บทที่ 3
ออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด
(Deterministic Finite Automata)

จากที่ได้เกริ่นนำในส่วนของ เซต สัญลักษณ์ที่สำคัญต่าง ๆที่จำเป็นต้องใช้ในเนื้อหา รวมไปถึงภาษาโดยเฉพาะภาษาปกติซึ่งสามารถนิยามได้ด้วยนิพจน์ปกติดังแสดงในบทก่อนหน้าแล้วนั้น สำหรับในบทนี้จะได้กล่าวถึงตัวแบบการคำนวณตัวแรกที่สามารถใช้นิยามภาษาปกติได้เช่นกันซึ่งตัวแบบนี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแผนภาพซึ่งทำให้การเข้าใจในการทำงานง่ายยิ่งขึ้น ตัวแบบดังกล่าวนี้เรียกว่าออโตมาตาจำกัด (Finite Automata)

3.1 นิยามออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด (Deterministic Finite Automata)

ออโตมาตาจำกัดนี้สามารถแบ่งได้เป็นสองประเภทคือ ออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด (Deterministic Finite Automata) และ ออโตมาตาจำกัดเชิงไม่กำหนด (Non-deterministic Finite Automata) โดยในบทนี้จะได้พูดถึงรายละเอียดต่าง ๆ ของ ออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด (Deterministic Finite Automata) ซึ่งนิยามของออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนดสามารถนิยามได้ดังนี้

<u>บทนิยามที่ 3.1</u>

ออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด (Deterministic Finite Automata) หรือ ดีเอฟเอ (DFA) ประกอบด้วยลำดับของสมาชิก 5 ตัว (5-Tuple) คือ $(Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$

1. Q คือ เซตจำกัดของสถานะ(state)
2. Σ คือ ชุดตัวอักษร(alphabet) ของสัญลักษณ์รับเข้า
3. q_0 คือ สถานะเริ่มต้น (start state) 1 สถานะ; $q_0 \in Q$
4. A คือ เซตจำกัดของสถานะสิ้นสุด (final state) และอาจจะมีหรือไม่มีก็ได้โดย $A \subseteq Q$
5. δ คือ เซตจำกัดของฟังก์ชันการผ่าน (transitions function) ที่จะอธิบายแต่ละสถานะ และแต่ละสัญลักษณ์รับเข้าว่าจะต้องเดินทางไปยังสถานะใดต่อไป

จะสามารถเขียนฟังก์ชันการผ่านให้อยู่ในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ได้เป็น

$$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$$

และสำหรับ q ใด ๆ $q \in Q$ สัญลักษณ์ a ใดๆ $a \in \Sigma$ จะตีความ $\delta(q,a)$ ได้ว่าสถานะที่ซึ่งดีเอฟเอต้องเดินทางจากสถานะ q เมื่อรับข้อมูลเข้า a

■

ตัวอย่างที่ 3.1

จากชุดตัวอักษร $\Sigma = \{ a , b \}$

ให้ x , y , z เป็นสถานะ โดยที่

x เป็นสถานะเริ่มต้น

z เป็นสถานะสิ้นสุด

และกำหนดกฎของการผ่าน คือ

1. จากสถานะ x ถ้าอ่าน a จะเดินทางไปยังสถานะ y ==> $\delta(x,a) = y$
2. จากสถานะ x ถ้าอ่าน b จะเดินทางไปยังสถานะ z ==> $\delta(x,b) = z$
3. จากสถานะ y ถ้าอ่าน a จะเดินทางไปยังสถานะ x ==> $\delta(y,a) = x$
4. จากสถานะ y ถ้าอ่าน b จะเดินทางไปยังสถานะ z ==> $\delta(y,b) = z$
5. จากสถานะ z ถ้าอ่าน a จะเดินทางไปยังสถานะ z ==> $\delta(z,a) = z$
6. จากสถานะ z ถ้าอ่าน b จะเดินทางไปยังสถานะ z ==> $\delta(z,b) = z$

จากข้อมูลข้างต้นของตัวอย่างนี้ถือว่าเป็นการนิยามดีเอฟเอที่สมบูรณ์ เนื่องจากได้ระบุองค์ประกอบในการนิยามดีเอฟเอครบทั้ง 5 ส่วนคือ สถานะ, ชุดตัวอักษร, สถานะเริ่มต้น, เซตของสถานะสิ้นสุด และ การผ่าน

สำหรับกฎการผ่านข้างต้น สามารถเขียนใหม่ให้อยู่ในรูปของตารางได้ดังนี้คือ

ข้อมูลที่อ่านเข้า

	q	$\delta(q,a)$	$\delta(q,b)$
สถานะ	x	y	z
	y	x	z
	z	z	z

จะเรียกตารางนี้ว่า ตารางการผ่าน (Transition Table) โดยแต่ละคอลัมน์ในแถวที่ 1 จะเป็นหัวตารางของข้อมูล

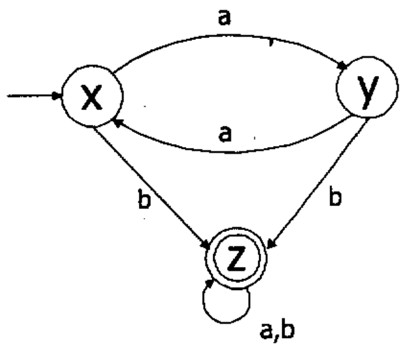
คอลัมน์ที่ 1 แถวที่ 1 จะเป็นหัวตารางที่อ้างถึงสถานะของดีเอฟเอ ซึ่งชื่อสถานะทั้งหมดของดีเอฟเอในตารางจะเริ่มอ้างถึงตั้งแต่แถวที่ 2 เป็นต้นไปในคอลัมน์ที่ 1

สำหรับตั้งแต่คอลัมน์ที่ 2 เป็นต้นไปในแถวที่ 1 จะเป็นหัวตารางของการกำหนดรูปแบบการเดินหรือฟังก์ชันการผ่านจากสัญลักษณ์แต่ละตัวใน Σ โดยผลการกำหนดรูปแบบการเดินในแต่ช่อง (ตั้งแต่คอลัมน์ที่ 2 และ แถวที่ 2 เป็นต้นไป) ของตารางจะได้เป็นสถานะใหม่ที่ดีเอฟเอจะเคลื่อนที่ไป

นอกจากนี้ยังสามารถมองดีเอฟเอเป็นเครื่องมือชนิดหนึ่ง ซึ่งมีการเคลื่อนที่ จากสถานะหนึ่งไปยังอีกสถานะหนึ่งในขณะที่สัญลักษณ์รับเข้า ถูกอ่านขึ้นมาทีละตัว (โดยอ่านจากทางซ้ายไปทางขวา)

ในการอธิบายเครื่องมือดีเอฟเอดังกล่าว จะมีการนำเอาแผนภาพการผ่าน (Transition Diagram) มาใช้เพื่อความสะดวกและง่ายต่อการเข้าใจ

จากตัวอย่างที่ 3.1 สามารถสร้างดีเอฟเอ โดยใช้ แผนภาพการผ่านดังนี้

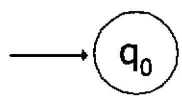


■

สำหรับแผนภาพการผ่านนี้ จะสามารถสรุปองค์ประกอบที่ใช้ในการสร้างได้ดังนี้

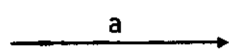
1. สถานะใด ๆ ในแผนภาพจะแทนด้วยวงกลม

2. สถานะเริ่มต้น(start state) จะแทนด้วยวงกลมที่มีลูกศรชี้เข้า



3. สถานะสิ้นสุด (final state) จะแทนด้วยวงกลมซ้อนกันสองวง

4. การเดินทางจากสถานะหนึ่งไปยังอีกสถานะหนึ่ง จะแทนด้วยเส้นเชื่อม (edge) โดยมี a $\in \Sigma$ อยู่บนเส้นเชื่อม



3.2 การออกแบบออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด

ก่อนจะทำการออกแบบดีเอฟเอนั้น จำเป็นที่จะต้องเข้าใจถึงคุณสมบัติของดีเอฟเอให้ชัดเจนโดยเฉพาะการกำหนดฟังก์ชันการผ่านหรือทางเดิน ซึ่งจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขของนิยามดีเอฟเอ

สำหรับคุณสมบัติของการกำหนดฟังก์ชันการผ่านหรือทางเดิน ในแต่ละสถานะของดีเอฟเอมีดังนี้

1. ทุกๆ สถานะต้องมีจำนวนเส้นเชื่อมออก (out-edge) เท่ากับจำนวนสมาชิกที่มีอยู่ในชุดตัวอักษร Σ โดยแต่ละเส้นเชื่อมจะถูกเขียนกำกับด้วยสัญลักษณ์แต่ละตัวจากชุดตัวอักษร Σ

2. สมาชิกที่มีอยู่ในชุดตัวอักษร จะปรากฏบนเส้นเชื่อมออกในแต่ละสถานะได้เพียง 1 เส้นเชื่อมเท่านั้น

3. สัญลักษณ์บนเส้นเชื่อมสามารถเป็นได้แค่สมาชิกในชุดตัวอักษร Σ เท่านั้น

ขั้นตอนการตรวจสอบสายอักขระของดีเอฟเอจะทำการตรวจสอบจากซ้ายไปขวาโดยจะไม่สามารถรู้ได้เลยว่าสายอักขระจะสิ้นสุดหรือหมดเมื่อใด ดังนั้นการตรวจสอบของดีเอฟเอจะต้องพร้อมที่จะยอมรับหรือไม่ยอมรับได้ตลอดเวลา สำหรับขั้นตอนการออกแบบโดยคร่าว ๆ สามารถแสดงเป็นตัวอย่างได้ดังนี้

เริ่มต้นด้วย การตัดสินใจว่าดีเอฟเอจะต้องจดจำข้อมูลของสายอักขระหรือคำในภาษาที่อ่านเข้ามาเพื่อตรวจสอบอย่างไร เนื่องจากดีเอฟเอมีสถานะซึ่งเปรียบเสมือนหน่วยความจำที่มีอยู่อย่างจำกัด ในกรณีที่สายอักขระยาวมากก็อาจจะไม่สามารถจำข้อมูลได้หมด สำหรับบางภาษาอาจไม่มีความจำเป็นที่จะต้องจำสายอักขระทั้งหมดโดยจะจดจำเฉพาะส่วนสำคัญหลัก ๆ ของภาษาเท่านั้น ซึ่งส่วนสำคัญของแต่ละภาษาก็จะมีความแตกต่างกันออกไป

เช่นถ้า $\Sigma = \{ 0, 1 \}$ และกำหนดให้ภาษาที่จะนิยามด้วยดีเอฟเอเป็นภาษาที่ประกอบด้วยสายอักขระที่มี 1 เป็นเลขคี่

ในส่วนของสายอักขระที่จะตรวจสอบจะเป็นสายอักขระที่เกิดจากการเอาอักขระใน Σ มาเขียนต่อกัน และการจดจำสายอักขระดังกล่าวไม่มีความจำเป็นที่จะต้องจำสายอักขระที่เป็น 1 ทั้งหมดว่าเป็นจำนวนคี่หรือไม่ โดยจะจำเพียงว่าที่ตรวจสอบผ่านไปแล้ว

มี 1 เป็นจำนวนคี่หรือจำนวนคู่น่าจะเพียงพอ จากนั้นก็จะทำการติดตามสายอักขระย่อยที่เหลือที่ยังไม่ได้ตรวจสอบโดยถ้าการตรวจสอบล่าสุดมี 1 เป็นจำนวนคี่ จากนั้นถ้าอักขระใหม่ที่จะอ่านเข้ามาเป็น 1 คำตอบล่าสุดก็จะถูกเปลี่ยน แต่ถ้าอักขระใหม่ที่อ่านเป็น 0 คำตอบล่าสุดก็จะคงเดิม

เมื่อรู้ข้อมูลที่จำเป็นต่อการออกแบบแล้ว ผู้ออกแบบจะต้องแสดงข้อมูลนี้เป็นรายการจำกัดของความเป็นไปได้ในการตรวจสอบออกมา ซึ่งจากตัวอย่างจะได้

1. ความเป็นไปได้ที่จะอ่านข้อมูลล่าสุดนับ 1 ได้เป็นจำนวนคี่
2. ความเป็นไปได้ที่จะอ่านข้อมูลล่าสุดนับ 1 ได้เป็นจำนวนคู่

จากนั้นในแต่ละความเป็นไปได้จะถูกกำหนดให้เป็นสถานะดังนี้

ขั้นตอนถัดไปคือการกำหนดการออกแบบการผ่านโดยพิจารณาว่าจะมีการผ่านอย่างไรบนสถานะความเป็นไปได้ทั้งหมด

