บทที่ 1
ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์
(Mathematical Introduction)

ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่จะนำมาใช้ประกอบการศึกษาเรื่องทฤษฎีการคำนวณ ประกอบด้วยเรื่องของเซต ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ความสัมพันธ์สมมูล กราฟและต้นไม้ วิธีการพิสูจน์ ชุดตัวอักษร สายอักขระ และภาษา

ในที่นี้จะขอกล่าวถึงเฉพาะวิธีการพิสูจน์ ชุดตัวอักษร สายอักขระ และภาษา ส่วนเรื่องอื่นจะถือว่าผู้อ่านได้มีความรู้จากการศึกษาในเนื้อหาวิชาอื่นอยู่แล้ว

1.1 วิธีการพิสูจน์

วิธีการพิสูจน์มีด้วยกันหลายวิธี โดยจะเลือกวิธีที่ใช้ในเนื้อหานี้เท่านั้นซึ่งมีด้วยกัน 3 วิธีคือ

การพิสูจน์โดยอุปนัย (Induction Proof)

การพิสูจน์โดยการสร้าง (Construction Proof)

การพิสูจน์โดยการขัดแย้ง (Contradiction Proof)

โดยรายละเอียดจะได้แสดงต่อไป

1.1.1 การพิสูจน์โดยอุปนัย (Proof by Induction)

เป็นวิธีพิสูจน์ขั้นสูงวิธีหนึ่ง ซึ่งใช้แสดงให้เห็นว่าสมาชิกในเซตไม่จำกัดทุก ๆ ตัวเป็นไปตามคุณสมบัติที่กำลังพิจารณาอยู่ โดยการพิสูจน์นี้จะประกอบด้วย 2 ส่วน คือ ขั้นมูลฐาน (Basic Step) และขั้นอุปนัย (Induction Step) โดยแต่ละส่วนจะต้องสามารถพิสูจน์ความจริงแยกจากกันได้

การพิสูจน์ขั้นมูลฐานจะเป็นการพิสูจน์ค่าสมาชิกเริ่มต้นในเซตไม่จำกัดว่าต้องเป็นจริงตามคุณสมบัติที่ต้องการพิสูจน์ และสำหรับขั้นอุปนัยจะเป็นการพิสูจน์ค่าความจริงของสมาชิกทุกตัวยกเว้นตัวเริ่มต้น (ได้ผ่านการพิสูจน์จากขั้นมูลฐานไปแล้ว) โดยจะต้องพิสูจน์ให้ได้ว่าจะต้องมีค่าความจริงเป็นจริงทุกตัว ซึ่งเริ่มจากการตั้งค่าสมมติฐานตามทฤษฎีที่ให้มาก่อนว่า กรณีที่ค่าความจริงที่ n ใด ๆ จะต้องเป็นจริง ซึ่งเรียกว่าเป็นการตั้งสมมติฐานอุปนัย (induction hypothesis) จากนั้นจะต้องพิสูจน์ต่อ ให้เห็นว่ามันจะต้องเป็นจริงที่ค่าความจริง n + 1 ด้วยเช่นกัน

สำหรับการพิสูจน์โดยอุปนัยสามารถสรุปเป็นขั้นตอนได้ดังนี้

กำหนดให้ P(n) คือสิ่งที่ต้องการพิสูจน์

1. การพิสูจน์สมาชิกเริ่มต้นตามคุณสมบัติที่ให้มาว่าจะต้องเป็นจริง (Basic Step) เขียนแทนสมาชิกเริ่มต้นด้วย P(1)

2. การพิสูจน์ขั้นอุปนัย (Induction Step) เป็นการพิสูจน์ว่าถ้าตั้งสมมติฐานอุปนัย (Induction Hypothesis) ให้ P(n) เป็นจริงตามทฤษฎีที่ต้องการพิสูจน์ มันจะต้องเป็นจริงสำหรับ P(n+1) ด้วย

3. ขั้นการสรุป (Conclusion) เป็นการสรุปหลังจากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 เป็นจริง จะทำให้คุณสมบัติตามทฤษฎีดังกล่าวมีค่าความจริงเป็นจริงสำหรับสมาชิกในเซตไม่จำกัดทุกตัวหรือทุก ๆ ค่าของ n ใน P(n)

ตัวอย่างที่ 1.1

จงพิสูจน์ว่า $\sum_{I=1}^{n} I = \frac{n(n+1)}{2}$ เป็นจริงหรือไม่

เลือกพิสูจน์โดยวิธี Induction

กำหนดให้ $P(n) = \sum_{I=1}^{n} I = \frac{n(n+1)}{2}$

1. Basic Step: $P(1) = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{(2)}{2} = 1$

$\therefore$ P(1) เป็นจริง

2. Induction Step: ตั้งสมมติฐานให้ P(n) เป็นจริง

นั่นคือ $1 + 2 \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ เป็นจริง

จะต้องแสดงให้ได้ว่า P(n+1) เป็นจริงด้วย

โดยจะต้องพิสูจน์ให้ได้ว่า $P(n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$

$$
\begin{aligned}
P(n+1) &= 1 + 2 \ldots + n + (n+1) \\
&= P(n) + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
&= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} \\
&= \frac{n^2 + 3n + 2}{2}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

$\therefore$ P(n+1) เป็นจริง

3. Conclusion Step: จากข้อ 2 ที่ทำให้ P(n) เป็นจริงสำหรับทุก ๆ ค่าของ n

จึงสรุปได้ว่า $\sum_{I=1}^{n} I = \frac{n(n+1)}{2}$ เป็นจริง #

ตัวอย่างที่ 1.2

จงพิสูจน์ว่า $\sum_{I=1}^{n} I^2 = \frac{(n+2)}{3}$ เป็นจริงหรือไม่

เลือกพิสูจน์โดยวิธี Induction

กำหนดให้ $P(n) = \sum_{I=1}^{n} I^2 = \frac{(n+2)}{3}$

1. Basic Step: $P(1) = 1^2 = \frac{(1+2)}{3} = \frac{(3)}{3} = 1$

$\therefore$ P(1) เป็นจริง

2. Induction Step: ตั้งสมมติฐานให้ P(n) เป็นจริง

นั่นคือ $1^2 + 2^2 \ldots + n^2 = \frac{(n+2)}{3}$ เป็นจริง

จะต้องแสดงให้ได้ว่า P(n+1) เป็นจริงด้วย

โดยจะต้องพิสูจน์ให้ได้ว่า $P(n+1) = \frac{((n+1)+2)}{3}$

$$
\begin{aligned}
P(n+1) &= 1^2 + 2^2 \ldots + n^2 + (n+1)^2 \\
&= P(n) + (n+1)^2 \\
&= \frac{(n+2)}{3} + (n+1)^2 \\
&= \frac{(n+2) + 3(n+1)^2}{3} \\
&= \frac{(3n^2 + 7n + 5)}{3} \\
&\neq \frac{((n+1)+2)}{3}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ P(n+1) ไม่เป็นจริง

