บทที่ 6 กราฟ
(Graphs)

6.1 กราฟเบื้องต้น (Introduction to Graphs)

6.2 การใช้คำศัพท์ต่างๆ ในกราฟ (Graph Terminology)

6.3 การแทนที่กราฟ และ กราฟถอดแบบกัน (Representing Graphs and Graph Isomorphism)

6.4 การต่อกัน (Connectivity)

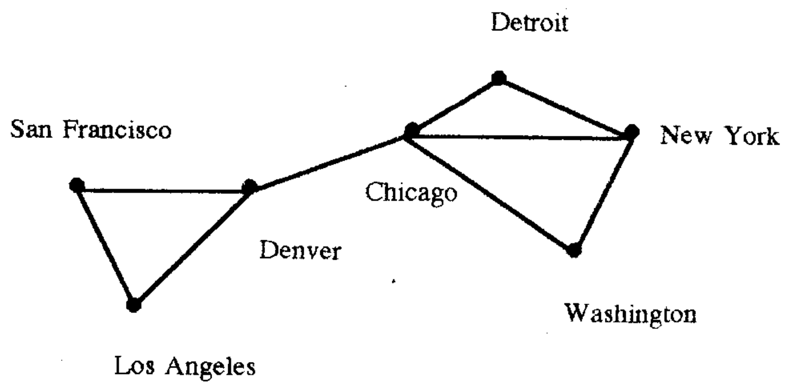
6.5 ทางเดินออยเลอร์ และ ทางเดินแฮมมิลตัน (Euler and Hamilton Paths)

6.1 **กราฟเบื้องต้น (Introduction to Graphs)**

กราฟ หมายถึง โครงสร้างไม่ต่อเนื่อง ประกอบด้วย จุดต่างๆ และด้านต่างๆ ซึ่งต่อจุดเหล่านี้ กราฟมีหลายชนิด ซึ่ง การแตกต่างกันนั้น เกี่ยวกับ ชนิดและจำนวนของด้าน ซึ่ง ต่อกับคู่ของจุด ปัญหาเกือบทุกปัญหาที่มองเห็นส่วนใหญ่ สามารถแก้ไขได้ โดยใช้ตัวแบบกราฟ ตัวอย่างเช่น การแสดงให้เห็นว่ากราฟนำมาใช้แทน outcome ของการแข่งขันอย่างไร, การคำนวณจำนวนของวิธีการจัดหมู่ที่แตกต่างกันของเที่ยวบินต่างๆ ระหว่างเมืองสองเมือง ใน ข่ายงานสายการบิน, การคำนวณว่า จะเป็นไปได้หรือไม่ ที่จะเดินบนถนนทุกสายในเมือง โดยที่ไม่เดินบนถนนเดียวกันซ้ำสองครั้ง และการคำนวณหา จำนวนสี ที่ใช้ระบายเนื้อที่ของแผนที่

ชนิดของกราฟ (Types of Graphs)

สมมติว่า ข่ายงานแห่งหนึ่ง ประกอบด้วย เครื่องคอมพิวเตอร์ต่างๆ และสายโทรศัพท์ ซึ่งต่อระหว่าง คอมพิวเตอร์ เราสามารถแทนตำแหน่ง ของคอมพิวเตอร์ แต่ละเครื่อง ด้วย จุด และสายโทรศัพท์ แต่ละเส้น ด้วย ด้าน ดูรูปที่ 1



รูปที่ 1 ข่ายงานคอมพิวเตอร์ (A Computer Network)