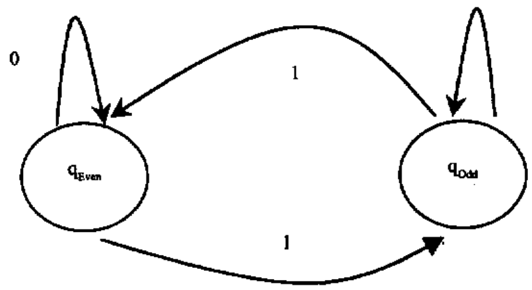
ที่สถานะ q_{Even} อ่าน 0 จะยังคงทำให้จำนวนของ 1 ที่อ่านมาทั้งหมดเป็นคู่ จึงคงอยู่ที่สถานะเดิม

ที่สถานะ q_{Even} อ่าน 1จะทำให้จำนวนของ 1 ที่อ่านมาทั้งหมดเป็นคี่ จึงเดินไปที่สถานะเดิม q_{Odd}

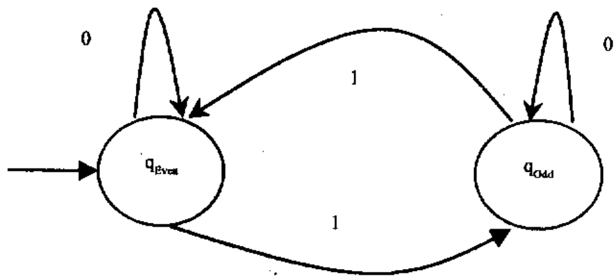
ที่สถานะ q_{Odd} อ่าน 0 จะยังคงทำให้จำนวนของ 1 ที่อ่านมาทั้งหมดเป็นคี่ จึงคงอยู่ที่สถานะเดิม

ที่สถานะ q_{Odd} อ่าน 1จะทำให้จำนวนของ 1 ที่อ่านมาทั้งหมดเป็นคู่ จึงเดินไปที่สถานะเดิม q_{Even}

จากการพิจารณาการผ่านดังกล่าวสามารถเขียนเป็นแผนภาพได้ดังนี้

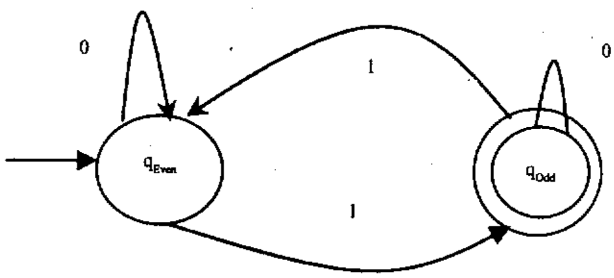


จากนั้นกำหนดสถานะเริ่มต้นตามความเป็นไปได้เริ่มต้นของการอ่านสายอักขระ ซึ่งเมื่อเริ่มการอ่านสายอักขระจะถือว่าจำนวนรวมของ 1 ยังเป็นศูนย์ซึ่งถือเป็นจำนวนคู่ ดังนั้นสถานะ q_{Even} จึงเป็นสถานะเริ่มต้น



ขั้นตอนสุดท้าย ทำการกำหนดสถานะสิ้นสุดหรือสถานะยอมรับ ตามความเป็นไปได้ที่จะยอมรับคำในภาษา โดยสถานะที่มองความเป็นไปได้ที่จำนวนรวมของ 1 เป็นจำนวนคี่คือสถานะ q_{Odd} ดังนั้นจะให้สถานะ q_{Odd} เป็นสถานะยอมรับหรือสถานะสิ้นสุด

จากนั้นจะได้ดีเอฟเอที่นิยามภาษาที่ต้องการในที่สุดดังแสดงได้ในแผนภาพการผ่านต่อไปนี้



ตัวอย่างที่ 3.2

กำหนดให้ภาษา $L = \{ X \in \{0, 1\}^* \mid X$ ลงท้ายด้วย 001 $\}$

จงสร้าง ดีเอฟเอ ที่นิยามหรือยอมรับภาษาดังกล่าว

ในขั้นตอนการสร้าง ดีเอฟเอจะต้องพิจารณาองค์ประกอบครบทั้ง 5 ส่วนตามนิยามของ ดีเอฟเอและข้อควรจำก็คือ ดีเอฟเอจะไม่มีหน่วยความจำ ดังนั้นการที่จะตรวจสอบได้ว่า สายอักขระใดจะถูกยอมรับหรือไม่จะต้องได้จากการอ่านสายอักขระทั้งหมดและในช่วงการอ่านสายอักขระบางส่วนเข้าไป ดีเอฟเอจะไม่รู้เลยว่าจะสิ้นสุดสายอักขระเมื่อใด

ดังนั้น ณ ตำแหน่งใด ๆของสายอักขระดีเอฟเอจะต้องอยู่ในสถานะที่พร้อมที่จะเดินและยอมรับสายอักขระที่อ่านมาเสมอ ซึ่งหมายความว่าดีเอฟเอ จะพิจารณาการยอมรับด้วยตำแหน่งที่อยู่ของสถานะไปพร้อม ๆ กับการอ่านสายอักขระที่ตรวจสอบ

จากภาษาที่ให้มาองค์ประกอบที่รู้เป็นอันดับแรกก็คือ $\sum = \{ 0 , 1 \}$

องค์ประกอบถัดไปที่สามารถกำหนดได้เลยคือสถานะเริ่มต้น โดยในที่นี้ให้เท่ากับ q_0

จากนั้นจะทำการพิจารณาสถานะอื่นๆ สถานะยอมรับไปพร้อม ๆ กับการพิจารณาการผ่านที่จะเป็นส่วนในการสร้างดีเอฟเอดังนี้

คำที่เล็กที่สุดที่อยู่ในภาษาคือ 001 และคำที่ความยาวอื่นจะอยู่ในรูปของ $(0 + 1)^*001$

จากการพิจารณาคำที่เป็นไปได้ทำให้ทราบว่ามันจะสนใจเพียงสายอักขระย่อย 001ท้ายสุดเท่านั้น ดังนั้นการตรวจสอบการยอมรับของดีเอฟเอ จะพิจารณาว่าการอ่านสายอักขระเข้ามานั้นจะนำไปสู่การยอมรับหรือการอ่าน 001 เมื่อใดโดยใช้สถานะเป็นตัวกำหนดดังนี้

ที่สถานะเริ่มต้น q_0 รอสายอักขระ 001 อ่าน 0 เข้ามา จะเดินไปยังสถานะที่รอการอ่าน 01 เพื่อนำไปสู่การยอมรับซึ่งเป็นสถานะใหม่ให้ชื่อว่า q_1

ที่สถานะเริ่มต้น q_0 รอสายอักขระ 001 อ่าน 1 เข้ามา จะเดินไปยังสถานะที่รอการอ่าน 001 เพื่อนำไปสู่การยอมรับซึ่งเป็นสถานะ q_0 สถานะเดิม

ที่สถานะ q_1 รอสายอักขระ 01 อ่าน 0 เข้ามา จะเดินไปยังสถานะที่การอ่าน 1 เพื่อนำไปสู่การยอมรับซึ่งเป็นสถานะใหม่ให้ชื่อว่า q_2

ที่สถานะ q_1 รอสายอักขระ 01 อ่าน 1 เข้ามา จะเดินไปยังสถานะที่รอการอ่าน 001 เพื่อนำไปสู่การยอมรับซึ่งเป็นสถานะ q_9 สถานะเดิม

ที่สถานะ q_2 รอสายอักขระ 1 อ่าน 0 เข้ามา จะเดินไปยังสถานะที่รอการอ่าน 1 เพื่อนำไปสู่การยอมรับซึ่งเป็นสถานะ q_2 สถานะเดิม

ที่สถานะ q_2 รอสายอักขระ 1 อ่าน 1 เข้ามา จะเดินไปยังสถานะยอมรับซึ่งเป็นสถานะใหม่และเป็นสถานะสิ้นสุดให้ชื่อว่า q_3

ที่สถานะสิ้นสุด q_3 อ่าน 0 เข้ามา จะเดินไปยังสถานะที่รอการอ่าน 01 เพื่อนำไปสู่การยอมรับซึ่งเป็นสถานะ q_1 สถานะเดิม

ที่สถานะสิ้นสุด q_3 อ่าน 1 เข้ามา จะเดินไปยังสถานะที่รอการอ่าน 001 เพื่อนำไปสู่การยอมรับซึ่งเป็นสถานะ q_0 สถานะเดิม

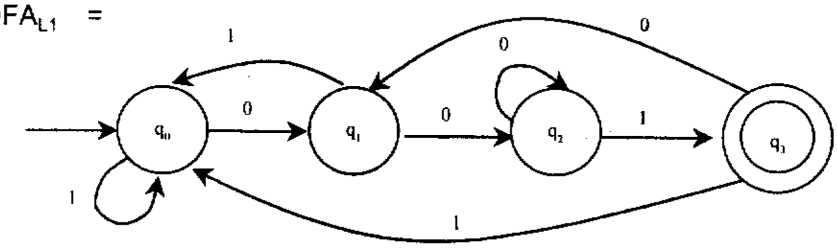
จากการพิจารณาการผ่านของภาษาทำให้ได้องค์ประกอบที่เหลือดังนี้

เซตของสถานะทั้งหมด = $\{ q_0, q_1, q_2, q_3\}$

เซตของสถานะสิ้นสุด = $\{ q_3\}$

และเมื่อสามารถหาองค์ประกอบของการสร้างดีเอฟเอได้ครบทั้งห้าองค์ประกอบแล้ว จะสามารถแสดงการนิยามดังกล่าวด้วยแผนภาพการผ่านดังนี้

DFA_{L1} =



■

ตัวอย่างที่ 3.3

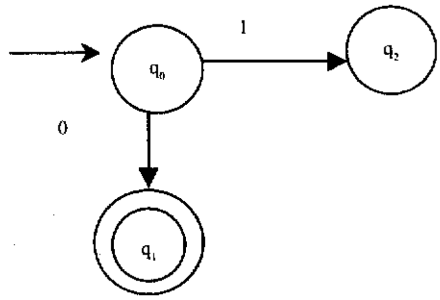
จากภาษาที่นิยามด้วยนิพจน์ปกติต่อไปนี้ จงหาดีเอฟเอที่ยอมรับภาษาดังกล่าว

นิพจน์ปกติของภาษาคือ $(11 + 110)^*0$

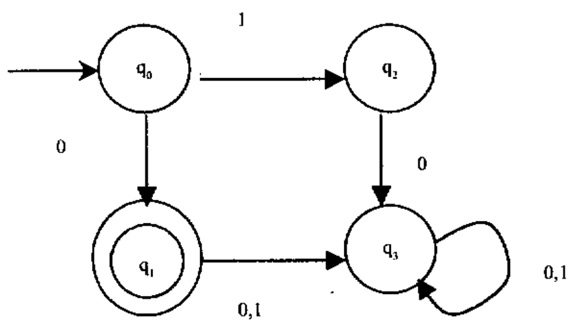
ในการออกแบบหรือสร้างดีเอฟเอ จะต้องพิจารณาว่าสายอักขระใดบ้างที่ไม่ใช่คำในภาษา ส่วนคำที่อยู่ในภาษาก็ต้องพิจารณาตั้งแต่คำที่เล็กที่สุดตลอดไปจนถึงคำทั่ว ๆ ไป

เมื่อพิจารณาจากนิพจน์ปกติแล้วจะได้ว่าสายอักขระว่าง Λ จะไม่อยู่ในภาษา ดังนั้นจะได้ว่าสถานะเริ่มต้นจะต้องไม่เป็นสถานะยอมรับ ส่วนสายอักขระ 0 จะเห็นว่าเป็นคำที่อยู่ในภาษา ดังนั้นจากสถานะเริ่มต้น เมื่อทำการอ่านอักขระ 0 เข้ามามันจะต้องเดินไปยังสถานะยอมรับได้ แต่สำหรับสายอักระ 1 จะเป็นสายอักขระที่ไม่อยู่ในภาษาและมันจะต้องแยกสถานะที่จะเดินให้มีความแตกต่างจากสายอักขระว่าง Λ เนื่องจากว่าถ้ามีการ

อ่านสายอักขระเข้ามาเป็น 110 มันจะต้องเดินไปยังสถานะยอมรับได้ จากการพิจารณามาถึงตรงนี้จะได้ว่าจะต้องสร้างดีเอฟเอที่ประกอบไปด้วยสถานะดังนี้



สำหรับภาษานี้จะเห็นว่ามันยอมรับคำ 0 แต่จะไม่ยอมรับสายอักขระที่ขึ้นต้นด้วย 0 รวมไปถึงสายอักขระที่ขึ้นต้นด้วย 10 ดังนั้นจะทำให้สามารถสร้างสถานะขึ้นมาใหม่ชื่อว่า q_3 เพื่อเป็นทางเดินของทุกสายอักขระที่ขึ้นต้นด้วยสายอักขระย่อย 0 หรือ 10 ดังกล่าว ซึ่งถือว่าเป็นสายอักขระที่ไม่อยู่ในภาษาและเมื่อเดินถึงสถานะนี้มันจะไม่สามารถเดินต่อไปยังสถานะอื่นได้อีกโดยจะแสดงด้วยภาพต่อไปนี้