3. Conclusion Step: จากข้อ 2 ที่ทำให้ P(n) ไม่เป็นจริงสำหรับทุก ๆ ค่าของ n

จึงสรุปได้ว่า $\sum_{I=1}^{n} I^2 = \frac{(n+2)}{3}$ เป็นเท็จ #

■

ตัวอย่างที่ 1.3

จงพิสูจน์ว่า $\sum_{I=1}^{n} I^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ เป็นจริงหรือไม่

เลือกพิสูจน์โดยวิธี Induction

กำหนดให้ $P(n) = \sum_{I=1}^{n} I^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1. Basic Step: $P(1) = 1^2 = \frac{1(1+1)(2.1+1)}{6} = \frac{1(2)(3)}{6} = 1$

$\therefore$ P(1) เป็นจริง

2. Induction Step: ตั้งสมมติฐานให้ P(n) เป็นจริง

นั่นคือ $1^2 + 2^2 \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ เป็นจริง

จะต้องแสดงให้ได้ว่า P(n+1) เป็นจริงด้วย

โดยจะต้องพิสูจน์ให้ได้ว่า $P(n+1) = \dfrac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$

$$
\begin{aligned}
P(n+1) &= 1^2 + 2^2 \ldots + n^2 + (n+1)^2 \\
&= P(n) + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} \\
&= \frac{(n+1)[2n^2 + n + 6n + 6)]}{6} \\
&= \frac{(n+1)[2n^2 + 7n + 6)]}{6} \\
&= \frac{(n+1)[(n+2)(2n+3)]}{6} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ P(n+1) เป็นจริง

3. Conclusion Step: จากข้อ1 และข้อ 2 ทำให้ P(n) เป็นจริงสำหรับทุก ๆ ค่าของ n

และสรุปได้ว่า $\sum_{I=1}^{n} I^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ เป็นจริง #

ตัวอย่างที่ 1.4

จงพิสูจน์ว่า $\sum_{I=1}^{n} I^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ เป็นจริงหรือไม่

เลือกพิสูจน์โดยวิธี Induction

กำหนดให้ $P(n) = \sum_{I=1}^{n} I^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

1. Basic Step: P(1) $= 1^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = 1$

$\therefore$ P(1) เป็นจริง

2. Induction Step: ตั้งสมมติฐานให้ P(n) เป็นจริง

นั่นคือ $1^3 + 2^3 \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ เป็นจริง

จะต้องแสดงให้ได้ว่า P(n+1) เป็นจริงด้วย

โดยจะต้องพิสูจน์ให้ได้ว่า $P(n+1) = \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}$

$$
\begin{aligned}
P(n+1) &= 1^3 + 2^3 \ldots + n^3 + (n+1)^3 \\
&= P(n) + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2[n^2 + 4(n+1)]}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2[n^2 + 4n + 4)]}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ P(n+1) เป็นจริง

3. Conclusion Step: จากข้อ1 และข้อ 2 ทำให้ P(n) เป็นจริงสำหรับทุก ๆ ค่าของ n

และสรุปได้ว่า $\sum_{I=1}^{n} I^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ เป็นจริง #

■

ตัวอย่างที่ 1.5

จงพิสูจน์ว่า $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

เป็นจริงหรือไม่

เลือกพิสูจน์โดยวิธี Induction

กำหนดให้

$$P(n) = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

1. Basic Step:

$$P(1) = \frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2(1)+1} = \frac{1}{1 \cdot 3}$$

$\therefore$ P(1) เป็นจริง

2. Induction Step: ตั้งสมมติฐานให้ P(n) เป็นจริง

นั่นคือ

$$P(n) = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{2(n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1} \quad \text{เป็นจริง}$$

จะต้องแสดงให้ได้ว่า P(n+1) เป็นจริงด้วย

โดยจะต้องพิสูจน์ให้ได้ว่า $P(n+1) = \frac{(n+1)}{2(n+1)+1}$

$$P(n+1) = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)}$$

$$= P(n) + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)}$$

$$= \frac{n}{(2n+1)} + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)}$$

$$= \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{(2n + 1)(n + 1)}{(2n + 1)(2n + 3)}$$

$$= \frac{(n + 1)}{2n + 3}$$

$$= \frac{(n + 1)}{2(n + 1) + 1}.$$

$\therefore$ P(n+1) เป็นจริง

3. Conclusion Step: จากข้อ1 และข้อ 2 ทำให้ P(n) เป็นจริงสำหรับทุก ๆ ค่าของ n

และสรุปได้ว่า

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

เป็นจริง #

■

1.1.2 การพิสูจน์โดยการสร้าง (Proof by Construction)

เป็นวิธีพิสูจน์โดยพยายามแสดงวิธีการสร้างวัตถุ (Object) นั้น ๆ ว่ามีกระบวนการหรือวิธีการอย่างไร โดยจะต้องพยายามหารูปแบบ ขั้นตอนวิธี หรือสูตรทั่วไปเพื่อใช้ในการสร้างสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ โดยรูปแบบ ขั้นตอนวิธีหรือสูตรดังกล่าวจะต้องสามารถสร้างพิสูจน์ให้เป็นจริงได้ทุก ๆ กรณี

ตัวอย่างที่ 1.6

จากนิยามกราฟ G จะถือว่าเป็น k-regular ถ้าทุก ๆ node ในกราฟมีดีกรีเท่ากับ k

จงพิสูจน์ว่าสำหรับจำนวนเต็มคู่ n ใด ๆ ที่มีค่ามากกว่า 2 จะมีกราฟ G ที่เป็น 3-regular ซึ่งมี node ทั้งหมด n nodes

เลือกพิสูจน์โดยวิธีการเสริมสร้าง (Proof by Construction)

จากทฤษฎีดังกล่าวจะต้องพยายามหารูปแบบ วิธี หรือสูตรทั่วไปเพื่อใช้ในการสร้างกราฟที่เป็น 3-regular โดยสามารถหาวิธีสร้างกราฟเพื่อให้ได้เป็น 3-regular graph ดังนี้

ให้ G = (V,E) ที่มี n nodes โดยที่ $n > 2$ และ n เป็นจำนวนเต็มคู่

$$V = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$
$$E = \{(i, i+1) \mid 0 \le i \le n-2\} \cup \{((n-1), 0)\} \cup \{(i, i+\tfrac{n}{2}) \mid 0 \le i \le \tfrac{n}{2} - 1\}$$

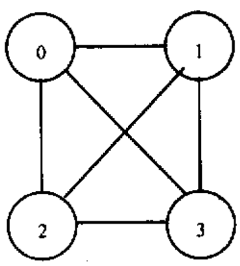
จากวิธีที่ได้สามารถแสดงให้เห็นโดยเลือก n = 4, 8, และ 12 เป็นการทดสอบ

สร้าง 3 – Regular graph ด้วย n = 4

$$V = \{0, 1, 2, 3\}$$
$$E = \{(i, i+1) \mid 0 \le i \le 2\} \cup \{((4-1), 0)\} \cup \{(i, i+\tfrac{4}{2}) \mid 0 \le i \le 1\}$$

$$= \{(0,1), (1,2), (2,3)\} \cup \{(3, 0)\} \cup \{(0, 2), (1,3)\}$$
$$= \{(0,1), (1,2), (2,3), (3, 0), (0, 2), (1,3)\}$$

