะแบ่ง q_x ออกเป็น 2 สถานะ (ซึ่งอาจมีได้หลายสถานะเท่ากับจำนวนสมาชิกใน Γ) คือ q_{x1} และ q_{x2} โดยที่ q_{x1} พิมพ์ 0, q_{x2} พิมพ์ 1 และเส้นเชื่อมเดิมที่มีการพิมพ์ 0 จะเดินทางไปสู่ q_{x1} ส่วนเส้นเชื่อมเดิมที่มีการ

พิมพ์ 1 จะเดินทางไปสู่ q_{x2} และเส้นเชื่อมเข้าจะถูกเขียนกำกับด้วยสัญลักษณ์จาก Σ เท่านั้น ซึ่งแสดงได้ดังรูปต่อไปนี้

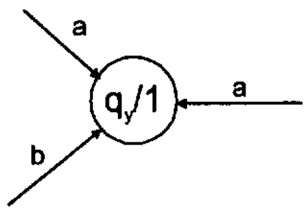


โดยยังคงทิ้งเส้นเชื่อมที่เดินทางออกจาก q_x ไว้เหมือนเดิม

แต่ถ้ามี q_y เป็นสถานะใน Me โดยที่เส้นเชื่อมที่เดินทางเข้าสู่ q_y มีการพิมพ์สัญลักษณ์เพียง 1 วิธี ตัวอย่างเช่น

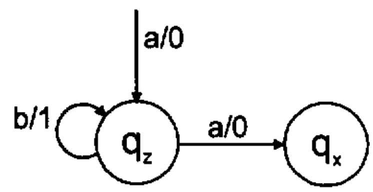


สามารถแปลงให้อยู่ในรูปของเครื่องมัวร์ ได้ดังนี้

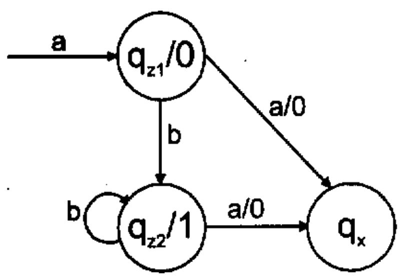


เส้นเชื่อมเข้าจะถูกเขียนกำกับด้วยสัญลักษณ์จาก Σ เท่านั้น และที่สถานะ q_y จะพิมพ์สัญลักษณ์จาก Γ

แต่ถ้ามี q_z เป็นสถานะใน Me โดยที่มีเส้นเชื่อมและวงวนเดินทางเข้าสู่ q_z โดยเส้นเชื่อมและวงวนมีการพิมพ์สัญลักษณ์ต่างกัน ตัวอย่างเช่น



สามารถแปลงให้อยู่ในรูปของเครื่องมัวร์ ได้โดยที่วงวนใน Me จะกลายเป็น 1 เส้นเชื่อมและ 1 วงวนใน Mo ดังรูปต่อไปนี้



ดังนั้นในการแปลงเครื่องมีลลี ไปเป็นเครื่องมัวร์ จะดำเนินการตามขั้นตอนวิธีดังกล่าวก่อนหน้าซ้ำ ๆ โดยจะพิจารณาทีละสถานะไปเรื่อย ๆ

ในกรณีที่สถานะไม่มีเส้นเชื่อมเดินทางเข้าไปหา สามารถให้สถานะนั้นพิมพ์อะไรออกมาก็ได้

ในกรณีที่สถานะเริ่มต้นของ Me มีการถูกแบ่งออกเป็นหลาย ๆ สถานะใน Mo สามารถกำหนดให้สถานะใดสถานะหนึ่งใน Mo เป็นสถานะเริ่มต้นก็ได้ เนื่องจากทิศทางการเดินทางไปยังสถานะอื่น ๆ นั้นเหมือนกัน

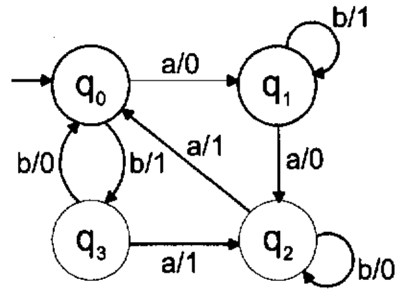
จะเห็นว่าเมื่อนำสายอักขระไปประมวลผลบน Mo จะได้เส้นทางการเดินทางจากสถานะหนึ่งไปยังอีกสถานะหนึ่ง เช่นเดียวกันกับการเดินทางใน Me ซึ่งในที่สุดจะได้สายอักขระนำออกเหมือนกัน โดยจะแตกต่างกันที่สัญลักษณ์ตัวแรกที่ถูกพิมพ์จาก Mo แต่จากบทนิยามที่ 4.12 ทำให้สรุปได้ว่า สามารถหา Mo ที่สมมูล กับ Me ได้

■

จากทฤษฎีบทที่ 4.8 และ 4.9 สามารถสรุปได้ว่า

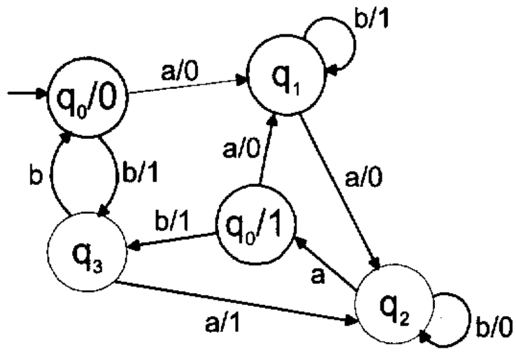
Me = Mo

ตัวอย่างที่ 4.28

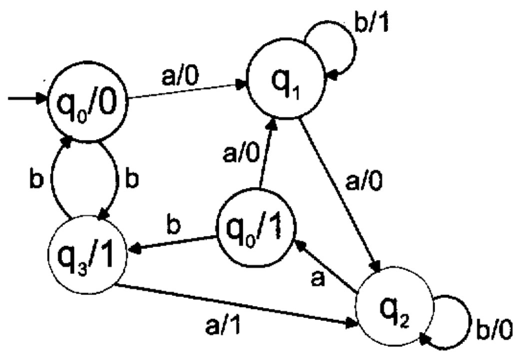


ในการแปลง Me ดังกล่าวก่อนหน้าให้อยู่ในรูปแบบของ Mo นั้นสามารถเริ่มต้นพิจารณาสถานะใดเป็นสถานะแรกก็ได้ ในที่นี้จะเริ่มต้นพิจารณาจากสถานะ q_0