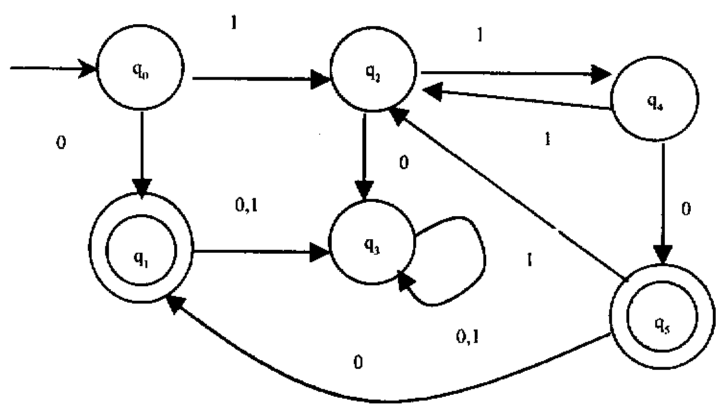


ถัดมาจะพิจารณาที่สถานะ q_2 โดยมีการอ่านอักขระ 1 เข้ามากรณีนี้จะต้องเดินไปสถานะอื่นเนื่องจากว่าระหว่างสายอักขระ 1 และ 11 จะต้องสามารถแยกความแตกต่างกันได้ (เช่น $110 \in L$, แต่ $10 \notin L$ และ $1110 \notin L$) และมันจะไม่เดินกลับไปที่สถานะเริ่มต้นเพราะจะต้องแยกความแตกต่างของสายอักขระว่าง Λ กับสายอักขระ 11 ออกจากกัน

ด้วย นั่นก็หมายความว่าจะต้องมีการสร้างสถานะใหม่ขึ้นมาโดยจะให้ชื่อว่า q_4 และจากสถานะ q_4 เมื่ออ่านอักขระ 0 มันจะสามารถเดินไปยังสถานะยอมรับได้เพราะ 110 $\in$ L แต่จะไม่สามารถเดินไปยังสถานะยอมรับ q_1 ได้เพราะ 110 เป็นสายอักขระย่อยเริ่มต้นของคำที่อยู่ในภาษาที่มีความยาวมากขึ้น ซึ่งไม่ใช่สายอักขระย่อย 0 ดังนั้นจะให้ q_5 เป็นสถานะยอมรับใหม่

จากสถานะ q_5 ถ้ามีการอ่านอักขระ 0 เข้ามา สายอักขระย่อยที่อ่านได้ล่าสุดจะเหมือนกับการอ่าน 0 เป็นตัวแรกเข้ามา นั่นคือ 1100 จะเป็นคำที่อยู่ในภาษาแต่ว่ามันจะไม่เป็นสายอักขระย่อยเริ่มต้นของคำในภาษา ดังนั้นจะให้ $\delta\ (q_5, 0) = q_1$

สำหรับ $\delta\ (q_4, 1)$ และ $\delta\ (q_5, 1)$ ยังไม่ได้มีกำหนดทางเดิน เมื่อพิจารณาแล้วจะเห็นว่าสถานะ q_4 และ q_5 เป็นสถานะที่มีการอ่านสายอักขระย่อยโดยสิ้นสุดการอ่านที่ 110 และ 11 ตามลำดับ ถ้ามีการอ่านอักขระ 1 เข้ามา จะทำให้สามารถพิจารณาได้ว่า จะเป็นการเริ่มต้นพิจารณาการอ่านสายอักขระย่อย 11 หรือ 110 เข้ามาใหม่ ซึ่งทำให้ได้ว่า $\delta\ (q_4, 1) = \delta\ (q_5, 1) = \delta\ (q_4, 1) = q_3$ และถือเป็นการสิ้นสุดการออกแบบโดยจะได้ ดีเอฟเอ ที่ต้องการในที่สุดดังแสดงได้ในแผนภาพ



■

การออกแบบด้วยกระบวนการดังกล่าวจะใช้วิธีการพิจารณาเพิ่มสถานะเข้าไปตามความจำเป็นเท่าที่ต้องการจนกว่าจะได้ดีเอฟเอที่สมบูรณ์ ซึ่งค่อนข้างทำให้เกิดความผิดพลาดได้ง่าย

สำหรับวิธีการออกแบบและสร้าง ดีเอฟเอ ที่หลีกเลี่ยงความยากและผิดพลาดดังกล่าวจะได้มีการพิจารณาต่อไป

การตรวจสอบสายอักขระใด ๆ ว่าจะเป็นคำในภาษาที่มีดีเอฟเอนิยามหรือยอมรับ สามารถแสดงได้โดยการใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ที่เรียกว่าฟังก์ชันการผ่านดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยามที่ 3.2

ให้ $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ เป็นออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด จะกำหนดฟังก์ชันการผ่านของออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนดโดยเขียนแทนด้วย δ^*

ที่ซึ่ง $\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$ ได้ดังนี้

1. สำหรับ q ใด ๆ $q \in Q$, $\delta^*(q, \Lambda) = q$
2. สำหรับ y ใด ๆ $y \in \Sigma^*$, a ใด ๆ $a \in \Sigma$ และ q ใด ๆ $q \in Q$ จะได้ว่า

$\delta^*(q, ya) = \delta(\delta^*(q, y), a)$

■

สำหรับการระบุว่าสายอักขระใดๆ จะถูกยอมรับโดยดีเอฟเอ รวมถึงภาษาใดๆ ที่จะมีดีเอฟเอยอมรับนั้นจะสามารถนิยามให้ชัดเจนได้ดังนี้

บทนิยามที่ 3.3

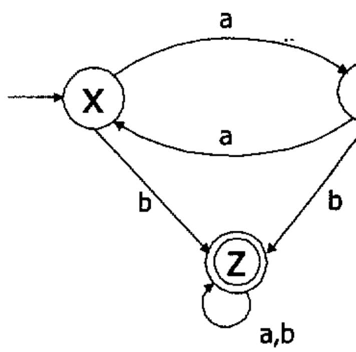
ให้ $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ เป็นออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด สายอักขระ $x \in \Sigma^*$ จะถูกยอมรับโดย M ถ้า $\delta^*(q_0, x) \in A$ ถ้าสายอักขระไม่ถูกยอมรับ ซึ่งอธิบายได้ว่าถูกปฏิเสธ (Rejected) โดย M ส่วนภาษาที่ถูกยอมรับ (Accepted or Recognized) โดย M คือเซต $L(M) = \{ x \in \Sigma^* \mid x$ ถูกยอมรับโดย $M\}$ โดยสามารถกล่าวในอีกนัยหนึ่งได้ว่า ถ้า L เป็นภาษาใด ๆ บน Σ, L ถูกยอมรับโดย M ก็ต่อเมื่อ $L = L(M)$

■

การทำงานของดีเอฟเอ จะเริ่มต้นที่สถานะเริ่มต้น โดยเริ่มต้นอ่านสัญลักษณ์จากสายอักขระรับเข้าทีละตัว โดยเริ่มจากสัญลักษณ์ตัวซ้ายสุด โดยที่สัญลักษณ์แต่ละตัวที่ถูกอ่านจะเป็นตัวกำหนดลำดับของสถานะ ลำดับการอ่านหรือการตรวจสอบสายอักขระจะสิ้นสุดเมื่อ สัญลักษณ์ตัวสุดท้ายของสายอักขระรับเข้าถูกอ่านขึ้นมา ถ้าลำดับการอ่านตัวสุดท้ายของสายอักขระรับเข้าสิ้นสุดที่สถานะยอมรับ จะได้ว่าดีเอฟเอ จะยอมรับสายอักขระรับเข้าดังกล่าว แต่ถ้าไม่ได้สิ้นสุดที่สถานะยอมรับ จะกล่าวได้ว่าดีเอฟเอไม่ยอมรับสายอักขระรับเข้านั้น

ตัวอย่างที่ 3.4

จากชุดตัวอักษร $\Sigma = \{ a , b \}$ และจากตัวอย่างที่ 3.1



จงพิจารณา ดีเอฟเอนี้ว่า ยอมรับสายอักขระ aaa หรือไม่ โดยเริ่มพิจารณาที่สถานะเริ่มต้น x

จากสถานะ x เมื่ออ่าน a จะเดินทางไปยังสถานะ y
จากสถานะ y เมื่ออ่าน a จะเดินทางไปยังสถานะ x
จากสถานะ x เมื่ออ่าน a จะเดินทางไปยังสถานะ y

จะเห็นว่า ลำดับไม่ได้สิ้นสุดที่สถานะที่เป็นสมาชิกของเซตของสถานะยอมรับดังนั้น ดีเอฟเอนี้จึงไม่ยอมรับ aaa ว่าอยู่ในภาษาที่ถูกนิยามหรือยอมรับโดยดีเอฟเอนี้

มาพิจารณาสายอักขระรับเข้า สายอื่นบ้างเช่น abba

จากสถานะ x เมื่ออ่าน a จะเดินทางไปยังสถานะ y

จากสถานะ y เมื่ออ่าน b จะเดินทางไปยังสถานะ z

จากสถานะ z เมื่ออ่าน b จะเดินทางไปยังสถานะ z

จากสถานะ z เมื่ออ่าน a จะเดินทางไปยังสถานะ z

จะเห็นว่า ลำดับสิ้นสุดที่สถานะที่เป็นสมาชิกของเซตของสถานะยอมรับ ดังนั้น abba จึงเป็นคำที่ถูกยอมรับโดยดีเอฟเอนี้

■

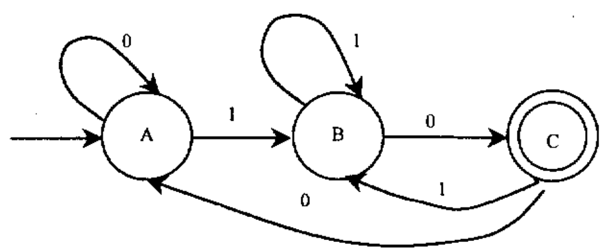
จากการพิจารณาดีเอฟเอตัวอย่างที่ 3.1 จะพบว่า ไม่ว่าจะอยู่ที่สถานะใดก็ตาม เมื่ออ่าน b มันจะเดินทางไปยังสถานะ z ทันที และขณะที่อยู่ในสถานะ z ไม่ว่าจะอ่าน a หรือ b ก็ยังคงอยู่ในสถานะ z นั่นคือดีเอฟเอนี้จะยอมรับคำทุกคำที่มี b อย่างน้อย 1 ตัว ซึ่งสามารถนิยามโดยนิพจน์ปกติ ได้ดังนี้

$$(a+b)^* b(a+b)^*$$

จากนิยามที่ 2 และนิยามที่ 3 สามารถทำการตรวจสอบสายอักขระ $x \in \Sigma^*$ ใด ๆ ว่าเป็นคำในภาษาที่มีดีเอฟเอยอมรับหรือไม่ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3.5

จากชุดตัวอักษร $\Sigma = \{0, 1\}$ และแผนภาพการผ่านของดีเอฟเอต่อไปนี้



จงตรวจสอบว่าสายอักขระต่อไปนี้ถูกยอมรับโดย ดีเอฟเอข้างต้นหรือไม่

X_1 = 00000111010

X_2 = 010101101

จากนิยาม $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$

$$\delta^{*}(q, ya) = \delta(\delta^{*}(q, y), a)$$

X_1 = 00000111010 เป็นคำในภาษาที่นิยามหรือยอมรับด้วยดีเอฟเอดังกล่าวหรือไม่

$$\delta^{*}(A, 00000111010) = \delta(\underline{\delta^{*}(A, 0000011101)}, 0) \Rightarrow C$$

เริ่มต้น สิ้นสุด

$$= \delta(\underline{\delta^{*}(A, 000001110)}, 1) \Rightarrow B$$
$$= \delta(\underline{\delta^{*}(A, 00000111)}, 0) \Rightarrow C$$
$$= \delta(\underline{\delta^{*}(A, 0000011)}, 1) \Rightarrow B$$
$$= \delta(\underline{\delta^{*}(A, 000001)}, 1) \Rightarrow B$$
$$= \delta(\underline{\delta^{*}(A, 00000)}, 1) \Rightarrow B$$
$$= \delta(\underline{\delta^{*}(A, 0000)}, 0) \Rightarrow A$$
$$= \delta(\underline{\delta^{*}(A, 000)}, 0) \Rightarrow A$$
$$= \delta(\underline{\delta^{*}(A, 00)}, 0) \Rightarrow A$$
$$= \delta(\underline{\delta^{*}(A, 0)}, 0) \Rightarrow A$$
$$= \delta(\underline{\delta^{*}(A, \Lambda)}, 0) \Rightarrow A$$
$$= \delta^{*}(A, \Lambda) \longrightarrow \Rightarrow A$$