สร้างเป็นแผนภาพได้ดังต่อไปนี้



จากแผนภาพ จะได้ 3-regular graph ที่มี n = 4 จริง #

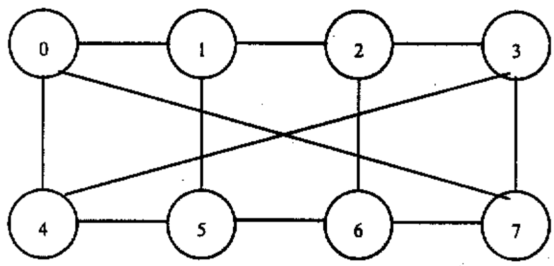
■

·สร้าง 3 – Regular graph with n = 8

$$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$\begin{aligned}
E &= \{(i, i+1) \mid 0 \le i \le 6\} \cup \\
&\quad \{((8-1), 0)\} \cup \\
&\quad \{(i, i+\tfrac{8}{2}) \mid 0 \le i \le 3\} \\
&= \{(0,1), (1,2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7)\} \cup \\
&\quad \{(7, 0)\} \cup \{(0, 4), (1, 5), (2, 6), (3,7)\} \\
&= \{(0,1), (1,2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), \\
&\quad (7, 0), (0, 4), (1, 5), (2, 6), (3, 7)\}
\end{aligned}$$

สร้างเป็นแผนภาพได้ดังต่อไปนี้



จากแผนภาพ จะได้ 3-regular graph ที่มี n = 8 จริง #

■

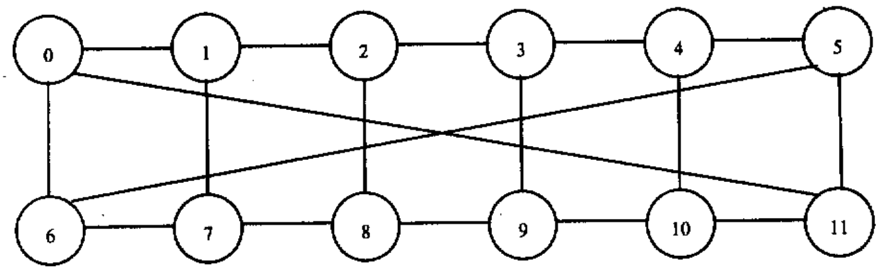
สร้าง 3 – Regular graph with n = 12

$$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

$$\begin{aligned}
E &= \{(i, i+1) \mid 0 \le i \le 11\} \cup \\
&\quad \{((12-1), 0)\} \cup \\
&\quad \{(i, i+\tfrac{12}{2}) \mid 0 \le i \le 5\} \\
&= \{(0,1), (1,2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8), \\
&\quad (8, 9), (9, 10), (10, 11)\} \cup \\
&\quad \{(11, 0)\} \cup \{(0, 6), (1, 7), (2, 8), (3, 9), (4, 10), \\
&\quad (5, 11)\}
\end{aligned}$$

$= \{(0,1), (1,2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8), (8, 9), (9, 10), (10, 11), (11, 0), (0, 6), (1, 7), (2, 8), (3, 9), (4, 10), (5, 11)\}$

สร้างเป็นแผนภาพได้ดังต่อไปนี้



จากแผนภาพ จะได้ 3-regular graph ที่มี n = 12 จริง #

■

1.1.3 การพิสูจน์โดยการขัดแย้ง (Contradiction Proof)

เป็นวิธีพิสูจน์ที่ตั้งสมมติฐานเริ่มต้นว่าทฤษฎีที่ต้องการพิสูจน์เป็นเท็จจากนั้นก็พยายามแสดงให้เห็นว่าสมมติฐานดังกล่าวนำไปสู่ความขัดแย้งอย่างชัดเจน ซึ่งเรียกว่าเกิดข้อขัดแย้ง โดยสามารถสรุปเป็นขั้นตอนในการพิสูจน์ได้ดังนี้

กำหนดให้ P(n) คือสิ่งที่ต้องการพิสูจน์

1. ตั้งสมมติฐานค่าความจริง P(n) ที่จะพิสูจน์ให้มีค่าความจริงเป็นตรงกันข้ามกับสิ่งที่จะพิสูจน์ (ให้ค่าความจริงเป็นเท็จ)
2. พยายามแสดงให้เห็นว่าค่าความจริงที่ตั้งไว้ในข้อที่ 1 นำไปสู่ความขัดแย้ง (ค่าความจริงแย้งกับที่ตั้งสมมติฐานไว้)
3. ทำการสรุปว่า P(n) เป็นจริงตามค่าความจริงที่ต้องการพิสูจน์

ตัวอย่างที่ 1.7

จงพิสูจน์ว่า $\sqrt{2}$ เป็นเศษส่วนไม่แท้ (Irrational number)

จากตัวอย่างนี้ ความหมายของเศษส่วนแท้คือเศษส่วนที่สามารถลดทอนเศษและส่วนจนกระทั่งไม่มีตัวหารร่วม

เลือกพิสูจน์โดยวิธีขัดแย้ง (Proof by Contradiction)

1. ตั้งสมมติฐานให้ $\sqrt{2}$ เป็นเศษส่วนแท้
2. (พยายามหาให้ได้ว่า $\sqrt{2}$ ไม่ใช่เศษส่วนแท้)

ถ้า $\sqrt{2}$ เป็นเศษส่วนแท้จะได้ว่า

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ---------(1) โดยที่ a และ b ต้องไม่มีตัวหารร่วม

$b\sqrt{2} = a$ ---------- (2) คูณไขว้สมการ (1)

$2b^2 = a^2$ -----------(3) ยกกำลังสองทั้งสองข้างในสมการ (2)

จากสมการ (3) จะได้ว่า a^2 เป็นเลขคู่และจะได้ว่า a จะเป็นเลขคู่ด้วย

แทน a ด้วย 2c ลงไปในสมการ (3)

$$2b^2 = (2c)^2$$
$$2b^2 = 4c^2$$
$$b^2 = 2c^2 \text{ ----------(4)}$$

จากสมการ (4) จะได้ว่า b^2 เป็นเลขคู่และจะได้ว่า b จะเป็นเลขคู่ด้วย

จากสมการ (3) และสมการ (4) สรุปได้ว่า a และ b เป็นเลขคู่ทำให้ $\frac{a}{b}$ ไม่ใช่เศษส่วนแท้เนื่องจากมี 2 เป็นตัวหารร่วมเป็นอย่างน้อย

ซึ่งขัดแย้งกับข้อสมมติฐานในข้อ 1ที่ตั้งเอาไว้

3. สรุปได้ว่า $\sqrt{2}$ เป็นเศษส่วนไม่แท้ตามทฤษฎีที่ต้องการพิสูจน์จริง #

■

1.2 ชุดตัวอักษร สายอักขระ และภาษา (Alphabet String and Language)