จากรูปข้างต้นนี้ จะเห็นว่า มีสายโทรศัพท์ อย่างมากที่สุด หนึ่งสาย ระหว่างคอมพิวเตอร์สองเครื่อง ในข่ายงานนี้ แต่ละสาย ปฏิบัติการ ใน สองทิศทาง และ คอมพิวเตอร์ทุกตัว ไม่มีสายโทรศัพท์ ไปยังตัวมันเอง ด้วยเหตุนี้ ข่ายงานนี้ สามารถถูกทำเป็นตัวแบบ โดยใช้ **กราฟเชิงเดียว** (Simple graph) ซึ่งประกอบด้วย จุดต่างๆ แทนเครื่องคอมพิวเตอร์ และด้าน ไม่มีทิศทางแทนสายโทรศัพท์ แต่ละด้าน ต่อสองจุด ที่แตกต่างกัน และ ไม่มีสองด้านใดๆ ซึ่งต่อ คู่เดียวกันของจุด

บทนิยาม 1 กราฟเชิงเดียว G = (V, E) ประกอบด้วย V ซึ่งเป็นเซตไม่ว่างของจุดต่างๆ และ E ซึ่งเป็นเซตของคู่แบบไม่มีอันดับ ของ สมาชิกแตกต่างกัน ของ V เรียกว่า ด้าน

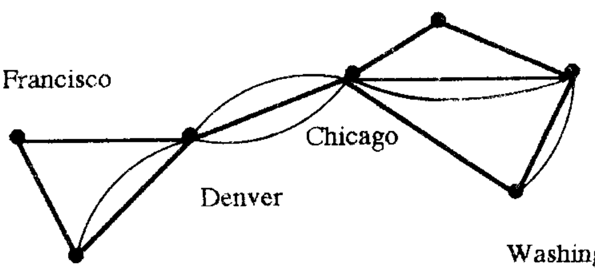
(A **simple graph** G = (V, E) consists of V, a nonempty set of vertices, and E, a set of unordered pairs of distinct elements of V called edges.)[1]

Johnsonbaugh (หน้า 7) กล่าวว่า

กราฟ ซึ่ง ไม่มี รูปบ่วงและไม่มีด้านขนาน เรียกว่า **กราฟเชิงเดียว**

(A graph with neither loops nor paralled edges is called a **simple graph.**)

บางครั้ง ระหว่างเครื่องคอมพิวเตอร์ต่างๆ ในข่ายงาน อาจจะมีสายโทรศัพท์ มากกว่าหนึ่งสาย สิ่งนี้ คือ กรณีที่ มีการจราจรมาก ระหว่างคอมพิวเตอร์ข่ายงาน ซึ่งมีสายโทรศัพท์หลายสาย แสดงให้เห็นในรูปที่ 2



รูปที่ 2 ข่ายงานคอมพิวเตอร์ ที่มีสายมากกว่าหนึ่งเส้น

กราฟเชิงเดียว ไม่สามารถใช้เป็นตัวแบบ ให้กับข่ายงานเช่นนี้ได้ จึงจำเป็นต้องใช้ **กราฟหลายเส้น** (multigraphs) แทน ซึ่งประกอบด้วย จุด และ ด้าน ไม่มีทิศทาง ต่อระหว่างจุดเหล่านี้ ระหว่างคู่ของจุด อาจมีด้านมากกว่าหนึ่งด้านได้ ดังนั้น กราฟเชิงเดียว ทุกชุด จึงถือว่าเป็น กราฟหลายเส้นด้วย อย่างไรก็ตาม กราฟหลายเส้นไม่ใช่กราฟทั้งหมด ซึ่งเป็นกราฟเชิงเดียว เพราะว่า ในกราฟหลายเส้น ระหว่างคู่เดียวกันของจุด อาจมีด้านต่อกับจุด ตั้งแต่สองด้าน หรือ มากกว่าสองด้านขึ้นไป

---

[1] Rosen, หน้า 409

กรณีนี้เราไม่สามารถ ใช้คู่ของจุด เพื่อระบุ ด้านหนึ่งด้าน ของกราฟ ได้ เมื่อระหว่างคู่ของจุดนั้น มีด้านมากกว่า หนึ่งด้าน