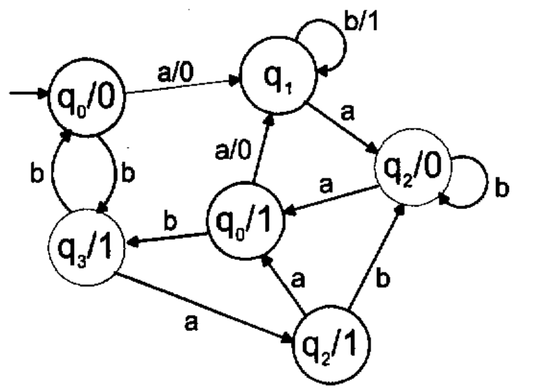
เนื่องจาก q_0 มีเส้นเชื่อมเข้าที่ถูกเขียนกำกับด้วยสัญลักษณ์จาก Γ ต่างกัน 2 เส้น ดังนั้นต้องแบ่ง q_0 ใน Mo ออกเป็น 2 สถานะซึ่งแสดงได้ดังรูปข้างล่าง



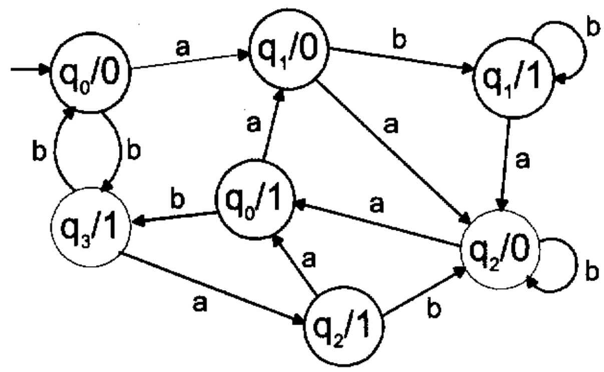
เนื่องจาก q_3 มีเส้นเชื่อมเข้าเพียงรูปแบบเดียว ดังนั้นจะได้รูปใหม่ดังนี้



พิจารณา q_2 จะเห็นว่าที่ q_2 มีเส้นเชื่อมเข้าที่ถูกเขียนกำกับด้วยสัญลักษณ์จาก Γ ต่างกัน ดังนั้นใน Mo จึงแบ่ง q_2 ออกเป็น $q_2/0$ และ $q_2/1$ ดังรูปต่อไปนี้

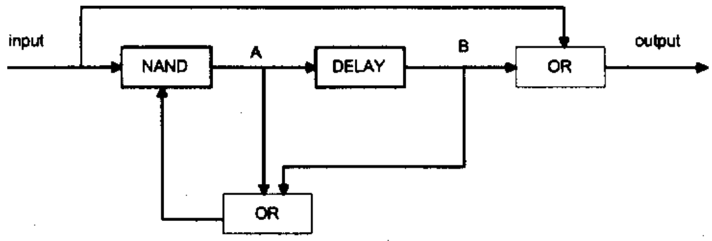


สุดท้ายมาพิจารณา q_1 ซึ่งจะได้ Mo ที่สมบูรณ์ดังรูปต่อไปนี้



■

ตัวอย่างที่ 4.29



จาก sequential circuit ดังกล่าวก่อนหน้า สามารถกำหนดสถานะบนพื้นฐานของการมีกระแสที่จุด A และ B ได้โดยในกรณีที่มีกระแสในสายจะแทนด้วย 1 ถ้าไม่มีกระแสจะแทนด้วย 0

q_0 คือ A = 0 , B = 0; q_1 คือ A = 0 , B = 1

q_2 คือ A = 1 , B = 0; q_3 คือ A = 1 , B = 1

การทำงานของวงจรนี้มีการเปลี่ยนแปลงตามกฎต่อไปนี้คือ

$B_{\text{ใหม่}}$ = $A_{\text{เก่า}}$

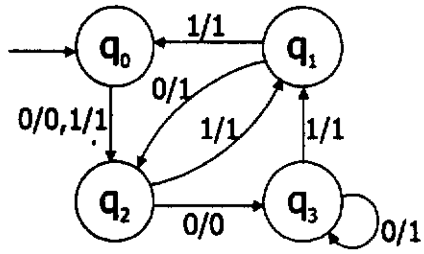
$A_{\text{ใหม่}}$ = (input) NAND ($A_{\text{เก่า}}$ OR $B_{\text{เก่า}}$)

Output = (input) OR ($B_{\text{เก่า}}$)

เมื่อมี input เข้ามา สถานะจะมีการเปลี่ยนแปลงและมีการสร้าง output ออกมา โดยตารางต่อไปนี้เป็นการสรุปการเปลี่ยนแปลงต่างๆ ที่เกิดขึ้น

สถานะเก่า	$A_{\text{เก่า}}$	$B_{\text{เก่า}}$	Input	สถานะใหม่	$A_{\text{ใหม่}}$	$B_{\text{ใหม่}}$	Output
q_0	0	0	0	q_2	1	0	0
q_0	0	0	1	q_2	1	0	1
q_1	0	1	0	q_2	1	0	1
q_1	0	1	1	q_0	0	0	1
q_2	1	0	0	q_3	1	1	0
q_2	1	0	1	q_1	0	1	1
q_3	1	1	0	q_3	1	1	1
q_3	1	1	1	q_1	0	1	1

จากตารางดังกล่าวก่อนหน้า สามารถวาดเป็นเครื่องมีลลี ได้ดังนี้



■

<u>แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4</u>

1. จาก NFA M = (Q, Σ, q_0, A, δ)

Q = {1, 2, 3, 4, 5}

Σ = {a,b}

q_0 = 1

A = {3, 5}

δ ดังแสดงในตาราง

State(q)	δ(q,a)	δ(q,b)
1	{1,3}	{1}
2	{3}	{3}
3	{4}	{4}
4	{5}	$\varnothing$
5	$\varnothing$	{5}

จงตรวจสอบว่าสายอักขระใดต่อไปนี้ที่ไม่ถูกยอมรับโดย NFA ดังกล่าว

1.1 ab　　1.2 aaabbbbab　　1.3 abababab

1.4 abaab　　1.5 abbaabbaab　　1.6 ababaaabbb

2. จงสร้างแผนภาพออโตมาต้าจำกัด DFA ที่ยอมรับภาษาเดียวกันกับ NFA ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

NFA M = (Q, Σ, q0, A, δ)