บทนิยามที่ 1.1

● ชุดตัวอักษร (alphabet) คือเซตจำกัดของสัญลักษณ์ที่ไม่ใช่เซตว่าง โดยมากนิยมใช้ Σ แทนชุดตัวอักษร (alphabet) ใดๆ เช่น $\Sigma = \{ a , b \}$

● สายอักขระ (string) จากชุดตัวอักษรคือลำดับจำกัดของสัญลักษณ์จาก Σ ซึ่งเขียนติดกันโดยไม่เว้นช่องว่างและไม่มีเครื่องหมาย "," คั่น เช่น aabb เป็นสายอักขระสายหนึ่งจากชุดตัวอักษร $\Sigma = \{ a , b \}$

● สายอักขระว่าง (empty string หรือ null string) เขียนแทนด้วย Λ คือสายอักขระที่ไม่มีสัญลักษณ์ปรากฏเลย

● v เป็นสายอักขระย่อย (substring) ของ w ก็ต่อเมื่อ มีสายอักขระ (string) u และ z ที่ซึ่ง

$$w = uvz \text{ (u, z อาจเป็น } \Lambda \text{ ก็ได้)}$$

● เซตของสายอักขระจากชุดตัวอักษรจะเรียกว่า ภาษา (language) เช่น $\{ a , b \}$,

$\{ \Lambda , aa , bb \}$, $\{ a , aa , aaa \}$, $\{ b , bb , bbb , \ldots \}$ ต่างก็เป็นภาษาจาก $\Sigma = \{ a , b \}$

● สายอักขระที่ถูกยอมรับว่าอยู่ในภาษาจะเรียกว่า คำ (word)

● ถ้า w และ x เป็นสายอักขระจากชุดตัวอักษรชุดเดียวกันแล้ว การต่อกันของ w และ x จะได้สายอักขระใหม่ คือ wx โดยจะเรียกวิธีการนี้ว่า การต่อกัน (concatenation)

■

<u>หมายเหตุ</u> (1) หนังสือบางเล่มใช้ ε หรือ λ แทนสายอักขระว่าง

(2) จะไม่อนุญาตให้ Λ เป็นสมาชิกของชุดตัวอักษรใดๆ

ตัวอย่างที่ 1.8

ให้ $\Sigma = \{ a , b , c , d , \ldots , z \}$

และ L = { cat , dog , elephant , tiger }

จากนิยามข้างต้น จะได้ว่า cat เป็นคำที่อยู่ในภาษา L , cow เป็นสายอักขระจากชุดตัวอักษร Σ แต่ไม่ได้เป็นคำที่อยู่ในภาษา L

■

ตัวอย่างที่ 1.9

ให้ $\Sigma = \{ x \}$

$L_1 = \{ x , xx , xxx , xxxx , \ldots \}$

a = xx , b = xxx

ดังนั้น ab = xxxxx

จะเห็นว่า เมื่อนำ a กับ b มาเขียนต่อกัน คำใหม่ที่ได้ยังคงเป็นคำที่อยู่ใน L_1

แต่ถ้าให้ $L_2 = \{ x , xxx , xxxxx , xxxxxxx , \ldots \}$

และให้ c = xxx , d = xxxxx

จะได้ cd = xxxxxxxx

จะเห็นว่า เมื่อนำ c กับ d มาเขียนต่อกัน คำใหม่ที่ได้ ไม่ได้เป็นคำที่อยู่ใน L_2 ถึงแม้ว่า คำทั้งคู่ที่นำมาเขียนต่อกันนั้น จะเป็นคำที่อยู่ใน L_2 ก็ตาม

■

ในการนิยามภาษานั้น นอกจากจะนิยามโดยการแสดงคำทุกคำที่อยู่ในภาษาแล้ว ยังสามารถนิยามภาษาได้จากการสร้างกฎเกณฑ์ในการนิยามคำที่อยู่ในภาษาได้ด้วย

ตัวอย่างที่ 1.10

ให้ $\Sigma = \{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 \}$

และ $L_3 = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 , 12 , 13 , \ldots \}$

จะสามารถนิยามภาษา L_3 ได้อีกวิธีหนึ่งดังนี้คือ

L_3 = { สายอักขระใดๆ จาก Σ ที่ไม่ได้เริ่มต้นด้วย 0 }

ถ้าให้ L_4 = { 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 , 12 , ... }

ซึ่ง L_4 เป็นภาษาที่รวม 0 ด้วย ดังนั้นจะนิยาม L_4 ใหม่ดังนี้คือ

L_4 = { สายอักขระใดๆ จาก Σ โดยที่ ถ้าสายอักขระเริ่มต้นด้วย 0 จะต้องไม่มีสัญลักษณ์ใดถูกนำมาเขียนต่ออีก }

■

บทนิยามที่ 1.2

ถ้า w เป็นสายอักขระสายหนึ่ง ความยาว (length) ของ w เขียนแทนด้วย |w| คือจำนวนเทอมทั้งหมดที่ปรากฏใน w

ถ้า |w| = 0 จะได้ว่า w = Λ

■

ตัวอย่างที่ 1.11

จากภาษา L_3 ถ้าให้ w = 345 จะได้ว่า |w| = 3

■

จากนิยามข้างต้นจะสามารถนิยามภาษา L_4 ได้ใหม่ ดังนี้

L_4 = { สายอักขระใดๆ จาก Σ โดยที่ ถ้าสายอักขระมีความยาวมากกว่าหนึ่ง จะต้องไม่ขึ้นต้นด้วย 0 }

จะเห็นว่า ในการนิยามภาษานั้น สามารถมีได้หลายแนวทางในการนิยามภาษาเดียวกัน

บทนิยามที่ 1.3

ให้ L เป็นภาษา ถ้า a เป็นคำใดๆ ที่อยู่ใน L จะได้ว่า สายอักขระผันกลับ (reverse) ของ a หรือ reverse(a) จะเป็นกลุ่มของสายอักขระเดียวกันแต่เรียงกลับกัน ถึงแม้ว่าหลังจากเรียงกลับหลังแล้วจะไม่ได้คำที่อยู่ใน L

■

ตัวอย่างที่ 1.12

จากภาษา L_1 จะได้ว่า reverse(xxx) = xxx ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้ยังคงเป็นคำที่อยู่ใน L_1

แต่ในภาษา L_3 จะพบว่า reverse(150) = 051 ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้ ไม่ใช่คำที่อยู่ใน L_3

■

<u>บทนิยามที่ 1.4</u>

ให้ Σ เป็นชุดตัวอักษร

ถ้า L เป็นภาษาจาก Σ จะได้ว่า L' หรือ คอมพลีเมนต์ (complement) ของ L จะเป็นภาษาของทุกๆ สายอักขระจาก Σ ที่ไม่ใช่คำที่อยู่ใน L