$\therefore$ X_1 = 00000111010 ถูกยอมรับ ดังนั้น X_1 จึงเป็นคำในภาษาดังกล่าว

X_2 = 010101101 เป็นคำในภาษาที่นิยามหรือยอมรับด้วยดีเอฟเอดังกล่าวหรือไม่

$$\delta^{*}(A, 010101101) = \delta(\underline{\delta^{*}(A, 01010110)}, 1) \Rightarrow B$$
$$= \delta(\underline{\delta^{*}(A, 0101011)}, 0) \Rightarrow C$$

$= \delta(\underline{\delta^*(A, 010101)}, 1) \quad \Rightarrow B$

$= \delta(\underline{\delta^*(A, 01010)}, 1) \quad \Rightarrow B$

$= \delta(\underline{\delta^*(A, 0101)}, 0) \quad \Rightarrow C$

$= \delta(\underline{\delta^*(A, 010)}, 1) \quad \Rightarrow B$

$= \delta(\underline{\delta^*(A, 01)}, 0) \quad \Rightarrow C$

$= \delta(\underline{\delta^*(A, 0)}, 1) \quad \Rightarrow B$

$= \delta(\underline{\delta^*(A, \Lambda)}, 0) \quad \Rightarrow A$

$= \delta^*(A, \Lambda) \quad \Rightarrow A$

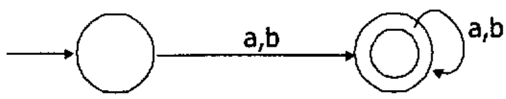
$\therefore$ X_2 = 010101101 ไม่ถูกยอมรับ ดังนั้น X_2 ไม่เป็นสมาชิกของภาษานี้

■

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของ ดีเอฟเอที่นิยามหรือยอมรับภาษาในลักษณะต่าง ๆ

ตัวอย่างที่ 3.6

จากชุดตัวอักษร $\Sigma = \{ a , b \}$



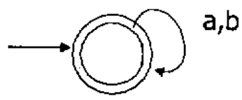
ดีเอฟเอ ดังกล่าวนี้ยอมรับคำทุกคำยกเว้น Λ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปนิพจน์ปกติได้คือ $(a+b)(a+b)^*$ หรือ $(a+b)^+$

■

จากตัวอย่างก่อนหน้านี้จะพบว่าไม่มีความจำเป็นต้องกำหนดชื่อให้กับสถานะ ก็ได้ การยอมรับ Λ ของแผนภาพการผ่าน นั้น สถานะเริ่มต้น จะต้องเป็นสถานะเดียวกันกับสถานะยอมรับ

ตัวอย่างที่ 3.7

จากชุดตัวอักษร $\Sigma = \{ a , b \}$ สามารถแสดงแผนภาพการผ่านดีเอฟเอ ที่ยอมรับคำทุกคำ รวมทั้ง Λ ด้วยได้ดังนี้

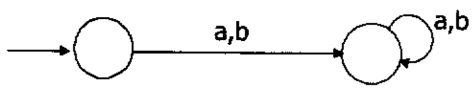


ซึ่งนิพจน์ปกติของดีเอฟเอนี้คือ $(a+b)^*$

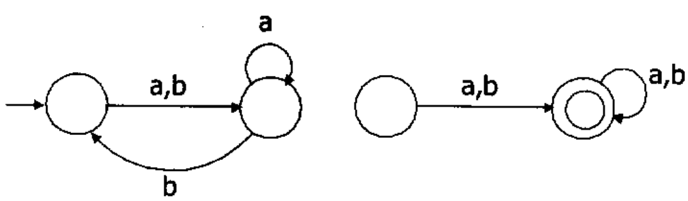
■

พิจารณาดีเอฟเอ ที่ไม่ยอมรับภาษาใดๆ เลย โดยจะแบ่งออกเป็น 2 ประเภท

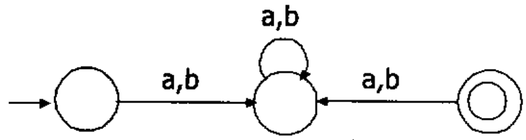
1. ดีเอฟเอที่ไม่มีสถานะสิ้นสุดเช่น



2. ดีเอฟเอที่มีสถานะสิ้นสุดแต่ว่าไม่สามารถเข้าถึงได้จากสถานะเริ่มต้นเช่น



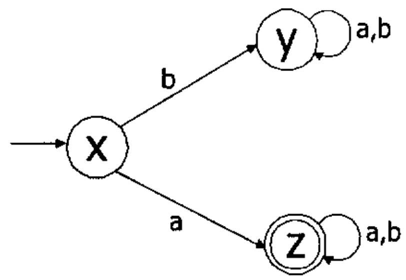
หรือ



■

ตัวอย่างที่ 3.8

จากชุดตัวอักษร Σ = { a , b } ดีเอฟเอต่อไปนี้ยอมรับคำทุกคำที่ขึ้นต้นด้วย a หรือเขียนเป็นนิพจน์ปกติได้คือ $a(a+b)^*$

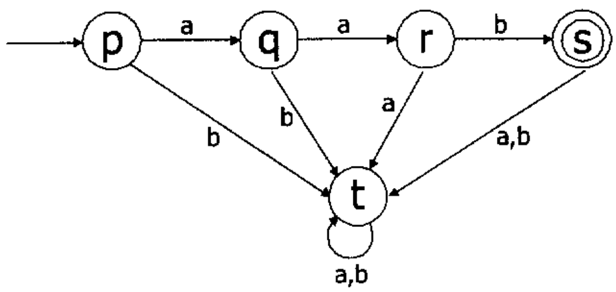


ในขณะที่กำลังอ่านสัญลักษณ์จากสายอักขระรับเข้าทีละตัวนั้น ถ้ามีการเดินทางไปยังสถานะ y หรือ z จะพบว่า ไม่สามารถเดินทางออกจากสถานะ y หรือ z ได้อีก จะเรียกสถานะแบบนี้ว่า สถานะทางตัน (dead end state) ซึ่งสถานะ นี้อาจจะเป็นสถานะยอมรับ หรือไม่ก็ได้

■

ตัวอย่างที่ 3.9

จากชุดตัวอักษรΣ = { a , b }

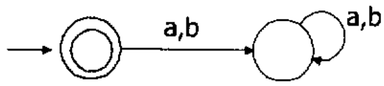


ดีเอฟเอดังกล่าวนี้ยอมรับคำ aab เท่านั้น จะเห็นว่าสถานะ t เป็นสถานะทางตัน

■

ตัวอย่างที่ 3.10

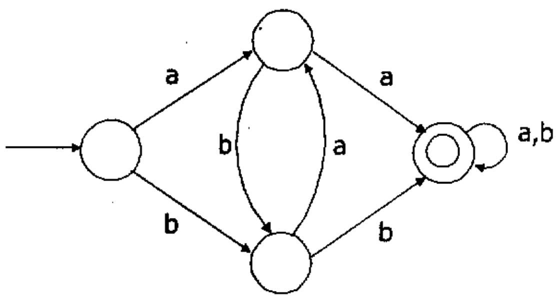
จากชุดตัวอักษร $\Sigma = \{ a , b \}$ ดีเอฟเอต่อไปนี้ยอมรับเฉพาะ Λ



■

ตัวอย่างที่ 3.11

จากชุดตัวอักษร $\Sigma = \{ a , b \}$

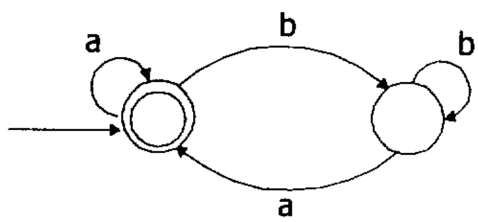


คำทุกคำที่ถูกยอมรับโดยดีเอฟเอ ดังกล่าวนี้สามารถเขียนในรูปนิพจน์ปกติ ได้คือ $(a+b)^*(aa+bb)(a+b)^*$

■

ตัวอย่างที่ 3.12

จากชุดตัวอักษร $\Sigma = \{ a , b \}$ ดีเอฟเอต่อไปนี้ยอมรับคำทุกคำที่ลงท้ายด้วย a รวมทั้ง Λ ด้วย

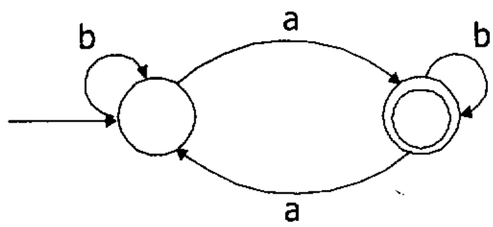


เขียนในรูปนิพจน์ปกติ ได้คือ $\Lambda + (a+b)^*a$

■

ตัวอย่างที่ 3.13

จากชุดตัวอักษร Σ = { a , b } ดีเอฟเอ ต่อไปนี้ยอมรับคำทุกคำที่ประกอบด้วยจำนวนของ a ทั้งหมดเป็นจำนวนคี่

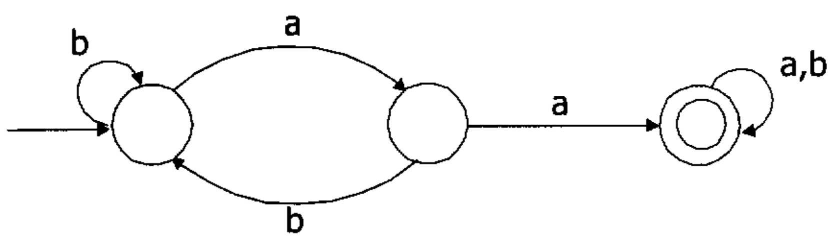


เขียนในรูปนิพจน์ปกติ ได้คือ $b^*ab^*(ab^*ab^*)^*$

■

ตัวอย่างที่ 3.14

จากชุดตัวอักษรΣ = { a , b } ดีเอฟเอต่อไปนี้ยอมรับคำทุกคำที่ประกอบด้วย aa

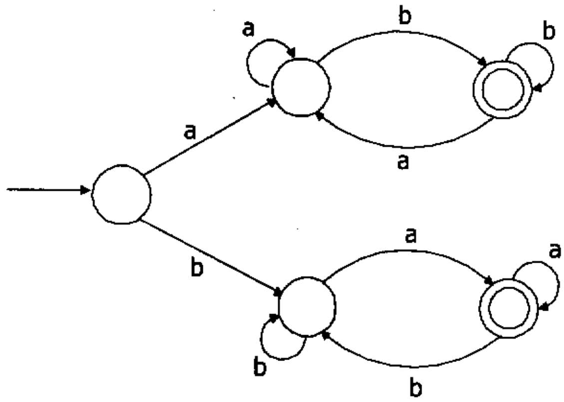


เขียนในรูปนิพจน์ปกติ ได้คือ $(a+b)^*aa(a+b)^*$

■

ตัวอย่างที่ 3.15

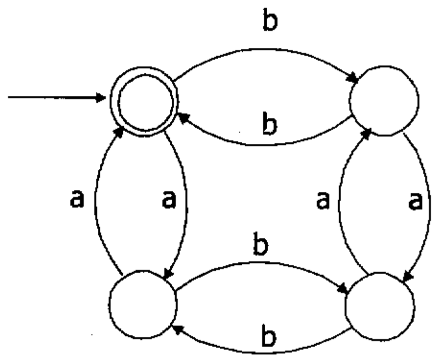
จากชุดตัวอักษร $\Sigma = \{ a , b \}$ ภาษาที่ถูกยอมรับโดยดีเอฟเอ ต่อไปนี้ สามารถนิยามได้ด้วยนิพจน์ปกติ $a(a+b)^*b + b(a+b)^*a$



■

ตัวอย่างที่ 3.16

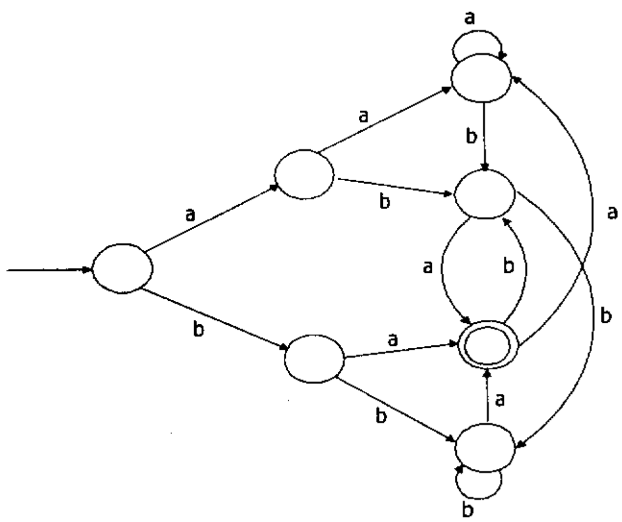
จากชุดตัวอักษร $\Sigma = \{ a , b \}$ดีเอฟเอต่อไปนี้ยอมรับคำทุกคำที่ประกอบด้วยจำนวนของ a ทั้งหมดเป็นจำนวนคู่ และจำนวนของ b ทั้งหมดเป็นจำนวนคู่ ซึ่งก็คือภาษา EVEN-EVEN นั่นเอง