Q = {q_0,q_1,q_2,q_3}

Σ = {a,b}

q_0 = q_0

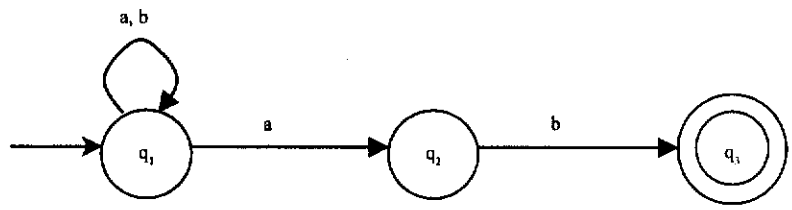
A = {q_2,q_3}

δ ดังแสดงในตาราง

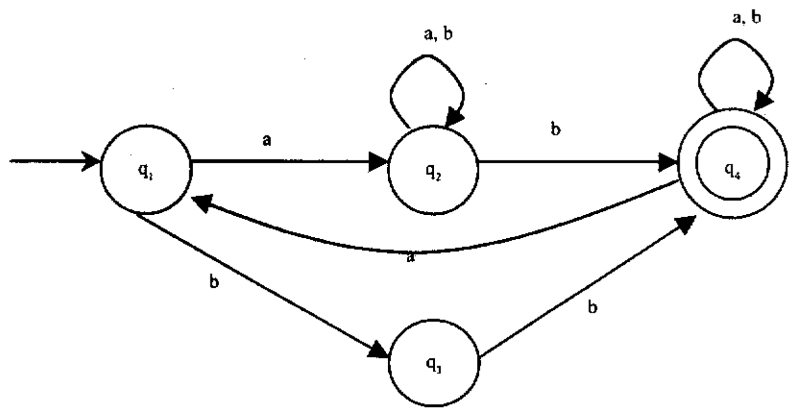
State(q)	$\delta(q,a)$	$\delta(q,b)$
q_0	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_2\}$
q_1	$\varnothing$	$\{q_3\}$
q_2	$\{q_3\}$	$\varnothing$
q_3	$\varnothing$	$\{q_0,q_3\}$

3. จากแผนภาพการผ่าน NFA ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาแผนภาพการผ่าน DFA ที่นิยามภาษาเดียวกันกับ NFA ดังกล่าว

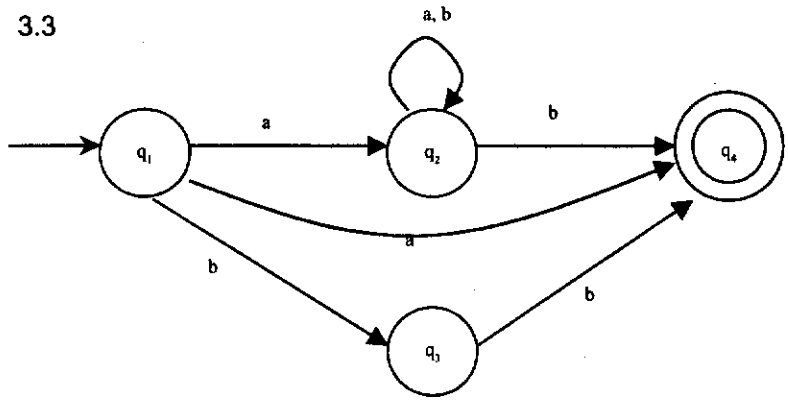
3.1



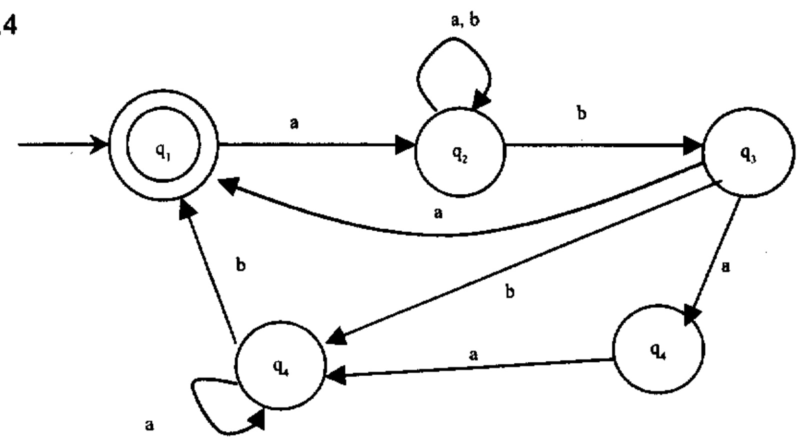
3.2



3.3



3.4



4. จากตารางการผ่านของ NFA- Λ ต่อไปนี้

State(q)	δ(q,a)	δ(q,b)	$\delta(q,\Lambda)$
1	$\varnothing$	$\varnothing$	{2}
2	{3}	$\varnothing$	{5}
3	$\varnothing$	{4}	$\varnothing$
4	{4}	$\varnothing$	{1}
5	$\varnothing$	{6, 7}	$\varnothing$
6	{5}	$\varnothing$	$\varnothing$
7	$\varnothing$	$\varnothing$	{1}

จงคำนวณหา

4.1 $\Lambda(\{2,3\}$

4.2 $\Lambda(\{1\})$

4.3 $\Lambda(\{3, 4\})$

4.4 $\delta^*(1, ab)$

4.5 $\delta^*(1, ba)$

4.6 $\delta^*(1, ababa)$

5. จากตารางการผ่านของ NFA- Λ ต่อไปนี้

State q	$\delta(q,a)$	$\delta(q,b)$	$\delta(q,\Lambda)$
1	{5}	$\varnothing$	{4}
2	{1}	$\varnothing$	$\varnothing$
3	$\varnothing$	{2}	$\varnothing$
4	$\varnothing$	{7}	{3}
5	$\varnothing$	$\varnothing$	{1}
6	$\varnothing$	{5}	{4}
7	{6}	$\varnothing$	$\varnothing$

จงคำนวณหา

5.1 $\Lambda(\{2,3\}$

5.2 $\Lambda(\{1\})$

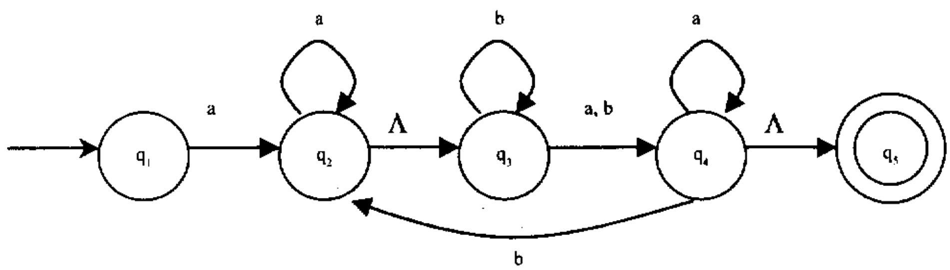
5.3 $\Lambda(\{3, 4\})$

5.4 $\delta^*(1, ab)$

5.5 $\delta^*(1, ba)$

5.5 $\delta^*(1, ababa)$

6. จากแผนภาพการผ่าน NFA- Λ ต่อไปนี้



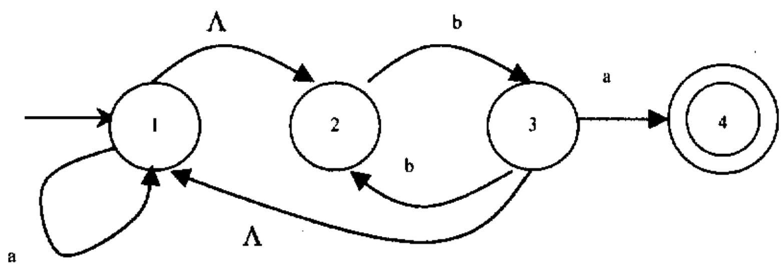
6.1 จงตรวจสอบว่าสายอักขระใดต่อไปนี้ที่ไม่ถูกยอมรับโดย NFA with empty string ดังกล่าว