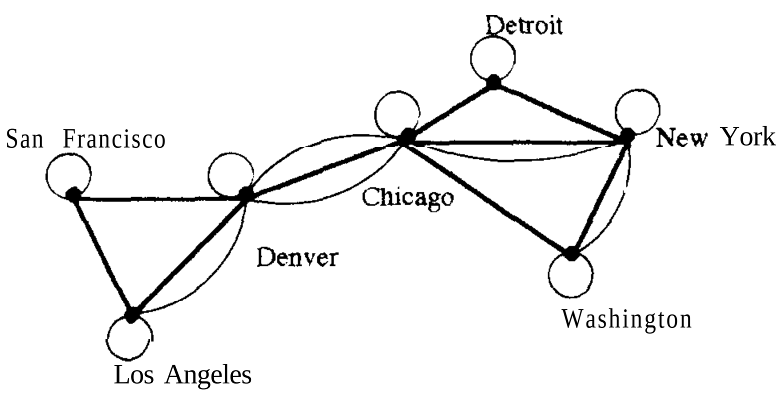
สิ่งนี้ทำให้ บทนิยามทางการของ กราฟหลายเส้น ค่อนข้างซับซ้อน

บทนิยาม 2 **กราฟหลายเส้น** G = (V, E!) **ประกอบด้วย เซต** V **ของจุด และ เซต** E **ของด้าน และ ฟังก์ชัน** f **จาก** E **ไปยัง** $\{\{u, v\} \mid u, v \in V,\ u \neq v\}$ **ด้าน** e_1 **และ** e_2 **เรียกว่า ด้านมากกว่าหนึ่งด้าน หรือ ด้านขนาน ถ้า** $f(e_1) = f(e_2)$

ข่ายงานคอมพิวเตอร์ อาจจะประกอบด้วย สายโทรศัพท์ หนึ่งสาย จากเครื่องคอมพิวเตอร์ไปยังตัวมัน ดูรูปที่ 3 เราไม่สามารถใช้ กราฟหลายเส้น (multigraph) เพื่อเป็นตัวแบบให้กับข่ายงานเช่นนี้ เพราะว่า รูปบ่วง (loops) ซึ่งเป็นด้าน จากหนึ่งจุด ไปยังตัวมันเอง และจะมีอยู่ใน กราฟหลายเส้นไม่ได้ ดังนั้นจึงใช้ **กราฟเทียม** (pseudograph) แทน

กราฟเทียม มีลักษณะทั่วไป มากกว่า กราฟหลายเส้น เพราะว่า หนึ่งด้าน ใน กราฟเทียม อาจต่อกับ หนึ่งจุด ซึ่งเป็นตัวมันเอง

การให้นิยาม pseudograph อย่างเป็นทางการ เราต้องเกี่ยวข้อง ด้านต่างๆ กับเซต ซึ่งมีเพียงหนึ่งจุด



รูปที่ 3 ข่ายงานคอมพิวเตอร์ กับ Diagnostic lines

บทนิยาม 3 pseudograph G = (V, E) **ประกอบด้วย เซต** V **ของจุด และ เซต** E **ของด้าน และ ฟังก์ชัน** f **จาก** E **ไปยัง** $\{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ **ดังนั้น จะเป็นรูปบ่วง** (loop) **ถ้า** $f(e) = \{u\}$ for some $u \in V$

ข้อสังเกต ด้านมากกว่าหนึ่งด้าน ใน pseudograph จะเกี่ยวข้องกับ คู่เดียวกันของจุดต่างๆ อย่างไรก็ตาม เราจะพูดว่า {u, v} คือด้าน ของ กราฟ G = (V, E) ถ้ามีอย่างน้อยที่สุด หนึ่งด้าน e ที่ f(e) = {u, v}

สรุป กราฟเทียม หมายถึง กราฟส่วนมาก ซึ่งไม่มีทิศทางชนิดทั่วไป เพราะว่า มันอาจมีรูปบ่วง และมีด้านมากกว่าหนึ่งด้าน ระหว่างคู่ของจุด