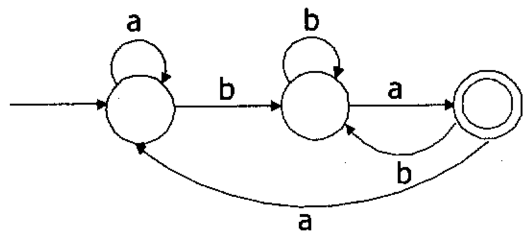
■

ตัวอย่างที่ 3.17

จากชุดตัวอักษร $\Sigma = \{ a , b \}$



ดีเอฟเอ ข้างต้นนี้ยอมรับคำทุกคำที่ลงท้ายด้วย ba จะเห็นว่าดีเอฟเอ นี้ค่อนข้างซับซ้อนและเข้าใจยาก สามารถสร้างดีเอฟเอ ให้มีจำนวนของสถานะ น้อยลงกว่านี้ได้ตัวอย่างเช่น



นั่นคือ สามารถสร้างดีเอฟเอ ได้หลายวิธีในการนิยามภาษาเดียวกัน

■

ความสัมพันธ์ของภาษาปกติกับดีเอฟเอสามารถระบุได้เป็นทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.1

ภาษา L บนชุดตัวอักษร Σ จะเป็นภาษาปกติก็ต่อเมื่อมีดีเอฟเอ ยอมรับภาษา L

■

3.3 ผลผนวก (Unions), ผลร่วม (Intersection), และ ผลต่าง (Different) ของออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด (DFAs)

ภาษาต่าง ๆ ที่ได้กล่าวมาก่อนหน้านั้นส่วนใหญ่จะทำการสร้างดีเอฟเอเพื่อยอมรับภาษาแต่ละภาษาโดยแยกภาษาเป็นภาษาเดี่ยว ๆ ส่วนในกรณีที่จะทำการหาดีเอฟเอเพื่อทำการยอมรับภาษาที่เกิดจากการเอาภาษาย่อย ๆ มารวมกันหรือมาสร้างความสัมพันธ์กันด้วยเงื่อนไขตามที่ต้องการนั้นจะสามารถทำได้โดยพิจารณาตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.2

ถ้า $M_1 = (Q_1, \Sigma, q_1, A_1, \delta_1)$ และ $M_2 = (Q_2, \Sigma, q_2, A_2, \delta_2)$ เป็นดีเอฟเอ ที่ยอมรับภาษา L_1 และ L_2 ตามลำดับ ให้ M เป็น ดีเอฟเอ ถูกกำหนดโดย

$M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ โดยที่

$Q = Q_1 \times Q_2$

$q_0 = (q_1, q_2)$

และฟังก์ชันการผ่าน δ สามารถถูกกำหนดได้โดยสูตร

$\delta((p,q),a) = (\delta_1(p,a), \delta_2(q,a))$

สำหรับ p ใด ๆ $p \in Q_1$, q ใด ๆ $q \in Q_2$ และ $a \in \Sigma$ จะสามารถหาเซตของสถานะยอมรับในแต่ละกรณีได้ว่า

1. ถ้า $A = \{(p,q) \mid p \in A_1$ หรือ $q \in A_2\}$, M ที่ได้จะเป็น M ที่ยอมรับภาษา $L_1 \cup L_2$

2. ถ้า $A = \{(p,q) \mid p \in A_1$ และ $q \in A_2\}$, M ที่ได้จะเป็น M ที่ยอมรับภาษา $L_1 \cap L_2$

3. ถ้า $A = \{(p,q) \mid p \in A_1$ และ $q \notin A_2\}$, M ที่ได้จะเป็น M ที่ยอมรับภาษา $L_1 - L_2$

■

พิสูจน์ ทฤษฎีบทที่ 3.2

การยอมรับภาษา L_1 และ L_2 ด้วย M_1 และ M_2 ถูกกำหนดโดย δ_1^* และ δ_2^* ดังนั้น ถ้าจะนิยามการยอมรับของ M ในรูปของ δ^* จะต้องนิยามด้วยสูตรดังนี้

$\delta^*((p,q),x) = (\delta_1^*(p,x), \delta_2^*(q,x))$ สำหรับ x ใด ๆ $x \in \Sigma^*$ และ (p,q) ใด ๆ $(p,q) \in Q$ ซึ่งจะได้ว่าสายอักขระ x จะถูกยอมรับโดย M ก็ต่อเมื่อ $\delta^*((q_1, q_2),x) \in A$ โดยจะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ

$(\delta_1^*(q_1, x), \delta_2^*(q_2, x)) \in A$

ถ้าเป็น A ในกรณีที่ 1 จะสามารถกล่าวได้ว่า

$(\delta_1^*(q_1, x) \in A_1$ หรือ $\delta_2^*(q_2, x)) \in A_2$ หรือกล่าวได้อีกนัยหนึ่งว่า $x \in L_1 \cup L_2$ และจะสามารถอธิบายได้ในทำนองเดียวกันกับกรณีที่ 2

มีกรณีเฉพาะเมื่อพิจารณาว่า L_1 ประกอบด้วยคำที่สร้างจากทุก ๆ สายอักขระใน Σ^* ดังนั้นจะได้ว่า $L_1 - L_2$ คือ L_2' (Complement ของ L_2) เมื่อพิจารณาตามทฤษฎีจะได้ว่า $L_1 - L_2$ หรือ L_2' จะเป็นดีเอฟเอที่สามารถนิยามได้ดังนี้คือ

$M_2' = (Q_2, \Sigma, q_2, Q_2 - A_2, \delta_2)$

ซึ่งจะได้ดีเอฟเอ จาก M_2 เพียงแต่สลับสถานะยอมรับเป็นสถานะไม่ยอมรับและเปลี่ยนจากสถานะไม่ยอมรับไปเป็นสถานะยอมรับเท่านั้น

■

ตัวอย่างที่ 3.18

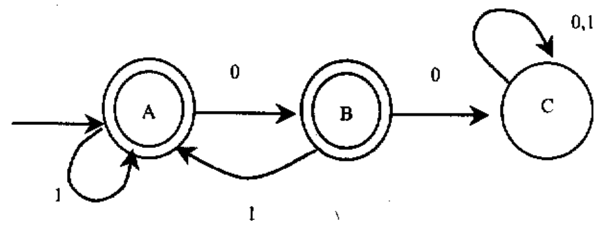
กำหนดให้ภาษา L_1 และ L_2 นิยามภาษาย่อยต่อไปนี้

$L_1 = \{ X \in \{0, 1\}^* \mid X$ ไม่มี 00 เป็นสายอักขระย่อยในคำ $\}$

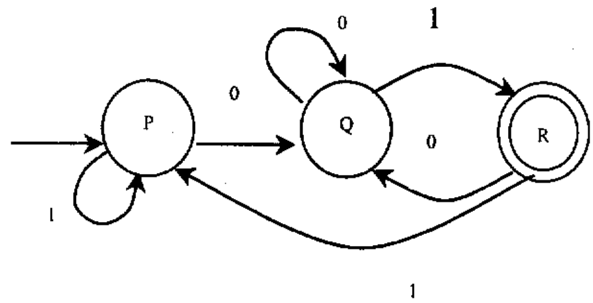
$L_2 = \{ X \in \{0, 1\}^* \mid X$ ลงท้ายด้วย 01$\}$

จงหาดีเอฟเอที่ยอมรับภาษาที่เกิดจาก $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$ และ $L_1 - L_2$

สำหรับภาษาย่อย L_1 มีดีเอฟเอนิยามได้ดังนี้



และสำหรับภาษาย่อย L_2 มีดีเอฟเอนิยามได้ดังนี้



กระบวนการสร้างดีเอฟเอตามทฤษฎีที่ 3.2 ไม่ว่าจะเป็นกรณีใดกรณีหนึ่งใน 3 กรณีนั้นจะมีขั้นตอนการสร้างที่เหมือนกันยกเว้นการพิจาณาเซตของสถานะสิ้นสุดซึ่งจะแตกต่างกันตามแต่ละกรณี

ดังนั้นจะเริ่มต้นด้วยขั้นตอนการพิจารณาส่วนประกอบทุกส่วนยกเว้นเซตของสถานะยอมรับก่อนโดยสามารถพิจารณาได้ดังนี้

M = $(Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$

Q จะได้จากเซตของคู่ลำดับของ $Q_1 \times Q_2$ โดยถือว่าสมาชิกใน $Q_1 \times Q_2$ จะเป็นสถานะที่มากที่สุดที่เป็นไปได้ที่จะนำมาสร้างเป็นสถานะของออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนดที่ต้องการ โดยในที่นี้อาจไม่จำเป็นต้องใช้ทั้งหมดก็ได้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับการพิจารณาฟังก์ชันการผ่านที่จะได้กล่าวต่อไป

$\Sigma = \{ 0, 1 \}$

$q_0 = (A, P)$

δ จะพิจารณาจากฟังก์ชันการผ่านของแต่ละสถานะ โดยเริ่มที่สถานะเริ่มต้น (A, P) และเมื่อ $\delta_1(A, 0) = B$ และ $\delta_2(P, 0) = Q$ จะได้ว่า $\delta((A, P), 0) = (B, Q)$ เช่นเดียวกันกับ $\delta((A, P), 1) = (A, P)$ จากนั้นก็จะพิจารณาฟังก์ชันการผ่านของสถานะ (B, Q) ต่อ โดยกระบวนการหาฟังก์ชันการผ่านจะมีการทำต่อไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งฟังก์ชันการผ่านจากสถานะที่มีอยู่ไม่สามารถสร้างสถานะใหม่ได้อีก รายละเอียดการหาฟังก์ชันการผ่านแสดงได้ดังนี้

$$\delta((A, P), 0) \Rightarrow (\delta_1(A, 0),\ \delta_2(P, 0)) \Rightarrow (B, Q)$$
$$\delta((A, P), 1) \Rightarrow (\delta_1(A, 1),\ \delta_2(P, 1)) \Rightarrow (A, P)$$

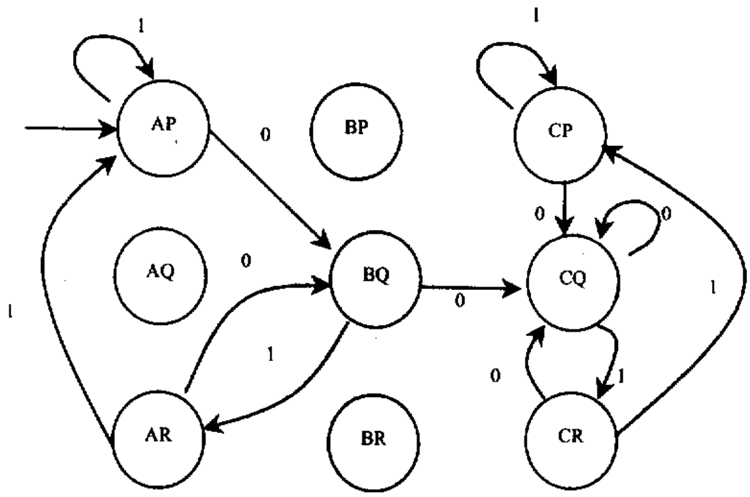
$$\delta((B, Q), 0) \Rightarrow (\delta_1(B, 0),\ \delta_2(Q, 0)) \Rightarrow (C, Q)$$
$$\delta((B, Q), 1) \Rightarrow (\delta_1(B, 1),\ \delta_2(Q, 1)) \Rightarrow (A, R)$$

$$\delta((C, Q), 0) \Rightarrow (\delta_1(C, 0),\ \delta_2(Q, 0)) \Rightarrow (C, Q)$$
$$\delta((C, Q), 1) \Rightarrow (\delta_1(C, 1),\ \delta_2(Q, 1)) \Rightarrow (C, R)$$