a) aba	c) abab	e) aaababa
b) abaaabb	d) aaabbb	f) ababaaabbb

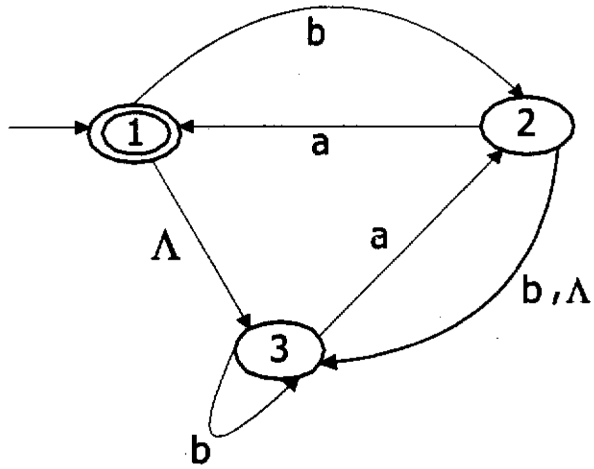
6.2 จงหานิพจน์ปกติที่สอดคล้องกับภาษาที่มี NFA- Λ ดังกล่าว

7. จงหานิพจน์ปกติที่สอดคล้องกับภาษาที่มี NFA- Λ นิยามในแต่ละข้อต่อไปนี้

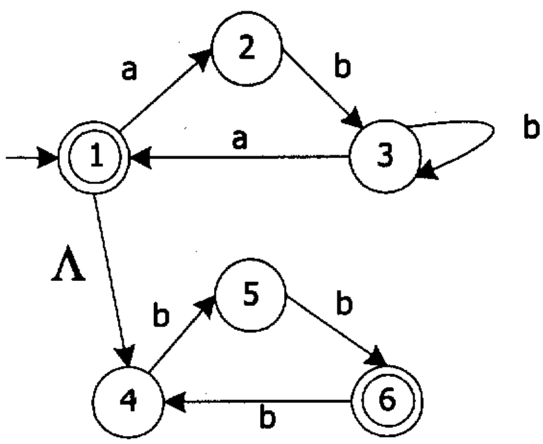
7.1



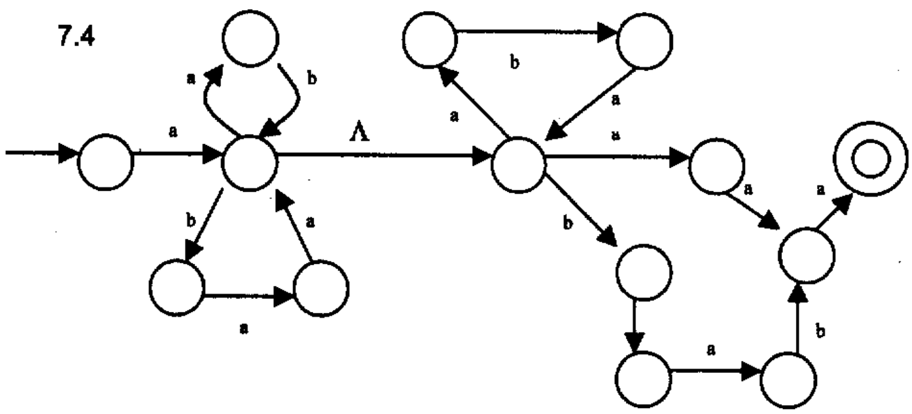
7.2



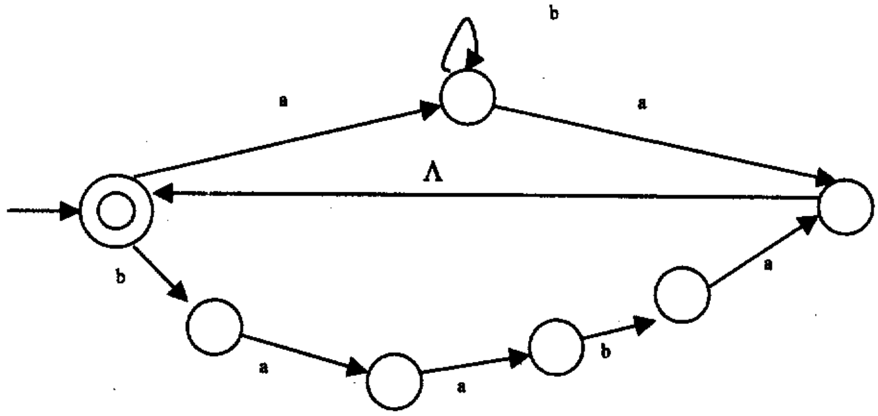
7.3



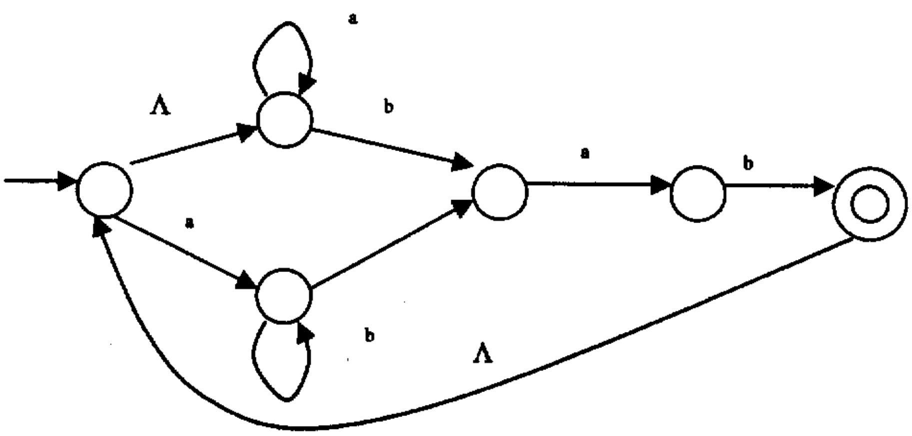
7.4



7.5

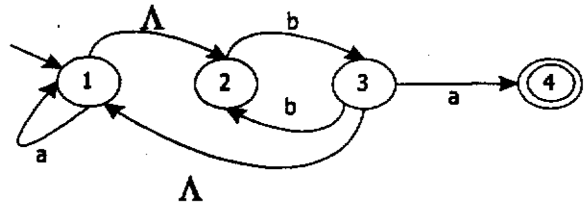


7.6

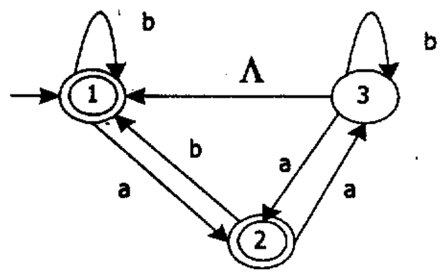


8. จงสร้างแผนภาพออโตมาตาจำกัด NFA และ DFA ที่ยอมรับภาษาเดียวกันกับ NFA- Λ ที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ $\Sigma = \{a, b\}$