■

ตัวอย่างที่ 1.13

ให้ $\Sigma = \{ a , b \}$

ถ้า L เป็นภาษาของคำทุกคำจาก Σ ที่ลงท้ายด้วย ab จะได้ว่า L' เป็นภาษาของคำทุกคำจาก Σ ที่ไม่ลงท้ายด้วย ab

■

<u>หมายเหตุ</u> : $(L')' = L$

<u>บทนิยามที่ 1.5</u>

ให้ Σ เป็นชุดตัวอักษร

PALINDROME เป็นภาษาจาก Σ โดยที่

PALINDROME = { Λ และทุกๆ สายอักขระ x ที่ซึ่ง reverse(x) = x }

■

ตัวอย่างที่ 1.14

ให้ $\Sigma = \{ a , b \}$

จะได้ว่า PALINDROME = { Λ , a , b , aa , bb , aaa , aba , bab , bbb , aaaa , abba , ... }

■

<u>บทนิยามที่ 1.6</u>

ให้ Σ เป็นชุดตัวอักษร

โคลเชอร์ (closure) ของชุดตัวอักษร Σ คือเซตของสายอักขระใดๆ จาก Σ รวมทั้ง Λ ด้วย ซึ่งจะเขียนแทนด้วย Σ^*

■

ตัวอย่างที่ 1.15

ให้ $\Sigma = \{ x \}$

จะได้ว่า $\Sigma^* = \{ \Lambda, x, xx, xxx, \ldots \}$

■

ตัวอย่างที่ 1.16

ให้ $\Sigma = \{ a , b \}$

จะได้ว่า $\Sigma^* = \{ \Lambda$, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb, aaaa, ... } ■

สังเกตว่า โคลเชอร์ของ Σ จะทำให้เกิดภาษาไม่จำกัด (infinite language) แต่ถ้า $\Sigma = \varnothing$ จะได้ว่า $\Sigma^* = \{ \Lambda \}$

<u>บทนิยามที่ 1.7</u>

ถ้า S เป็นเซตของคำ

จะได้ว่า S^* คือเซตของทุกๆ สายอักขระที่ถูกสร้างขึ้นโดยการเขียนต่อกันของคำจาก S โดยที่ คำใดๆ อาจจะมีการถูกเรียกใช้ได้บ่อยครั้งเท่าที่ต้องการ รวมทั้ง สายอักขระว่าง ด้วย

■

ตัวอย่างที่ 1.17

ให้ S = { aa , b }

ดังนั้น $S^* = \{ \Lambda$ รวมทั้งคำใดๆ ที่ประกอบด้วย aa และ b }

หรือ S^* = { Λ รวมทั้งสายอักขระใดๆ ของ a และ b ที่ซึ่ง a จะปรากฏอยู่เป็นกลุ่มของเลขคู่}

หรือ S^* = { Λ , b , aa , bb , aab , baa , bbb , aaaa , aabb , baab , bbaa , bbbb , aaaab , aabaa , ... }

■

จะเห็นว่าสายอักขระ baaabaa ไม่อยู่ใน S^* เนื่องจากกลุ่มของ a มีความยาวเป็นเลขคี่ ในการพิสูจน์ว่าคำ w อยู่ใน S^* หรือไม่นั้น จะต้องแสดงว่า คำ w สามารถเขียนมาจากการต่อกัน ของคำจากเซต S ได้ เช่น คำ w = baabb สามารถแยกแฟกเตอร์ได้ดังนี้

(b)(aa)(b)(b)

ซึ่งแต่ละแฟกเตอร์ล้วนเป็นคำที่อยู่ใน S ทั้งสิ้น ดังนั้น คำ w จึงเป็นคำที่อยู่ใน S^*

ถ้า Σ เป็นชุดตัวอักษรจะได้ว่า Σ^* จะเป็นเซตของสายอักขระใดๆ จาก Σ รวมทั้ง Λ ด้วย แต่ถ้าต้องการภาษาเช่นเดียวกับ Σ^* แต่ไม่รวม Λ จะนิยาม Σ^+ ดังนี้

$$\Sigma^+ = \Sigma^* - \{ \Lambda \}$$

ตัวอย่างที่ 1.18

ให้ Σ = { x }

จะได้ว่า Σ^+ = { x , xx , xxx , ... }

■

ตัวอย่างที่ 1.19

ให้ S = { aa , bbb }

ดังนั้น S^* เป็นเซตของสายอักขระทั้งหมดที่ซึ่ง a ปรากฏอยู่เป็นกลุ่มของเลขคู่และ b ปรากฏอยู่เป็นกลุ่มของ 3 , 6 , 9 , ... ตัวอย่างของคำใน S^* เช่น

aaaabbbaa bbb bbbaa

ถ้านำสายอักขระทั้ง 3 คำนี้มาเขียนต่อกัน จะได้คำที่อยู่ใน S^{**} ซึ่งก็คือคำที่อยู่ใน S^* นั่นเอง

aaaabbbaabbbbbbaa = [(aa)(aa)(bbb)(aa)][(bbb)][(bbb)(aa)]

■

<u>ทฤษฎีบทที่ 1.1</u>

ถ้า S เป็นเซตของสายอักขระใดๆ

จะได้ว่า $S^{*} = S^{**}$

■

<u>พิสูจน์</u> (โดยใช้ขั้นตอนวิธีการสร้างเสริม)

เนื่องจากคำทุกคำใน S^{**} ถูกสร้างมาจากแฟกเตอร์จาก S^{*} และ ทุกๆ แฟกเตอร์จาก S^{*} ถูกสร้างมาจากแฟกเตอร์จาก S ดังนั้นคำทุกคำใน S^{**} จึงถูกสร้างมาจากแฟกเตอร์จาก S นั่นคือ คำทุกคำใน S^{**} ก็คือคำใน S^{*} ด้วย จึงกล่าวได้ว่า

$$S^{**} \subseteq S^{*}$$

ถ้า A เป็นเซตใดๆ จะได้ว่า $A \subseteq A^{*}$ ดังนั้น ถ้าให้ $A = S^{*}$ จะได้ว่า

$$S^{*} \subseteq S^{**}$$

จากทั้งสองกรณีจึงสรุปได้ว่า

$$S^{**} = S^{*}$$

■

1.3 นิยามแบบรีเคอร์ซีพ (Recursive Definition)

นิยามแบบรีเคอร์ซีพ (recursive definition) แบ่งออกเป็น 3 ส่วนดังนี้

ส่วนที่ 1. กำหนดสมาชิกพื้นฐานบางตัวในเซต

ส่วนที่ 2. กำหนดกฎเกณฑ์สำหรับการสร้างสมาชิกอื่นๆ ในเซต จากสมาชิกที่รู้อยู่แล้ว

ส่วนที่ 3. กำหนดว่า ไม่ยอมให้มีสมาชิกอื่นใดอยู่ในเซต ยกเว้นสมาชิกที่ถูกสร้างขึ้นด้วยวิธี

ตามส่วนที่ 1 และส่วนที่ 2

ตัวอย่างที่ 1.20

สามารถนิยามเซตของจำนวนเต็มคู่บวก หรือ EVEN ได้หลายวิธีดังนี้

EVEN เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่หารด้วย 2 ลงตัว

หรือ EVEN เป็นเซตของ 2n ทั้งหมด โดยที่ n = 1 , 2 , 3 , ...