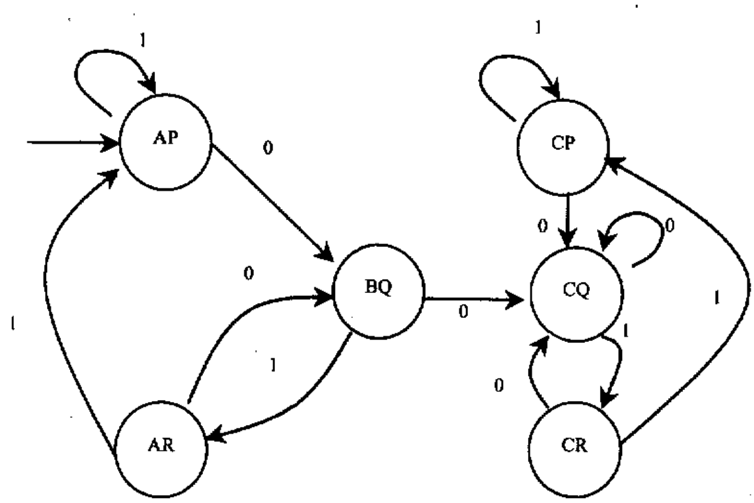
$$\delta((A, R), 0) \Rightarrow (\delta_1(A, 0),\ \delta_2(R, 0)) \Rightarrow (B, Q)$$
$$\delta((A, R), 1) \Rightarrow (\delta_1(A, 1),\ \delta_2(R, 1)) \Rightarrow (A, P)$$

$$\delta((C, R), 0) \Rightarrow (\delta_1(C, 0),\ \delta_2(R, 0)) \Rightarrow (C, Q)$$
$$\delta((C, R), 1) \Rightarrow (\delta_1(C, 1),\ \delta_2(R, 1)) \Rightarrow (C, P)$$
$$\delta((C, P), 0) \Rightarrow (\delta_1(C, 0),\ \delta_2(P, 0)) \Rightarrow (C, Q)$$
$$\delta((C, P), 1) \Rightarrow (\delta_1(C, 1),\ \delta_2(P, 1)) \Rightarrow (C, P)$$

จากฟังก์ชันการผ่านทั้งหมดที่หาได้สามารถแสดงเป็นแผนภาพได้ดังนี้



จากแผนภาพจะเห็นว่ามีสถานะในเซต $Q_1 \times Q_2$ เพียง 6 สถานะที่สามารถเข้าถึงโดยเริ่มจากสถานะเริ่มต้น (A, P) ซึ่งกรณีนี้สามารถสรุปได้ว่า อีก 3 สถานะที่เหลือจะไม่สามารถเข้าถึงได้เมื่อเริ่มจากสถานะเริ่มต้น ดังนั้นจะไม่มีการนำเอาสถานะดังกล่าวมารวมเข้าเป็นสถานะในออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนดที่ต้องการดังแสดงได้จากแผนภาพการผ่านต่อไปนี้

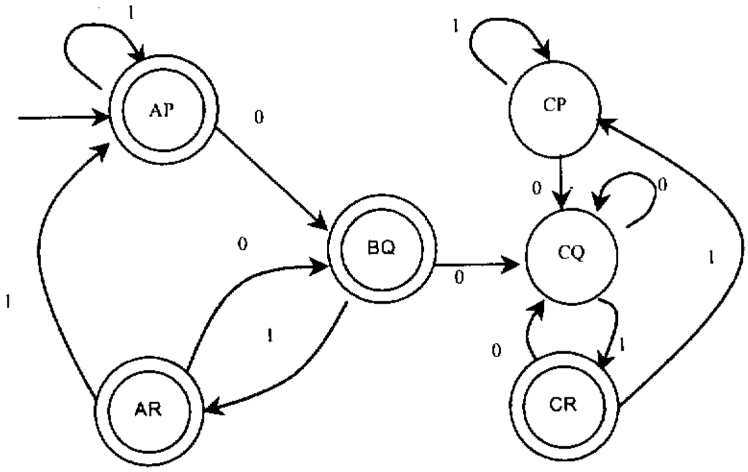


ขั้นตอนสุดท้ายคือการกำหนดเซตของสถานะยอมรับซึ่งจะมีการกำหนดตามกระบวนการการสร้างว่าเป็นลักษณะการรวมกันของภาษาย่อยแบบใด

กรณีที่ 1 ดีเอฟเอที่ยอมรับภาษา $L_1 \cup L_2$

เซตของสถานะยอมรับของภาษา $L_1 \cup L_2$ = {(A,P), (B,Q), (A,R),(C,R)}

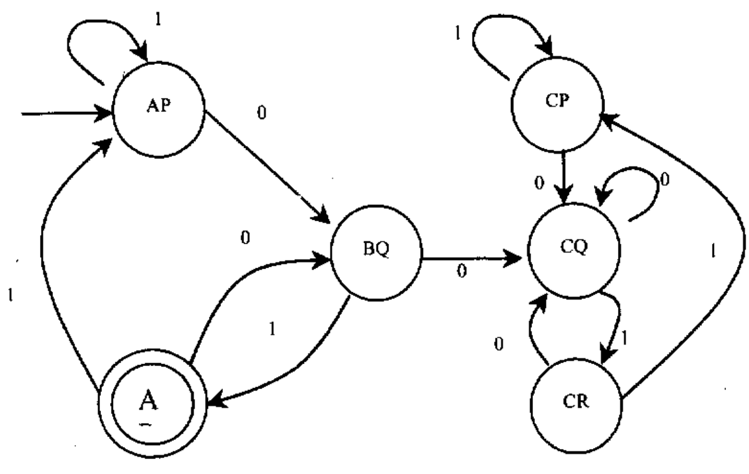
และแผนภาพของภาษา $L_1 \cup L_2$ สามารถแสดงได้ดังนี้



กรณีที่ 2 ดีเอฟเอที่ยอมรับภาษา $L_1 \cap L_2$

เซตของสถานะยอมรับของภาษา $L_1 \cap L_2$ = {(A,R)}

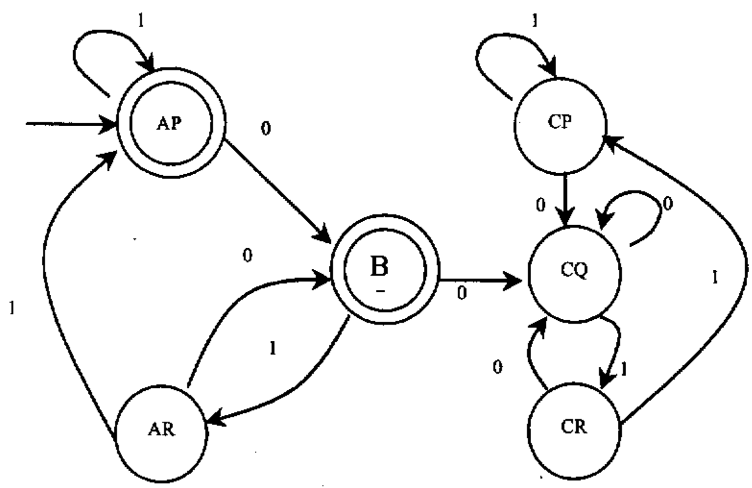
และแผนภาพของภาษา $L_1 \cup L_2$ สามารถแสดงได้ดังนี้



กรณีที่ 3 ดีเอฟเอที่ยอมรับภาษา $L_1 - L_2$

เซตของสถานะยอมรับของภาษา $L_1 - L_2 = \{(A,P), (B,Q)\}$

และแผนภาพของภาษา $L_1 \cup L_2$ สามารถแสดงได้ดังนี้



■

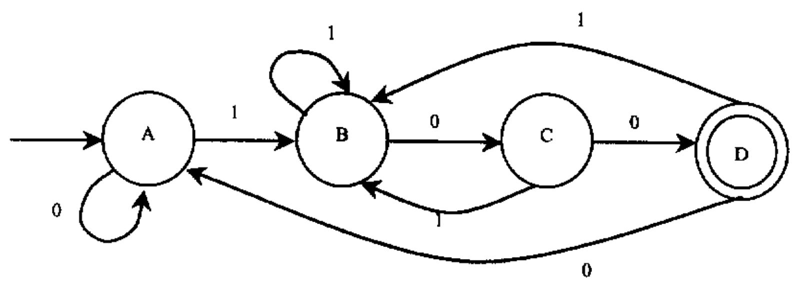
ตัวอย่างที่ 3.19

กำหนดให้ภาษา $L = \{ X \in \{0, 1\}^* \mid X$ ลงท้ายด้วย 100 หรือ 001$\}$

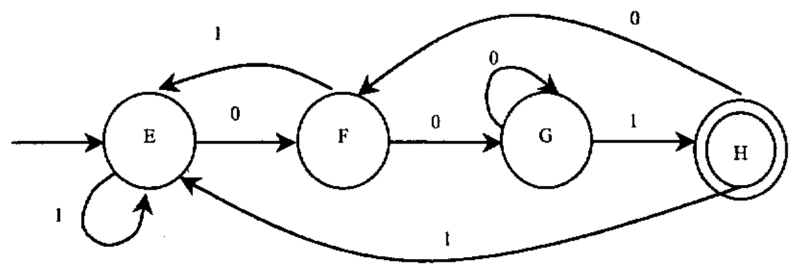
จงสร้าง ดีเอฟเอ ที่นิยามหรือยอมรับภาษาดังกล่าว

ในกรณีนี้จะทำการสร้างดีเอฟเอ เพื่อนิยามหรือยอมรับภาษาย่อยสองภาษาก่อนซึ่งประกอบด้วยภาษา

$L_1 = \{ X \in \{0, 1\}^* \mid X$ ลงท้ายด้วย 100 $\}$



$L_2 = \{ X \in \{0, 1\}^* \mid X$ ลงท้ายด้วย $001\}$



ฟังก์ชันการผ่านของภาษา $L = L_1 \cup L_2$ คือ

$\delta((A, E), 0) \Rightarrow (\delta_1(A, 0), \delta_2(E, 0)) \Rightarrow (A, F)$

$\delta((A, E), 1) \Rightarrow (\delta_1(A, 1), \delta_2(E, 1)) \Rightarrow (B, E)$

$\delta((A, F), 0) \Rightarrow (\delta_1(A, 0), \delta_2(F, 0)) \Rightarrow (A, G)$

$\delta((A, F), 1) \Rightarrow (\delta_1(A, 1), \delta_2(F, 1)) \Rightarrow (B, E)$

$\delta((B, E), 0) \Rightarrow (\delta_1(B, 0), \delta_2(E, 0)) \Rightarrow (C, F)$

$\delta((B, E), 1) \Rightarrow (\delta_1(B, 1), \delta_2(E, 1)) \Rightarrow (B, E)$

$\delta((A, G), 0) \Rightarrow (\delta_1(A, 0), \delta_2(G, 0)) \Rightarrow (A, G)$

$\delta((A, G), 1) \Rightarrow (\delta_1(A, 1), \delta_2(G, 1)) \Rightarrow (B, H)$

$\delta((C, F), 0) \Rightarrow (\delta_1(C, 0), \delta_2(F, 0)) \Rightarrow (D, G)$

$\delta((C, F), 1) \Rightarrow (\delta_1(C, 1), \delta_2(F, 1)) \Rightarrow (B, E)$

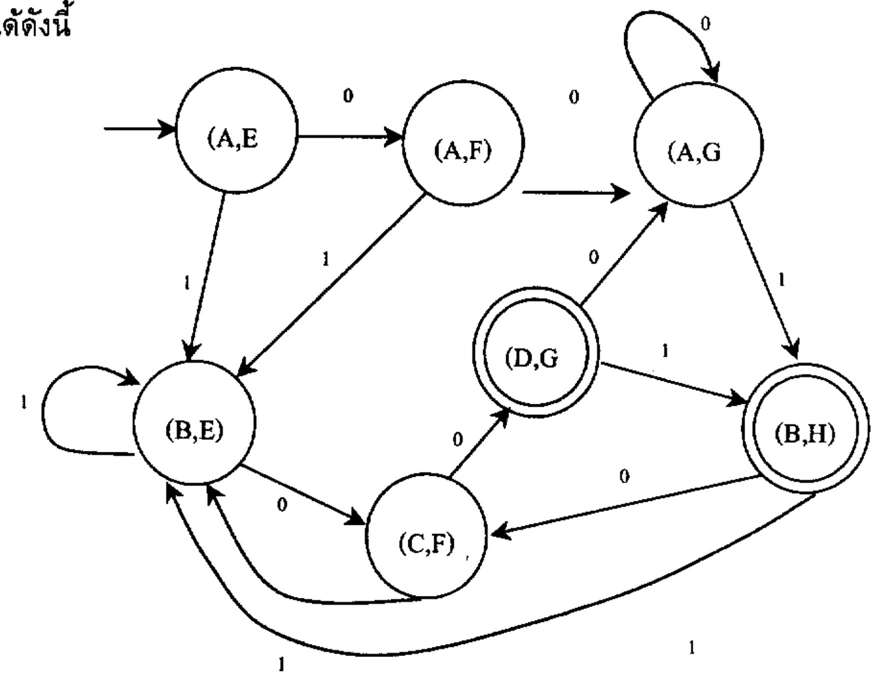
$\delta((B, H), 0) \Rightarrow (\delta_1(B, 0), \delta_2(H, 0)) \Rightarrow (C, F)$