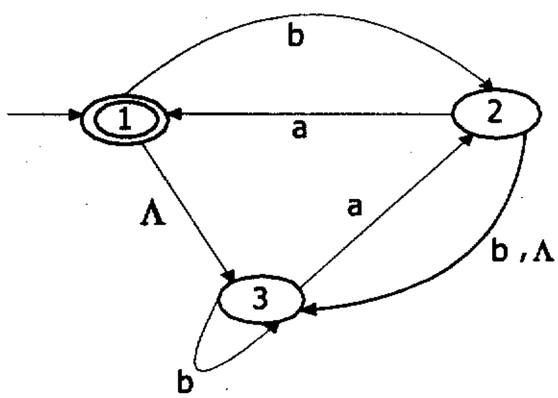
8.1



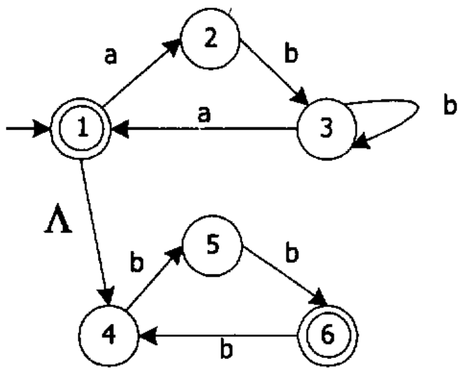
8.2



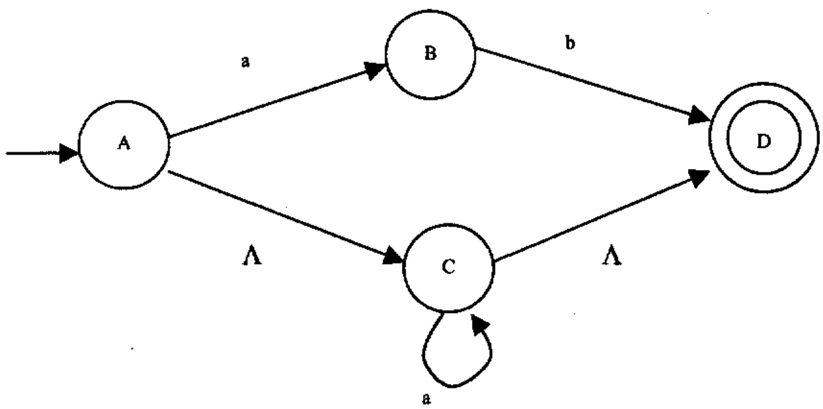
8.3



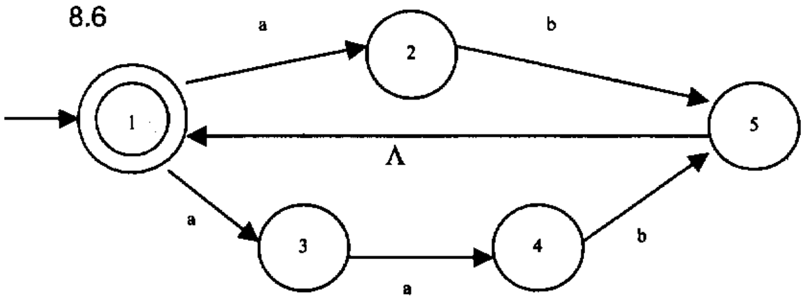
8.4



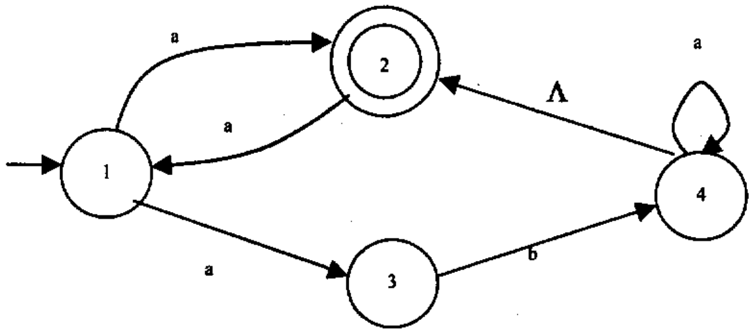
8.5



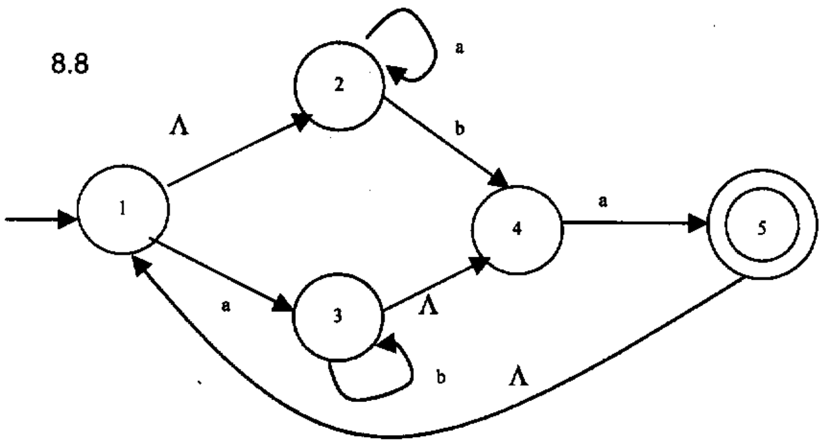
8.6



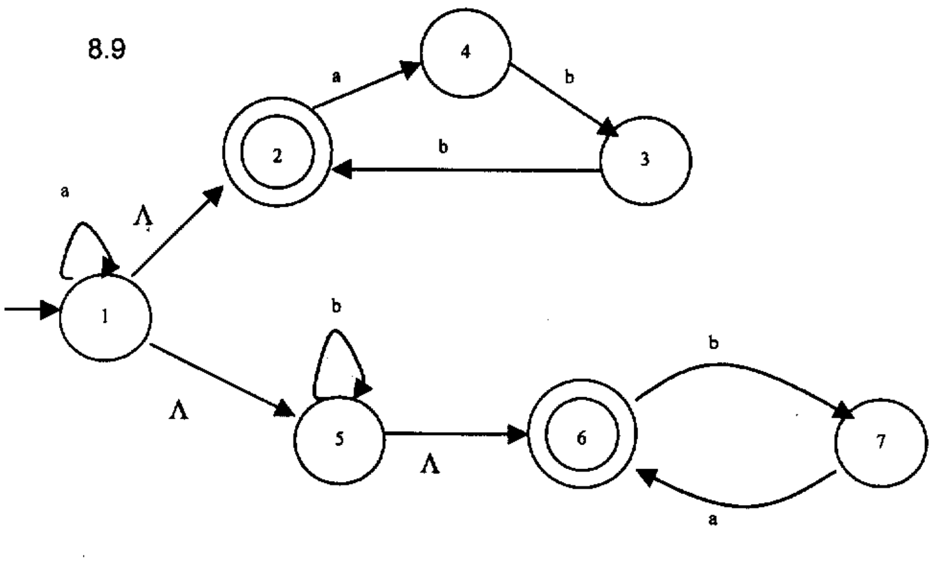
8.7



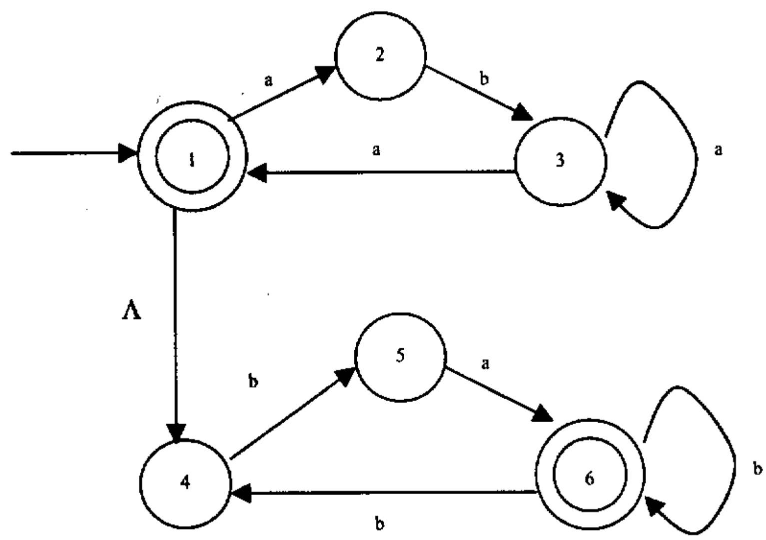
8.8



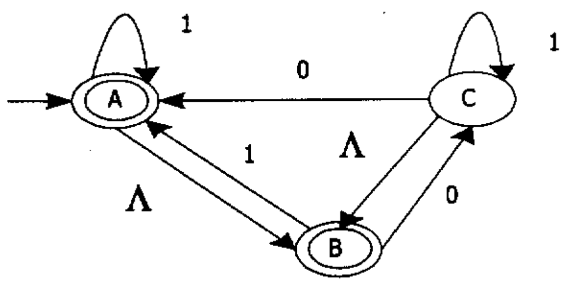
8.9



8.10



9. จงสร้างแผนภาพออโตมาตาจำกัด NFA และ DFA ที่ยอมรับภาษาเดียวกันกับ NFA -Λ ต่อไปนี้ โดยที่ Σ = {0,1}



10. จากนิพจน์ปกติในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นนิพจน์ปกติที่สร้างจาก Σ = {0, 1} จงสร้าง NFA – Λ ที่นิยามภาษาเดียวกันกับนิพจน์ปกติดังกล่าว

10.1 $(0 + 1)^*(110 + 10110)(0 + 1)^*$