หรือ นิยามโดยวิธีรีเคอร์ซีพได้ดังนี้

กฎ 1 : 2 อยู่ใน EVEN

กฎ 2 : ถ้า x อยู่ใน EVEN จะได้ว่า x+2 ก็อยู่ใน EVEN ด้วย

กฎ 3 : ไม่มีสมาชิกอื่นใดอยู่ใน EVEN ยกเว้นสมาชิกที่สร้างมาจากกฎข้อ 1 , 2 เท่านั้น

หรือ

กฎ 1 : 2 อยู่ใน EVEN

กฎ 2 : ถ้า x และ y อยู่ใน EVEN จะได้ว่า x+y ก็อยู่ใน EVEN ด้วย

กฎ 3 : ไม่มีสมาชิกอื่นใดอยู่ใน EVEN ยกเว้นสมาชิกที่สร้างมาจากกฎข้อ 1 , 2 เท่านั้น

จะพิสูจน์ว่า 14 อยู่ในเซตของ EVEN

- โดยใช้นิยามแรก สามารถแสดงได้โดยนำ 14 มาหารด้วย 2 ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้ ไม่มีเศษ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า 14 อยู่ใน EVEN

- โดยใช้นิยามที่สอง จะได้ว่า 14 = (2)(7) ดังนั้น 14 จึงอยู่ใน EVEN

- โดยใช้นิยามที่สาม สามารถแสดงได้ดังนี้

จากกฎที่ 1 จะได้ว่า 2 อยู่ใน EVEN

จากกฎที่ 2 เนื่องจาก 2 อยู่ใน EVEN ดังนั้น 2+2 = 4 ก็อยู่ใน EVEN ด้วย

จากกฎที่ 2 เนื่องจาก 4 อยู่ใน EVEN ดังนั้น 4+2 = 6 ก็อยู่ใน EVEN ด้วย

จากกฎที่ 2 เนื่องจาก 6 อยู่ใน EVEN ดังนั้น 6+2 = 8 ก็อยู่ใน EVEN ด้วย

จากกฎที่ 2 เนื่องจาก 8 อยู่ใน EVEN ดังนั้น 8+2 = 10 ก็อยู่ใน EVEN ด้วย

จากกฎที่ 2 เนื่องจาก 10 อยู่ใน EVEN ดังนั้น 10+2 = 12 ก็อยู่ใน EVEN ด้วย

จากกฎที่ 2 เนื่องจาก 12 อยู่ใน EVEN ดังนั้น 12+2 = 14 ก็อยู่ใน EVEN ด้วย

- โดยการใช้นิยามสุดท้าย สามารถแสดงได้ดังนี้

จากกฎที่ 1 จะได้ว่า 2 อยู่ใน EVEN

จากกฎที่ 2 ให้ x = 2 , y = 2 ดังนั้น 2+2 = 4 อยู่ใน EVEN

จากกฎที่ 2 ให้ x = 2 , y = 4 ดังนั้น 2+4 = 6 อยู่ใน EVEN

จากกฎที่ 2 ให้ x = 4 , y = 4 ดังนั้น 4+4 = 8 อยู่ใน EVEN

จากกฎที่ 2 ให้ x = 6 , y = 8 ดังนั้น 6+8 = 14 อยู่ใน EVEN

สังเกตว่า การนิยามโดยวิธีรีเคอร์ซีพ นิยามสุดท้ายนั้น ดีกว่านิยามที่สาม เนื่องจากได้ให้การพิสูจน์ที่สั้นกว่า ถึงแม้ว่าการนิยามโดยวิธีรีเคอร์ซีพนั้นจะให้การพิสูจน์ที่ยาวกว่า 2 นิยามแรก แต่การนิยามโดยวิธีรีเคอร์ซีพก็มีประโยชน์บางอย่าง เช่น ถ้าต้องการพิสูจน์ว่า ผลบวกของสมาชิก 2 ตัวใน EVEN ก็เป็นสมาชิกใน EVEN ด้วย จะพบว่า ถ้าใช้นิยามสุดท้ายจะสามารถพิสูจน์ได้ง่ายกว่าการใช้นิยามแรก

■

ตัวอย่างที่ 1.21

สามารถนิยามเซต POLYNOMIAL โดยวิธีรีเคอร์ซีพ ได้ดังนี้

กฎ 1 : ตัวเลขใดๆ อยู่ใน POLYNOMIAL

กฎ 2 : ตัวแปร x อยู่ใน POLYNOMIAL

กฎ 3 : ถ้า p และ q อยู่ใน POLYNOMIAL จะได้ว่า

p+q , (q) และ pq จะอยู่ใน POLYNOMIAL ด้วย

กฎ 4 : ไม่มีสมาชิกอื่นใดอยู่ใน POLYNOMIAL ยกเว้นสมาชิกที่สร้างมาจากกฎข้อ 1 , 2 และ 3 เท่านั้น

จากนิยามดังกล่าว สัญลักษณ์ pq หมายถึงการคูณ นอกจากนี้ จะสามารถเขียนในรูปการลบได้เช่น p+(-1)q

ต่อไปจะแสดงว่า $4x^2 + 5x - 1$ อยู่ใน POLYNOMIAL

จากกฎที่ 1 **จะได้ว่า 4 อยู่ใน POLYNOMIAL**

จากกฎที่ 2 **จะได้ว่า x อยู่ใน POLYNOMIAL**

จากกฎที่ 3 ให้ p = 4 , q = x ดังนั้น 4x อยู่ใน POLYNOMIAL

จากกฎที่ 3 ให้ p = 4x , q = x ดังนั้น $4xx = 4x^2$ อยู่ใน POLYNOMIAL

จากกฎที่ 1 จะได้ว่า 5 อยู่ใน POLYNOMIAL

จากกฎที่ 3 ให้ p = 5 , q = x ดังนั้น 5x อยู่ใน POLYNOMIAL

จากกฎที่ 3 ให้ $p = 4x^2$, q = 5x ดังนั้น $4x^2 + 5x$ อยู่ใน POLYNOMIAL

จากกฎที่ 1 จะได้ว่า -1 อยู่ใน POLYNOMIAL

จากกฎที่ 3 ให้ $p = 4x^2 + 5x$, q = -1 ดังนั้น $4x^2 + 5x - 1$ อยู่ใน POLYNOMIAL

■

จากนิยามก่อนหน้านี้ จะเห็นได้ว่า ผลบวกและผลคูณของ POLYNOMIAL ก็ยังคงเป็น POLYNOMIAL

ตัวอย่างที่ 1.22

นิยามที่นักศึกษาวิทยาการคอมพิวเตอร์จะเห็นกันอยู่บ่อยๆ ก็คือ FACTORIAL ซึ่งจะนิยามเซตของ FACTORIAL โดยวิธีรีเคอร์ซีฟ ได้ดังนี้คือ

กฎ 1 : 0! = 1

กฎ 2 : (n+1)! = (n+1)(n!)