$\delta((B, H), 1) \Rightarrow (\delta_1(B, 1), \delta_2(H, 1)) \Rightarrow (B, E)$

$\delta((D, G), 0) \Rightarrow (\delta_1(D, 0) \; , \; \delta_2(G, 0)) \quad \Rightarrow (A, G)$

$\delta((D, G), 1) \Rightarrow (\delta_1(D, 1) \; , \; \delta_2(G, 1)) \quad \Rightarrow (B, H)$

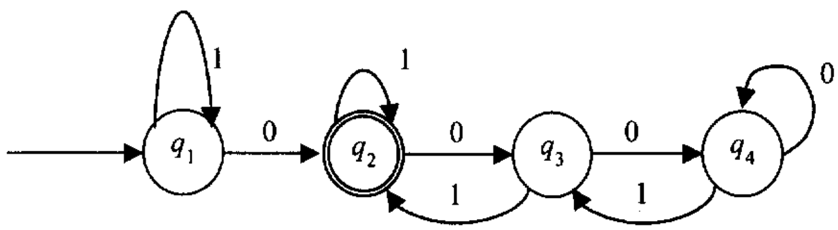
สถานะยอมรับของภาษา $L_1 \cup L_2$ เพื่อให้ได้ ดีเอฟเอ ที่ยอมรับภาษา L คือ $\{(B,H),(D,G)\}$ และแผนภาพการผ่านของภาษา L ในขั้นตอนสุดท้าย สามารถแสดงได้ดังนี้



■

<u>แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3</u>

1. สำหรับ DFA ที่กำหนดให้ดังแผนภาพการผ่านต่อไปนี้



จงตรวจสอบว่าสายอักขระใดต่อไปนี้ที่ไม่ถูกยอมรับโดย DFA ดังกล่าว

1.1) 000000111111	1.2) 001001001001	1.3) 000111000111
1.4) 010101010101	1.5) 001100110011	1.6) 011011011011

2. จงสร้างออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด (Deterministic Finite Automata) ที่นิยามหรือยอมรับภาษาซึ่งนิยามด้วยนิพจน์ปกติดังต่อไปนี้

$a(ba+a)^*b$

3. จงสร้างออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด (Deterministic Finite Automata) ที่นิยามหรือยอมรับภาษาของ

คำทุกคำที่ซึ่งตัวอักษรก่อนตัวสุดท้ายเป็น a เช่น aa, ab, babbaa, bbbabab

4. จงสร้างออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด (Deterministic Finite Automata) ที่นิยามหรือยอมรับภาษาของคำทุกคำที่<u>ไม่</u>ได้ลงท้ายด้วยคู่ของตัวอักษรที่เหมือนกัน ตัวอย่างเช่น Λ , a , aba , bba , baaab แต่ aa , babb , baa , bbb ไม่อยู่ในภาษานี้

5. จงสร้างออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด (Deterministic Finite Automata) ที่นิยามหรือยอมรับภาษาของคำทุกคำที่ซึ่ง a จะปรากฏอยู่ในกลุ่มของ a ที่ติดกันเป็นจำนวนคี่เสมอ (ไม่รวม Λ)
เช่น babbaaaba , a , bbbb , aaa เป็นต้น

6. จงสร้างออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด (Deterministic Finite Automata) ที่นิยามหรือยอมรับภาษาของคำทุกคำที่ซึ่งประกอบด้วย a ไม่เกิน 3 ตัว

6. จงสร้างออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด (Deterministic Finite Automata) ที่นิยามหรือยอมรับภาษาของคำทุกคำที่ซึ่งประกอบด้วย a ไม่เกิน 3 ตัว

7. จงสร้างออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด (Deterministic Finite Automata) ที่นิยามหรือยอมรับภาษาของคำทุกคำที่ขึ้นต้นและลงท้ายด้วยคู่ของสัญลักษณ์ที่เหมือนกัน เช่น aabababb, bbbabbaa, aabaa , bbbb

8. กำหนดให้ภาษา L = { x | x $\in$ $\{0,1\}^*$ และ x เป็นภาษาที่ลงท้ายด้วย 01011}

8.1 จงหา Regular Expression ที่สอดคล้องกับภาษา L นี้

8.2 จงหา DFA ที่ยอมรับภาษา L ดังกล่าว

9. กำหนดให้ภาษา L = { x | x $\in$ $\{a,b,c\}^*$ และ x มีสายอักขระย่อย abc เป็นส่วนประกอบ }

9.1 จงหา Regular Expression ที่สอดคล้องกับภาษา L นี้

9.2 จงหา DFA ที่ยอมรับภาษา L ดังกล่าว

10. กำหนดให้ภาษา L = { x | x $\in$ $\{a,b\}^*$ และ x มีสายอักขระย่อย ababb เป็นส่วนประกอบ }

10.1 จงหา Regular Expression ที่สอดคล้องกับภาษา L นี้

10.2 จงหา DFA ที่ยอมรับภาษา L ดังกล่าว

11. กำหนดให้ภาษา L = { x | x $\in$ $\{0,1,2\}^*$ และ x เป็นภาษาที่มีสายอักขระย่อย 012201 เป็นส่วนประกอบ }

11.1 จงหา Regular Expression ที่สอดคล้องกับภาษา L นี้

11.2 จงหา DFA ที่ยอมรับภาษา L ดังกล่าว

12. กำหนดให้ภาษา L = {w | w $\in$ $\{0,1,2\}^*$ และ w ต้องไม่มีสายอักขระย่อย 201 ปรากฏอยู่}

12.1 จงหา Regular Expression ที่สอดคล้องกับภาษา L นี้

12.2 จงหา DFA ที่ยอมรับภาษา L ดังกล่าว

13. กำหนดให้ภาษา L = {w | w $\in$ $\{0,1,2\}^*$ และ w ต้องไม่มีสายอักขระย่อย 012 ปรากฏอยู่}

13.1 จงหา Regular Expression ที่สอดคล้องกับภาษา L นี้

13.2 จงหา DFA ที่ยอมรับภาษา L ดังกล่าว

14. กำหนดให้ภาษา L = { x | x $\in$ $\{0,1\}^*$ และ x จะต้องมี 0 อยู่ในสายอักขระอย่างน้อย 2 ตัว}

14.1 จงหา Regular Expression ที่สอดคล้องกับภาษา L นี้

14.2 จงหา DFA ที่ยอมรับภาษา L ดังกล่าว

15. ให้ภาษา L = { x | x $\in$ $\{a,b,c\}^*$ และ x จะต้องไม่เริ่มต้นด้วยสายอักขระย่อย abc}

15.1 จงหา Regular Expression ที่สอดคล้องกับภาษา L นี้

15.2 จงหา DFA ที่ยอมรับภาษา L ดังกล่าว

16. กำหนดให้ภาษา L = { x | x $\in$ $\{a,b,c\}^*$ และจำนวนของ a ใน x หาร 3 ลงตัว}

16.1 จงหา Regular Expression ที่สอดคล้องกับภาษา L นี้

16.2 จงหา DFA ที่ยอมรับภาษา L ดังกล่าว

17. กำหนดให้ภาษา L = { x | x $\in$ $\{0,1,2\}^*$ และจำนวนของ 1 ใน x หาร 4 ลงตัว}

17.1 จงหา Regular Expression ที่สอดคล้องกับภาษา L นี้

17.2 จงหา DFA ที่ยอมรับภาษา L ดังกล่าว

18. กำหนดให้ภาษา L = { x | x $\in$ $\{a,b,c\}^*$ และ x จะต้องไม่มีสายอักขระย่อย abc ปรากฏอยู่}

18.1 จงหา Regular Expression ที่สอดคล้องกับภาษา L นี้

18.2 จงหา DFA ที่ยอมรับภาษา L ดังกล่าว

19. กำหนดให้ภาษา L = { x $\in$ $\{a,b\}^*$ | x ไม่ขึ้นต้นด้วยสายอักขระ aaa}

19.1 จงหา Regular Expression ที่สอดคล้องกับภาษา L นี้

19.2 จงหา DFA ที่ยอมรับภาษา L ดังกล่าว

20. กำหนดให้ภาษา L = { x $\in$ $\{0, 1, 2\}^*$ | x จะต้องมีความยาวมากกว่าหรือเท่ากับ 3}

20.1 จงหา Regular Expression ที่สอดคล้องกับภาษา L นี้

20.2 จงหา DFA ที่ยอมรับภาษา L ดังกล่าว

21. จากภาษาที่กำหนดให้จงสร้าง DFA ที่นิยามภาษาในแต่ละข้อต่อไปนี้

21.1 ภาษาของคำทุกคำที่มีจำนวนของ 0 อยู่ในคำเพียงสองตัวเท่านั้น

21.2 ภาษาของคำทุกคำที่ไม่ลงท้ายด้วย 01

21.3 ภาษาของคำทุกคำที่ขึ้นต้นและลงท้ายด้วย 00 หรือ 11

21.4 ภาษาของคำทุกคำที่มีสายอักขระย่อย 00 เป็นส่วนประกอบและปรากฏอยู่ในสายอักขระเพียง 1 สายอักขระเท่านั้น (ในกรณีถ้าเป็น 000 จะถือว่ามี 00 ปรากฏอยู่ในสายอักขระ 2 สายอักขระ)

21.5 ภาษาของคำทุกคำที่มีจำนวนของ 0 เป็นจำนวนคู่

21.6 ภาษาของคำทุกคำที่มีจำนวนของ 1 เป็นจำนวนคี่

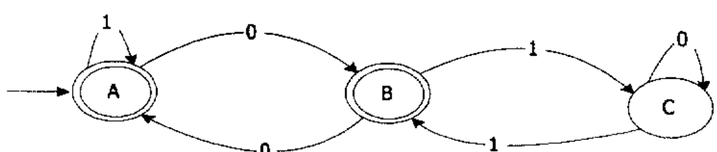
21.7 ภาษาของคำทุกคำที่มีจำนวนของ 0 และจำนวนของ 1 เป็นจำนวนคู่

22. จงหา DFA ที่ยอมรับภาษาที่สอดคล้องกับนิพจน์ปกติต่อไปนี้ ($\Sigma = \{0, 1\}$)

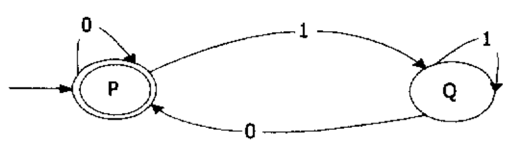
22.1 $(1 + 01^*0)1$	22.2 $(0 + 1)^*0$
22.3 $(11 + 00)^*$	22.4 $(1 + 110)^*0$
22.5 $(111 + 100)^*0$	22.6 $1(01 + 10)^* + 0(11 + 10)^*$
22.7 $1(1 + 10)^* + 10(0 + 01)^*$	

23. DFA M1 และ M2 ที่กำหนดให้เป็น DFA ที่ยอมรับภาษา L1 และ L2 ตามลำดับ

จงหา DFA ที่ยอมรับภาษา L1 - L2 และ L1 $\cap$ L2

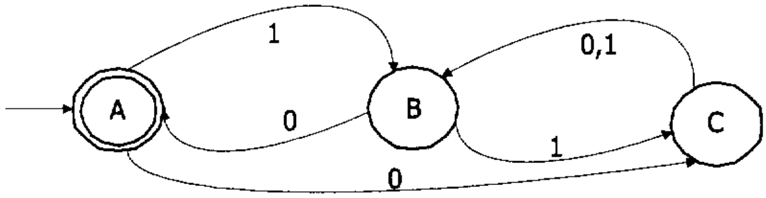


M(L1)

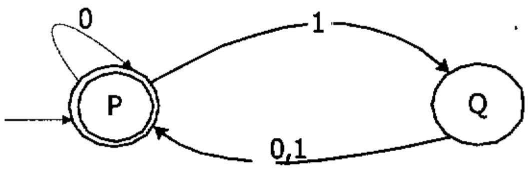


M(L2)

24. จงสร้างแผนภาพออโตมาต้าจำกัด DFA ที่ยอมรับภาษาที่เกิดจากการ Union ของสองภาษาปกติที่มี DFA รองรับต่อไปนี้