10.2 ((00 + 11)*(111 + 000 + 101 + 010))

10.3 101*0 + 0(00 + 11 + 10 + 01)*1

10.4 00(11(110011 + 001100)*11)*00

10.5 (1(0+1) (11 + 00) (10 + 01)0)*

10.6 (111 + 000)(101 + 010)*(111 + 000)

11. จากนิพจน์ปกติในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นนิพจน์ปกติที่สร้างจาก Σ = {a, b} จงสร้าง NFA – Λ ที่นิยามภาษาเดียวกันกับนิพจน์ปกติดังกล่าว

11.1 (((ab*))*b + ba*)*

11.2 (aa(ab)* + bb(ba)*)aaa

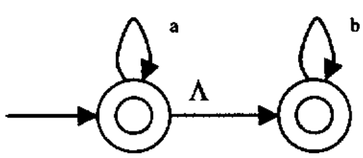
11.3 (ab + (aab)*)(aa + bb)*

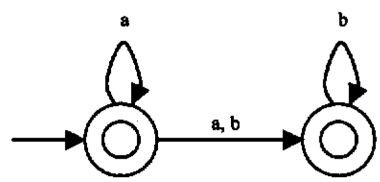
11.4 (bbb)*(abab + baba)(aa + bb)*(aaa)*

11.5 ((abbba)*(ab + ba + bb + aa)(baaab)*)*

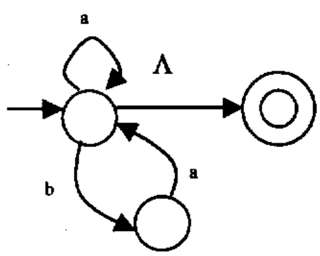
12. จาก NFA –Λ แต่ละคู่ต่อไปนี้จงพิจารณาว่า NFA –Λ คู่ใดบ้างที่นิยามภาษาเดียวกันพร้อมแสดงเหตุผลประกอบ (Σ = {a, b})