บางครั้งจะละกฎข้อสุดท้ายไว้ในฐานที่เข้าใจว่า ไม่มีสมาชิกอื่นใดอีกแล้วที่จะอยู่ใน FACTORIAL ยกเว้นสมาชิกที่ผลิตได้จากกฎ 1 และ 2

■

เหตุผลที่นิยามนี้ถูกเรียกว่ารีเคอร์ซีพ ก็คือ มีกฎในการนิยามเซตที่อ้างถึงเซตของตัวเอง จะเห็นว่าได้นิยาม EVEN ในเทอมของสมาชิกที่รู้อยู่แล้วของ EVEN ส่วน POLYNOMIAL ก็เช่นเดียวกัน จากนิยามดังกล่าว จะนิยาม (n+1)! ในเทอมของ n!

ในภาษาคอมพิวเตอร์ ถ้ามีขบวนการ (procedure) เรียกใช้ตัวเอง จะเรียกโปรแกรมนั้นว่าโปรแกรมรีเคอร์ซีพ

ต่อไปมาดูการนิยามภาษาที่ได้กล่าวไปแล้วในหัวข้อ 1.2 ในรูปแบบของรีเคอร์ซีพ

ตัวอย่างที่ 1.23

กฎ 1 : x อยู่ใน L_1

กฎ 2 : ถ้า Q เป็นคำใดๆ ใน L_1 จะได้ว่า xQ ก็อยู่ใน L_1 ด้วย

$L_1 = x^+ = \{ x , xx , xxx , \dots \}$

■

ตัวอย่างที่ 1.24

กฎ 1 : Λ อยู่ใน L_2

กฎ 2 : ถ้า Q เป็นคำใดๆ ใน L_2 จะได้ว่า xxQ ก็อยู่ใน L_2 ด้วย

$L_2 = \{ \Lambda , xx , xxxx , \dots \}$

■

ตัวอย่างที่ 1.25

กฎ 1 : 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 อยู่ใน L_3

กฎ 2 : ถ้า Q เป็นคำใดๆ ใน L_3 จะได้ว่า

Q0 , Q1 , Q2 , Q3 , Q4 , Q5 , Q6 , Q7 , Q8 , Q9 จะเป็นคำใน L_3 ด้วย

$L_3 = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , \dots \}$

■

ตัวอย่างที่ 1.26

จะนิยามนิพจน์เลขคณิต (arithmetic expression) โดยวิธีรีเคอร์ซีพได้ดังนี้

กฎ1 : ตัวเลขใดๆ (บวก, ลบ, หรือ ศูนย์) อยู่ใน AE

กฎ2 : ถ้า x อยู่ใน AE แล้วจะได้ว่า (x) และ -(x) ก็อยู่ใน AE ด้วย

กฎ3 : ถ้า x และ y อยู่ใน AE แล้วจะได้ว่า สมาชิกข้างล่างนี้ก็อยู่ใน AE ด้วย

(i) x + y (ถ้าสัญลักษณ์ตัวแรกใน y ไม่ใช่ -)

(ii) x - y (ถ้าสัญลักษณ์ตัวแรกใน y ไม่ใช่ -)

(iii) x * y

(iv) x/y

(v) x**y (การยกกำลัง)

กฎ4 : ไม่มีสมาชิกอื่นใดอยู่ใน AE ยกเว้นสมาชิกที่สร้างมาจากกฎข้อ 1 , 2 และ 3 เท่านั้น

จากนิยามนี้ สามารถพิสูจน์ได้ไม่ยากว่า 8/4/2 อยู่ใน AE แต่ว่านิพจน์นี้หมายถึง 8/(4/2) = 4

หรือ (8/4)/2 = 1 ซึ่งเกิดความกำกวมในเรื่องของความหมาย ซึ่งในบทนี้จะยังไม่สนใจในเรื่องของความหมาย จะกล่าวถึงเรื่องนี้อีกทีในบทต่อๆไป

■

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1

1. จงพิสูจน์ว่า $1^4 + 2^4 \ldots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)}{30}$ เป็นจริงหรือเท็จ

2. จงพิสูจน์ว่า $1^5 + 2^5 \ldots + n^5 = \frac{n^2 (n+1)^2 (2n^2 + 2n - 1)}{12}$ เป็นจริงหรือเท็จ

3. จงพิสูจน์ว่า $7 + 13 + 19 + \ldots + (6n + 1) = n(3n + 4)$ เป็นจริงหรือเท็จ

4. ถ้า r เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่มีค่ามากกว่า 1

จงพิสูจน์ว่าสำหรับ n ใด ๆ ที่ $n \geq 0$,

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1 - r^{n+1}}{1-r}$$ เป็นจริงหรือเท็จ

5. จงพิสูจน์ว่าสำหรับ n ใด ๆ ที่ $n \geq 0$,

$$1 + \sum_{i=1}^{n} i * i! = (n + 1)!$$ เป็นจริงหรือเท็จ

6. จากลำดับฟิโบนักชิ (Fibonacci Sequence)

$1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + \ldots..$

ให้ $U_1 = 1$, $U_2 = 2$ และ $U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ที่ $n \geq 3$

จงพิสูจน์ว่า $U_n < \left(\frac{7}{4}\right)^{n}$ เป็นจริงหรือเท็จ

7. จงพิสูจน์ว่า $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2n^{n+1} - 1$ เป็นจริงหรือเท็จ

8. จงพิสูจน์ว่าจะไม่มีเลขเศษส่วนแท้ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง

$x^3 + x + 1 = 0$

9. กำหนดให้ $S = \{ a , ab \}$

9.1 จงเขียนคำทุกคำที่อยู่ใน S^* ที่มีความยาวน้อยกว่าหรือเท่ากับ 4

9.2 คำใด ๆที่อยู่ในภาษานี้สามารถประกอบด้วย bb ได้หรือไม่

9.3 คำ aaabaaba อยู่ในภาษา S^* หรือไม่ จงอธิบาย

10. กำหนดให้ $S = \{ a , ab , ba \}$ จงพิจารณา S^*

10.1 จงเขียนคำทุกคำที่อยู่ใน S^* ที่มีความยาวน้อยกว่าหรือท่ากับ 4

10.2 คำใดๆที่อยู่ในภาษานี้สามารถประกอบด้วย bbb ได้หรือไม่

10.3 คำ aaababbaa อยู่ในภาษานี้หรือไม่ จงอธิบาย

11. กำหนดให้ $S = \{ ab , bb \}$ และให้ $T = \{ ab , bb , bbb \}$

11.1 จงเขียนคำทุกคำที่อยู่ใน S^* ที่มีความยาวน้อยกว่าหรือเท่ากับ 5

11.2 จงแสดงว่า $S^* \neq T^*$ แต่ $S^* \subset T^*$

12. กำหนดให้ $S = \{ aba , bb \}$ จงพิจารณาว่าคำ bbabaaba และ abbababb อยู่ในภาษา S^* หรือไม่ จงอธิบาย