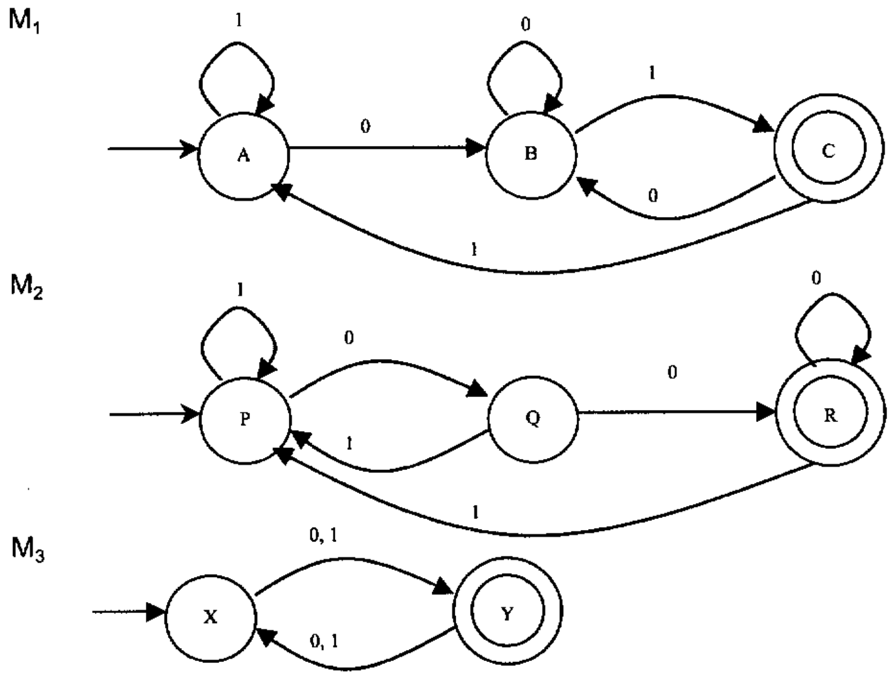


M(L1)



M(L2)

25. ให้ M_1, M_2, และ M_3 เป็น DFA ที่นิยามภาษา L_1, L_2, และ L_3 ดังแสดงในรูป



จงหา DFA ที่ยอมรับภาษาต่อไปนี้

25.1 $L_1 \cup L_2$ 25.2 $L_1 \cap L_2$

25.3 $L_1 - L_2$ 25.4 $L_1 \cap L_3$

25.5 $L_3 - L_2$ 25.6 $L_2 \cup L_3$

25.7 $L_1 \cup L_2 \cup L_3$

26. กำหนดให้ภาษา L = { x | x ∈ $\{a,b,c\}^*$ และ x เป็นภาษาที่มีสายอักขระย่อย abc หรือ cba เป็นส่วนประกอบ }

26.1 จงหา Regular Expression ที่สอดคล้องกับภาษา L นี้

26.2 จงหา DFA ที่ยอมรับภาษา L ดังกล่าว

27. กำหนดให้ภาษา L = { x | x ∈ $\{0,1,2\}^*$ และ x เป็นภาษาที่มีสายอักขระย่อย 000 หรือ 111 หรือ 222 เป็นส่วนประกอบ }

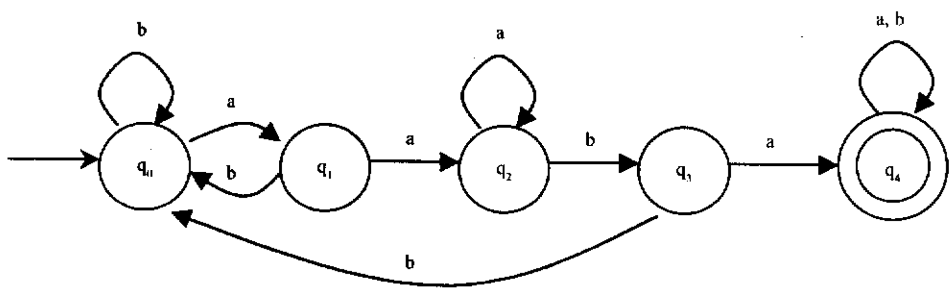
27.1 จงหา Regular Expression ที่สอดคล้องกับภาษา L นี้

27.2 จงหา DFA ที่ยอมรับภาษา L ดังกล่าว

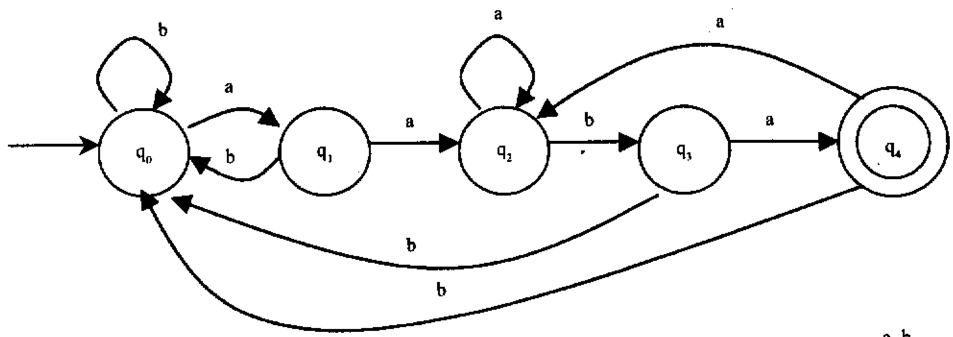
28. จงสร้าง DFA เพื่อนิยามภาษาที่ประกอบจากคำทุก ๆ คำที่สร้างจาก Σ = {0, 1} โดยคำดังกล่าวมีความยาวอย่างน้อย 1 อักขระและจะต้องเป็นคำที่สามารถตีความเป็นเลขฐานสองแล้วสามารถหาร 3 ลงตัว

29. จากแผนภาพการผ่าน DFA ต่อไปนี้จงหาว่า DFA ในแต่ละข้อต่อไปนี้นิยามภาษาใดโดยให้อธิบายด้วยการแสดงนิพจน์ปกติที่สอดคล้องกับภาษาหรืออธิบายด้วยข้อความเพื่อแสดงถึงภาษาดังกล่าว

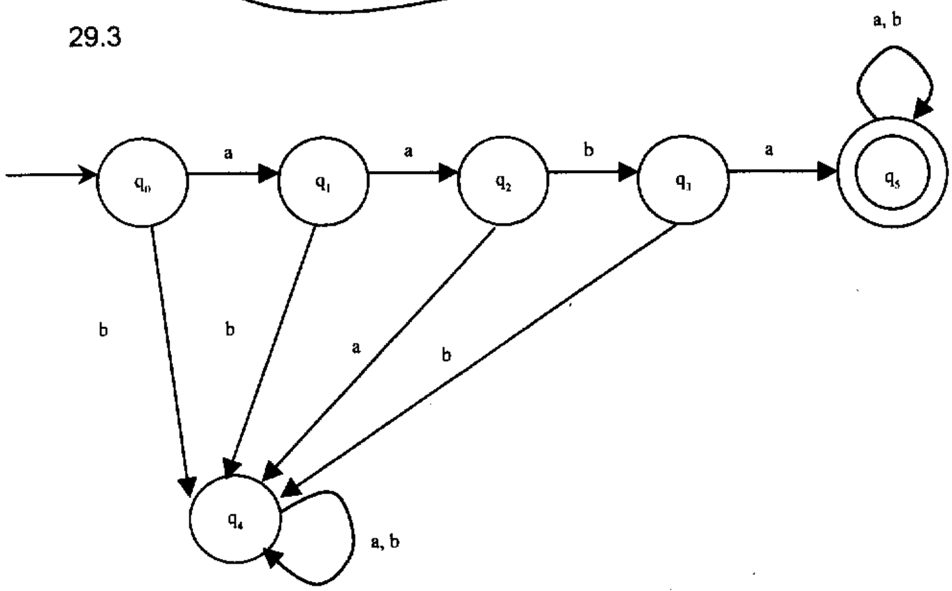
29.1



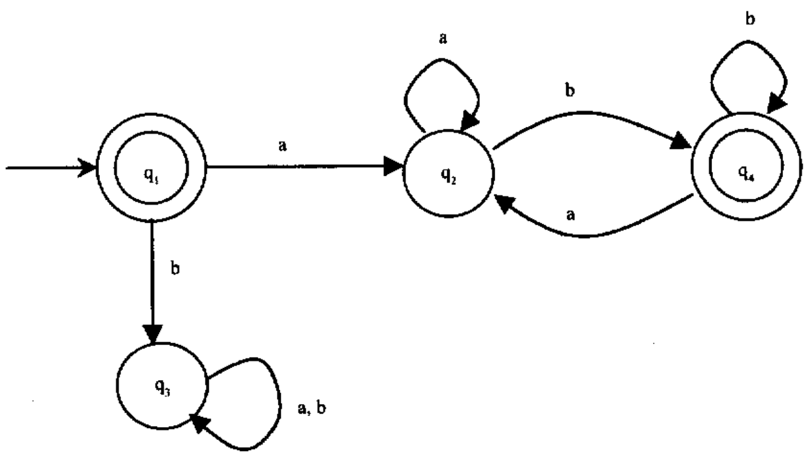
29.2


b
a
a
a
a
b
a
b
q0
q1
q2
q3
q4
b
b

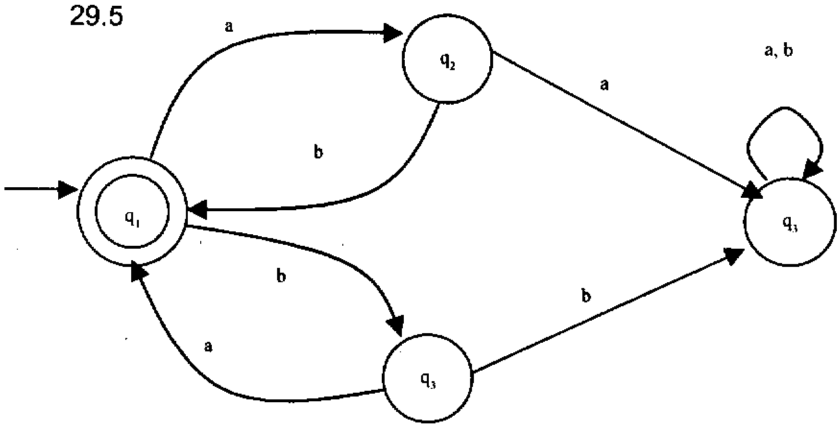
29.3


a, b
a
a
b
a
q0
q1
q2
q3
q5
b
b
a
b
q4
a, b

29.4

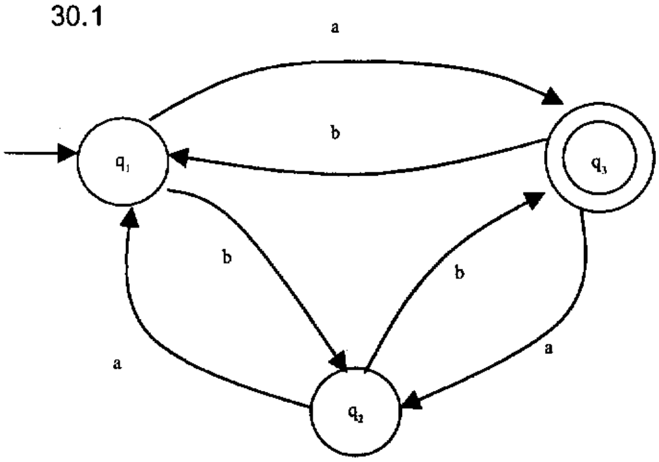

b
a
b
a
q1
q2
q4
a
b
q3
a, b

29.5

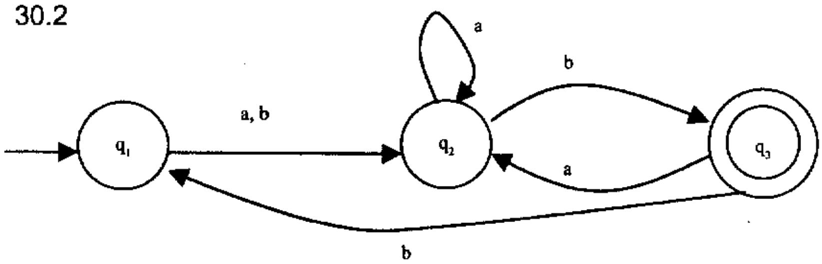


30. จงหานิพจน์ปกติที่สอดคล้องกับภาษาที่มี DFA นิยามในแต่ละข้อต่อไปนี้

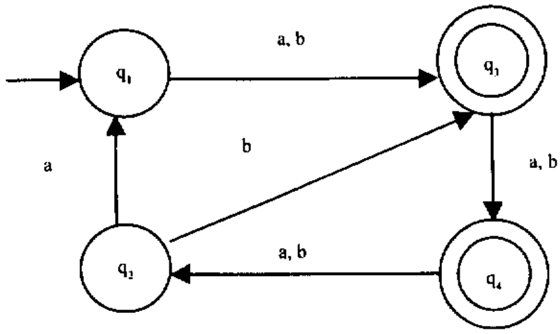
30.1



30.2



30.3



30.4