กราฟหลายเส้น หมายถึง กราฟไม่มีทิศทาง อาจ มีด้านขนานได้ แต่ต้องไม่มีรูปบ่วง

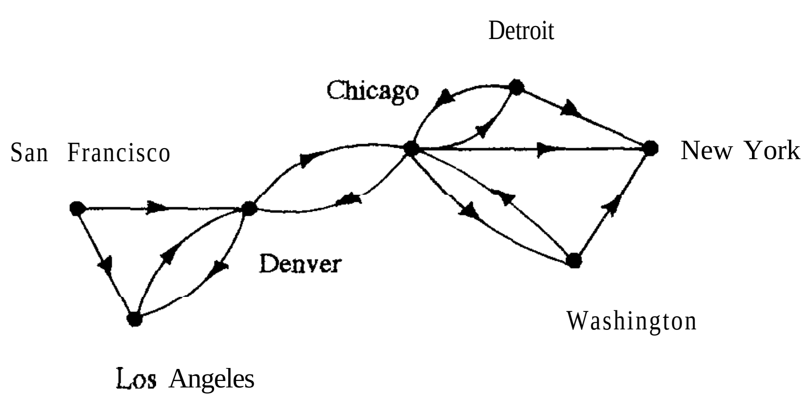
สุดท้าย กราฟเชิงเดียว หมายถึง กราฟไม่มีทิศทาง ไม่มีด้านขนาน และไม่มีรูปบ่วง

สายโทรศัพท์ ในข่ายงานคอมพิวเตอร์ อาจจะไม่ปฏิบัติการใน สองทิศทาง ตัวอย่างเช่น ในรูปที่ 4 คอมพิวเตอร์แม่งาน (host computer) ใน New York สามารถรับข้อมูลได้เฉพาะ จาก คอมพิวเตอร์ ตัวอื่นๆ เท่านั้น และไม่สามารถส่งข้อมูลออกไป สายโทรศัพท์อื่นๆ ปฏิบัติการ ใน สองทิศทาง และแทนด้วย คู่ของด้าน ในทิศทางตรงกันข้าม

เราใช้ กราฟมีทิศทาง (directed graph) เพื่อเป็น ตัวแบบ ของ ข่ายงานเช่นนี้ ด้านของ กราฟมีทิศทาง จะเป็นคู่อันดับ

รูปบ่วง ซึ่งเป็น คู่อันดับ ของ สมาชิกตัวเดียวกัน อนุญาตให้มีได้ แต่ด้านขนาน ใน ทิศทางเดียวกัน ระหว่างจุดสองจุด มีไม่ได้

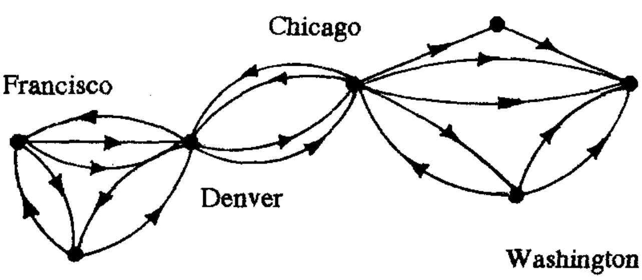
บทนิยาม 4 กราฟมีทิศทาง (V, E) ประกอบด้วย เซตของจุด V และเซตของด้าน E ซึ่งเป็น คู่อันดับ ของ สมาชิกของ V



รูปที่ 4 ข่ายงานการสื่อสาร ที่เป็น One-way Telephone Lines

สุดท้าย เส้นหลายเส้น อาจอยู่ ใน ข่ายงานคอมพิวเตอร์ ดังนั้น อาจจะมี สายทางเดียว หลายเส้น ไปยัง host ที่ New York จาก แต่ละตำแหน่งที่อยู่ (each location) และบางที อาจจะมีสายโทรศัพท์มากกว่าหนึ่งสาย กลับไปยัง คอมพิวเตอร์ระยะไกล (remote computer) แต่ละตัว จาก host