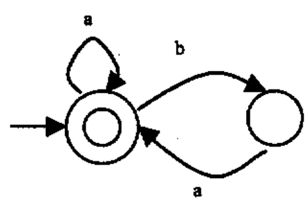
12.1



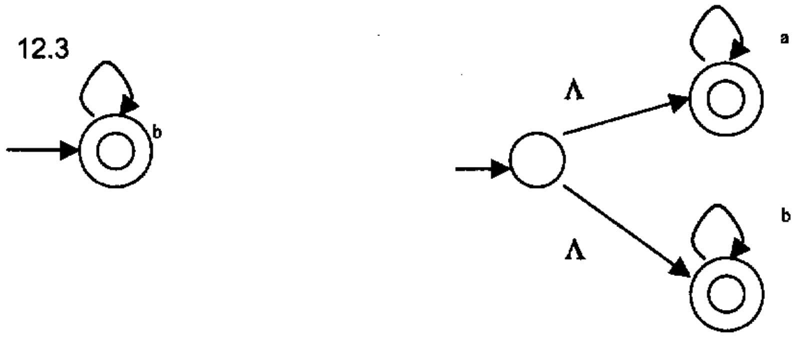


12.2

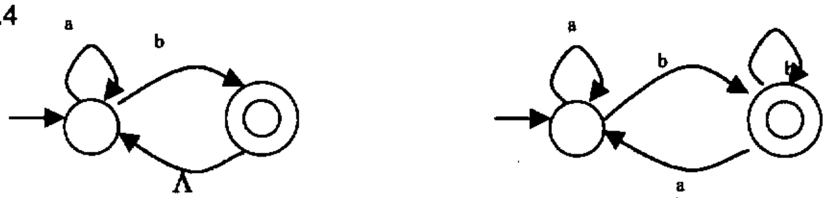




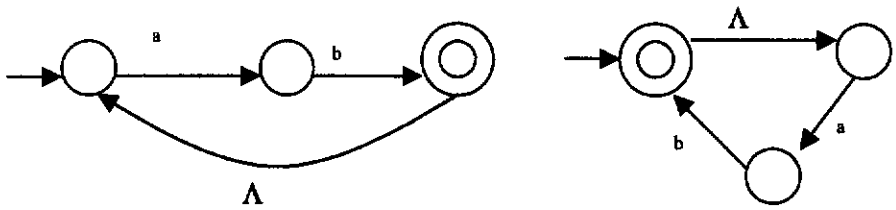
12.3



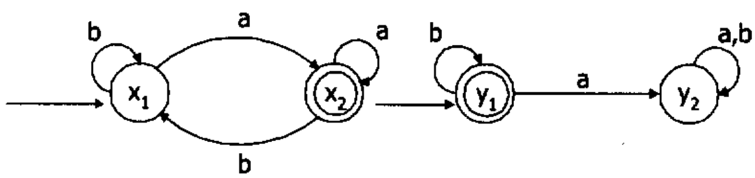
12.4



12.5



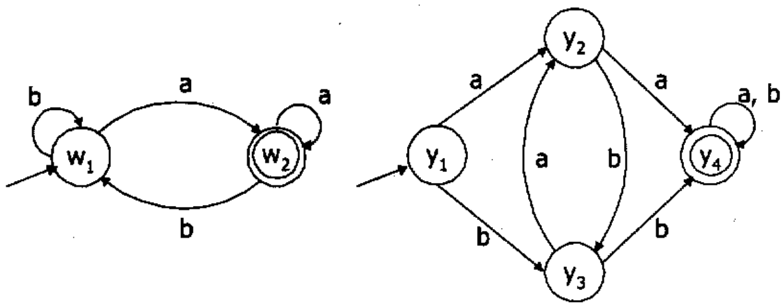
13. ให้ FA_1 และ FA_2 ต่อไปนี้เป็นดีเอฟเอที่นิยามภาษา L_1และ L_2 ตามลำดับ



FA_1 FA_2

จงหา NFA-Λ ที่นิยามภาษา $L_1 \cup L_2$, L_1L_2 , L_1^*

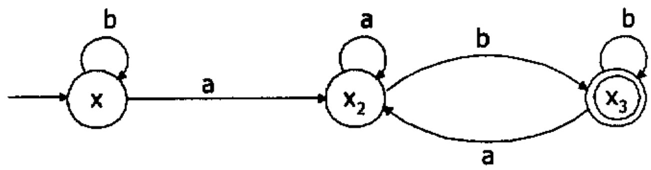
14. ให้ FA_1 และ FA_2 ต่อไปนี้เป็นดีเอฟเอที่นิยามภาษา L_1และ L_2 ตามลำดับ



FA_1 FA_2

จงหา NFA-Λ ที่นิยามภาษา $L_1 \cup L_2$, L_1L_2 , L_1^*

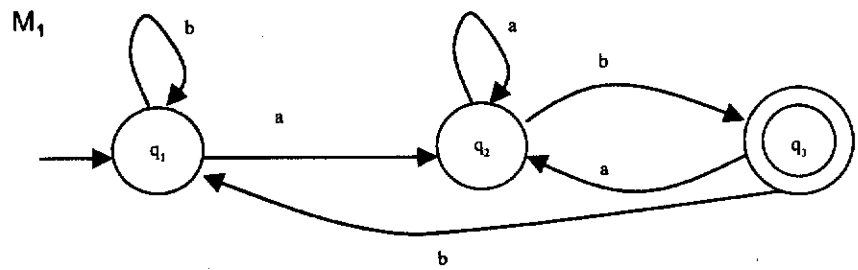
15. ให้ FA_1 ต่อไปนี้เป็นดีเอฟเอที่นิยามภาษา L_1



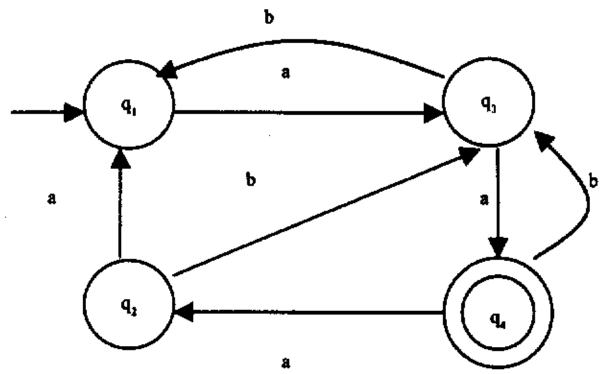
FA_1

จงหา NFA-Λ ที่นิยามภาษา L_1^*

16. จากแผนภาพการผ่าน DFA M_1 และ M_2 ที่นิยามภาษา L_1 และ L_2 ตามลำดับ จงสร้าง NFA-Λ ที่สอดคล้องกับภาษาต่อไปนี้



M_2



16.1 $L_1L_2L_1$

16.2 $L_1^* L_2$

16.3 $L_1^* L_2^*$

16.4 $(L_1^* L_2^*)^*$

16.5 $L_1L_2 \cup (L_1L_2)^*$

17. จากแผนภาพการผ่าน DFA M_1 และ M_2 ในแบบฝึกหัดข้อที่ 16 ซึ่งนิยามภาษา L_1 และ L_2 ตามลำดับ จงสร้าง NFA ที่สอดคล้องกับภาษาต่อไปนี้

17.1 L_1L_2

17.2 $L_2^* L_1$

17.3 $L_2^* \cup L_1$

17.4 $L_1 L_1L_2$

17.5 $L_2^* \cup L_1^*$

18. จากแผนภาพการผ่าน DFA M_1 และ M_2 ในแบบฝึกหัดข้อที่ 16 ซึ่งนิยามภาษา L_1 และ L_2 ตามลำดับ จงสร้าง DFA ที่สอดคล้องกับภาษาต่อไปนี้