13. จงพิสูจน์ว่าภาษา L ต่อไปนี้เป็นภาษาปกติ

L = {w $\in \{ 0 , 1 \}^*$ | w เป็นคำที่ขึ้นต้นด้วย 0 และมีความยาวเป็นเลขคี่ หรือ เป็นคำที่ขึ้นต้น ด้วย 1 และมีความยาวเป็นเลขคู่ }

14. จงเขียนนิยามรีเคอร์ซีพ (Recursive definition) ของคำทุกคำที่มีความยาวที่หารด้วย 3 ลงตัว

15. จงเขียนนิยามรีเคอร์ซีพ (Recursive definition) ของภาษาที่ประกอบด้วยคำทุกคำที่มีความยาวเป็นจำนวนคู่ (ภาษา EVENSTRING)

16. กฎ 1 : a อยู่ใน L

กฎ 2 : ถ้า x อยู่ใน L จะได้ว่า xa , xb ก็อยู่ใน L ด้วย

กฎ 3 : ไม่มีสมาชิกอื่นใดอยู่ใน L นอกจากสมาชิกที่สร้างมาจาก กฎ 1 หรือ 2 เท่านั้น

นิยามรีเคอร์ซีพ (Recursive definition) ข้างบนนี้นิยามภาษาอะไร จงยกตัวอย่างคำที่อยู่ใน L มา 5 คำ

17. กฎ 1 : a อยู่ใน L

กฎ 2 : ถ้า x อยู่ใน L จะได้ว่า bx , xb ก็อยู่ใน L ด้วย

กฎ 3 : ไม่มีสมาชิกอื่นใดอยู่ใน L นอกจากสมาชิกที่สร้างมาจาก กฎ 1 หรือ 2 เท่านั้น

นิยามรีเคอร์ซีพ (Recursive definition) ข้างบนนี้นิยามภาษาอะไร

จงยกตัวอย่างคำที่อยู่ใน L มา 5 คำ

18. กฎ 1 : a อยู่ใน L

กฎ 2 : ถ้า x อยู่ใน L จะได้ว่า ax , xb ก็อยู่ใน L ด้วย

กฎ 3 : ไม่มีสมาชิกอื่นใดอยู่ใน L นอกจากสมาชิกที่สร้างมาจาก กฎ 1 หรือ 2 เท่านั้น

นิยามรีเคอร์ซีพ (Recursive definition) ข้างบนนี้นิยามภาษาอะไร จงยกตัวอย่างคำที่อยู่ใน L มา 5 คำ

19. กฎ 1 : a อยู่ใน L

กฎ 2 : ถ้า x อยู่ใน L จะได้ว่า xb , xa, และ bx ก็อยู่ใน L ด้วย

กฎ 3 : ไม่มีสมาชิกอื่นใดอยู่ใน L นอกจากสมาชิกที่สร้างมาจาก กฎ 1 หรือ 2 เท่านั้น

นิยามรีเคอร์ซีพ (Recursive definition) ข้างบนนี้นิยามภาษาอะไร จงยกตัวอย่างคำที่อยู่ใน L มา 5 คำ

20. กฎ 1 : a อยู่ใน L

กฎ 2 : ถ้า x อยู่ใน L จะได้ว่า xb , ax, และ bx ก็อยู่ใน L ด้วย

กฎ 3 : ไม่มีสมาชิกอื่นใดอยู่ใน L นอกจากสมาชิกที่สร้างมาจาก กฎ 1 หรือ 2 เท่านั้น

นิยามรีเคอร์ซีพ (Recursive definition) ข้างบนนี้นิยามภาษาอะไร จงยกตัวอย่างคำที่อยู่ใน L มา 5 คำ

21. กฎ 1 : a อยู่ใน L

กฎ 2 : ถ้า x อยู่ใน L จะได้ว่า xb , xba ก็อยู่ใน L ด้วย

กฎ 3 : ไม่มีสมาชิกอื่นใดอยู่ใน L นอกจากสมาชิกที่สร้างมาจาก กฎ 1 หรือ 2 เท่านั้น

นิยามรีเคอร์ซีพ (Recursive definition) ข้างบนนี้นิยามภาษาอะไร จงยกตัวอย่างคำที่อยู่ใน L มา 5 คำ

22. กฎ 1 : Λ, a, และ aa อยู่ใน L

กฎ 2 : ถ้า x อยู่ใน L จะได้ว่า xb , xba, และ xbaa ก็อยู่ใน L ด้วย

กฎ 3 : ไม่มีสมาชิกอื่นใดอยู่ใน L นอกจากสมาชิกที่สร้างมาจาก กฎ 1 หรือ 2 เท่านั้น

นิยามรีเคอร์ซีฟ (Recursive definition) ข้างบนนี้นิยามภาษาอะไร จงยกตัวอย่างคำที่อยู่ใน L มา 5 คำ

23. กฎ 1 : Λ อยู่ใน L

กฎ 2 : ถ้า x อยู่ใน L จะได้ว่า ax , xb, และ xba ก็อยู่ใน L ด้วย

กฎ 3 : ไม่มีสมาชิกอื่นใดอยู่ใน L นอกจากสมาชิกที่สร้างมาจาก กฎ 1 หรือ 2 เท่านั้น

นิยามรีเคอร์ซีฟ (Recursive definition) ข้างบนนี้นิยามภาษาอะไร จงยกตัวอย่างคำที่อยู่ใน L มา 5 คำ

24. กฎ 1 : a และ b อยู่ใน L

กฎ 2 : ถ้า x อยู่ใน L จะได้ว่า xaa , xab , xba และ xbb ก็อยู่ใน L ด้วย

กฎ 3 : ไม่มีสมาชิกอื่นใดอยู่ใน L นอกจากสมาชิกที่สร้างมาจาก กฎ 1 หรือ 2 เท่านั้น

นิยามรีเคอร์ซีฟ (Recursive definition) ข้างบนนี้นิยามภาษาอะไร จงยกตัวอย่างคำที่อยู่ใน L มา 5 คำ

25. จงเขียนนิยามรีเคอร์ซีฟ (Recursive definition) สำหรับภาษา Palindorme

26. ให้ S = { aa , b } จงเขียนนิยามรีเคอร์ซีฟ(recursive definition) สำหรับภาษา S^*

27. จงเขียนนิยามรีเคอร์ซีฟ (Recursive definition) ของภาษาที่สร้างจาก $\{0,1\}^*$ ซึ่งคำทุกคำประกอบด้วยสายอักขระย่อย 00 (ให้ชื่อว่าภาษา U)

28. จงเขียนนิยามรีเคอร์ซีฟ (Recursive definition) ของภาษาที่สร้างจากสายอักขระ 0^i1^j โดยที่ $j \leq i \leq 2j$ (ให้ชื่อว่าภาษา V)

29. จงเขียนนิยามรีเคอร์ซีฟ (Recursive definition) ของภาษาที่สร้างจากสายอักขระ 0^i1^j โดยที่ $i \geq 2j$ (ให้ชื่อว่าภาษา W)