ข่ายงานเช่นนี้ ดังเช่นที่แสดงให้เห็นในรูปที่ 5 กราฟมีทิศทาง ไม่เพียงพอที่จะใช้เป็น ตัวแบบ ให้กับข่ายงานเช่นนี้ เพราะว่า ด้านหลายๆ ด้าน ไม่อนุญาต ให้มีอยู่ใน กราฟเหล่านี้ ดังนั้น **กราฟหลายเส้นแบบมีทิศทาง** (directed multigraphs) ซึ่งจะมีด้านมีทิศทางมากกว่าหนึ่งเส้น จาก จุดหนึ่ง ไปยังจุดที่สอง (อาจจะเป็นจุดเดียวกัน) ถูกนำมาใช้แทน สำหรับ บทนิยามแบบทางการ ของ กราฟหลายเส้นแบบมีทิศทาง กล่าวไว้ดังนี้



รูปที่ 5 ข่ายงานคอมพิวเตอร์ ที่เป็น Multiple One-Way Lines

บทนิยาม 5 กราฟหลายเส้นแบบมีทิศทาง $G = (V, E)$ ประกอบด้วย เซต V ของจุด, เซต E ของด้าน และฟังก์ชัน f จาก E ไปยัง $\{(u, v) \mid u, v \in V\}$ ด้าน e_1 และ e_2 เป็นด้านหลายเส้น ถ้า $f(e_1) = f(e_2)$

โปรดสังเกตว่า ด้านแบบมีทิศทางหลายเส้น เกี่ยวข้องกับ คู่เดียวกันของจุด อย่างไรก็ตาม เราพูดว่า คู่อันดับ (u, v) คือด้าน ของ $G = (V, E)$ ตราบใดที่ มีด้าน อย่างน้อยที่สุด หนึ่งด้าน e โดยที่ $f(e) = (u, v)$ ไม่มีความแตกต่างระหว่างด้าน e และคู่อันดับ (u,v) ที่เกี่ยวข้องกับด้านนี้ ถ้าไม่ได้ ระบุว่า เส้นหลายเส้นนั้น แต่ละเส้น มีความสำคัญ

เทอม สำหรับกราฟชนิดต่างๆ นี้ จะทำให้ชัดเจน ไม่ว่ากราฟที่มีด้าน เกี่ยวข้องกับ คู่อันดับ หรือ คู่แบบไม่มีอันดับ หรือไม่ ไม่ว่ามีด้านหลายเส้น หรือไม่ว่า จะมีรูปบ่วงหรือไม่ ดังนี้

เราจะใช้คำว่า **กราฟ** (graph) เพื่ออธิบาย กราฟ ที่มีด้านแบบมีทิศทาง หรือ ด้านแบบไม่มีทิศทาง การมีรูปบ่วง หรือไม่มีรูปบ่วง และ การมีหรือไม่มี ด้านหลายเส้น

เราจะใช้คำว่า undirected graph หรือ pseudograph สำหรับ กราฟแบบไม่มีทิศทาง ซึ่งอาจจะมีด้านหลายเส้น และรูปบ่วง เราจะใช้คำว่า directed เมื่ออ้างถึง กราฟ ซึ่ง มีคู่อันดับเกี่ยวข้องกับด้านของมัน บทนิยามของกราฟชนิดต่างๆ ได้ทำสรุปไว้แล้วในตารางที่ 1

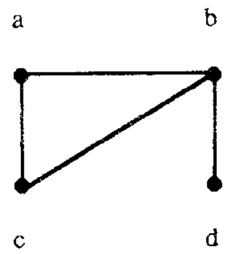
Table 1 Graph Terminology

Type	Edges	Multiple Edges Allowed?	Loop Allowed?
Simple graph	Undirected	No	No
Multigraph	Undirected	Yes	No
Pseudograph	Undirected	Yes	Yes
Directed graph	Directed	No	Yes
Directed multigraph	Directed	Yes	Yes