18.1 L_1L_2

18.2 $L_2^* L_1$

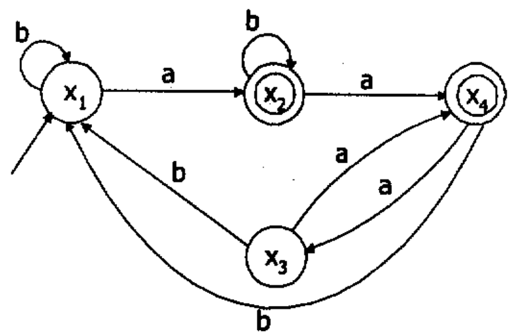
18.3 $L_2^* \cup L_1$

18.4 $L_1 L_1L_2$

18.5 $L_2^* \cup L_1^*$

19. จงสร้างทีจีที่มีจำนวนสถานะ(state) ทั้งหมด 2 สถานะ ที่ยอมรับภาษาของคำทุกคำที่มีความยาวเป็นจำนวนคู่ และมี a อยู่ในตำแหน่งของเลขคู่เสมอ เช่น aabaaaba

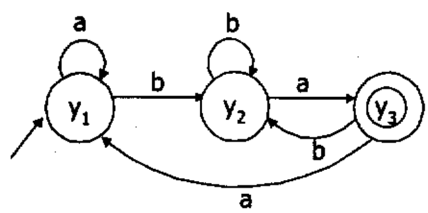
20. จงหาทีจีที่ประกอบด้วยสถานะ(state) ทั้งหมด 3 สถานะ ที่สมมูลกับ FA_1 ต่อไปนี้



FA_1

21. จงสร้างทีจีที่มีจำนวนสถานะ(state)ทั้งหมด 3 สถานะ ที่นิยามภาษาของคำทุกคำที่ซึ่ง a จะปรากฏอยู่ในกลุ่มของ a ที่ติดกันเป็นจำนวนคี่เสมอ (ไม่รวม Λ) เช่น babbaaaba , a , bbbb , aaa เป็นต้น

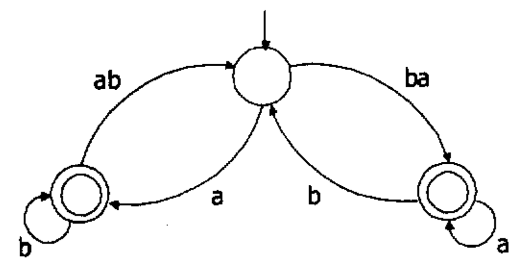
22. จงหาทีจีที่มีจำนวนสถานะ(state)ทั้งหมด 2 สถานะ ที่ยอมรับเฉพาะภาษาที่ถูกนิยามด้วย FA_1 ข้างต่อไปนี้



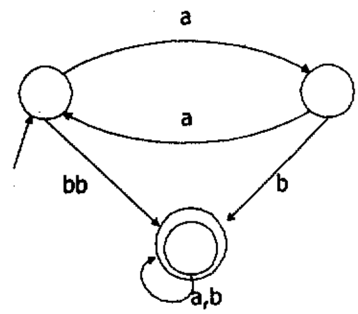
FA_1

23. จงหานิพจน์ปกติที่สอดคล้องกับภาษาที่มีทีจีนิยามในแต่ละข้อต่อไปนี้

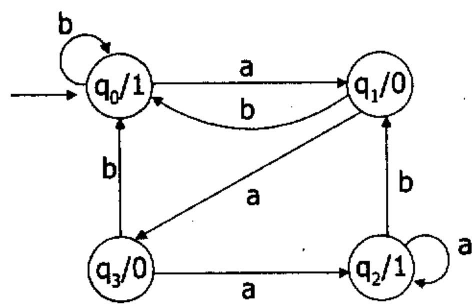
23.1



23.2

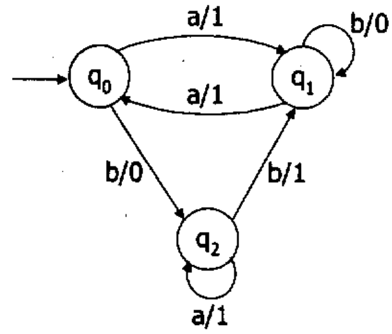


24. จงสร้างเครื่องมีลลี ที่สมมูลกับเครื่องมัวร์ต่อไปนี้

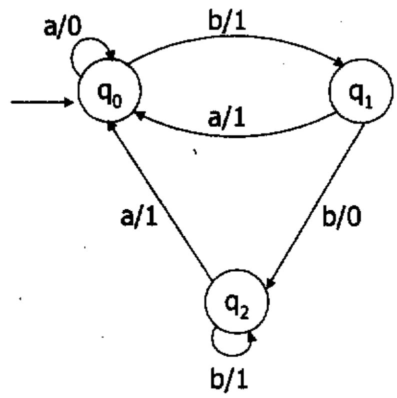


25. จงสร้างเครื่องมัวร์ ที่สมมูลกับเครื่องมีลลี ต่อไปนี้

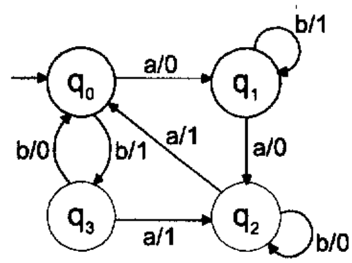
25.1



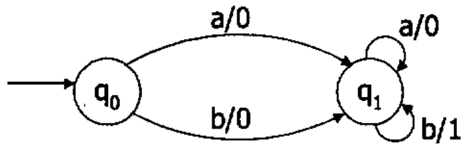
25.2



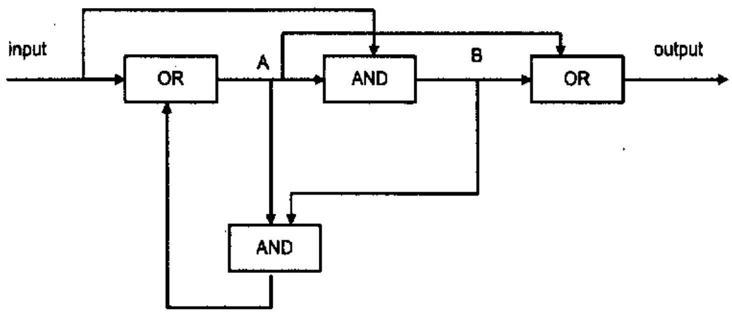
25.3



25.4



26. จงสร้าง Mealy machine ที่เทียบเท่ากับ sequential circuit ต่อไปนี้



$A_{\text{ใหม่}}$ = input OR ($A_{\text{เก่า}}$ AND $B_{\text{เก่า}}$)

$B_{\text{ใหม่}}$ = input AND $A_{\text{เก่า}}$

output = $B_{\text{เก่า}}$ OR $A_{\text{เก่า}}$

กำหนดให้ Mealy machine ประกอบด้วย 4 State ดังนี้

q_0 คือ A = 0 และ B = 0 , q_2 คือ A = 1 และ B = 0

q_1 คือ A = 0 และ B = 1 , q_3 คือ A = 1 และ B = 1

โดยที่ 0 คือ ไม่มีกระแสผ่าน, 1 คือ มีกระแสผ่าน