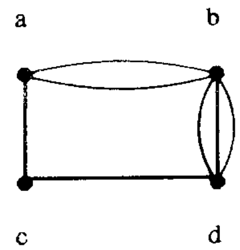
แบบฝึกหัด 6.1

สำหรับ ข้อ 1-7 จงบอกว่า กราฟรูปที่แสดงให้เห็นนั้น เป็น กราฟเชิงเดียว, กราฟหลายเส้น (และไม่ใช่กราฟเชิงเดียว), กราฟเทียม (และไม่ใช่กราฟหลายเส้น), กราฟแบบมีทิศทาง หรือ กราฟแบบมีทิศทางหลายเส้น (และไม่ใช่กราฟแบบมีทิศทาง)

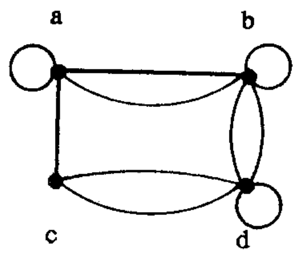
1.



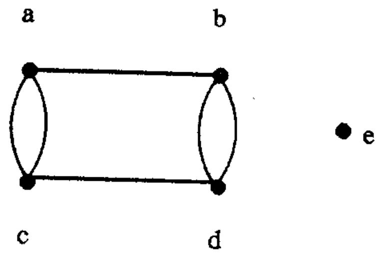
2.



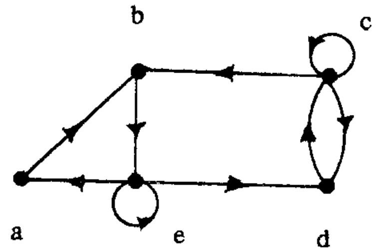
3.



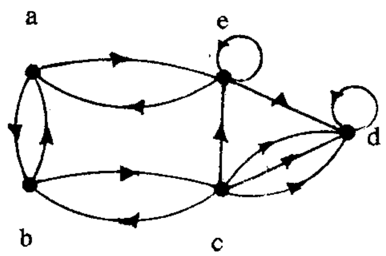
4.



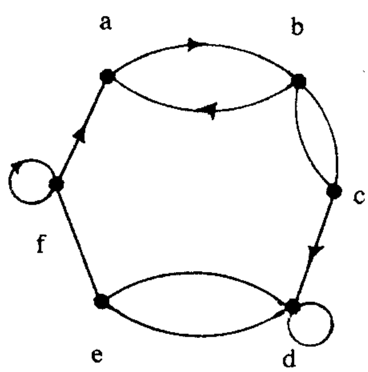
5.



6.



7.



6.2 การใช้คำศัพท์ต่างๆ ในกราฟ (Graph Terminology)

ในหัวข้อนี้ จะกล่าวถึง ศัพท์พื้นฐาน บางอย่าง ของทฤษฎีกราฟ และจะใช้คำศัพท์นี้ เพื่อแก้ปัญหาชนิดต่างๆ

บทนิยาม 1 จุดสองจุด u และ v ในกราฟแบบไม่มีทิศทาง G เรียกว่า **จุดประชิดกัน** (หรือ**จุดใกล้กัน**) ใน G ถ้า {u, v} คือด้านหนึ่งของ G ถ้า e = {u, v} ด้าน e เรียกว่า **ด้านตกกระทบ** ด้วยจุด u และจุด v ด้าน e เรียกว่า **ด้านต่อ**กับจุด u และจุด v ส่วนจุด u และจุด v เรียกว่า **จุดปลาย**ของด้าน {u, v}

(Two vertices u and v in an undirected graph G are called **adjacent** (or **neighbors**) in G if {u, v} is an edge of G. If e = {u, v}, the edge e is called **incident with** the vertices u and v. The edge e is also said to **connect** u and v. The vertices u and v are called **endpoints** of the edge {u, v}.) [2]

เพื่อเก็บ ทางเดิน (track) ของด้าน ซึ่งตกกระทบด้วย หนึ่งจุด ว่ามีจำนวนเท่าใด มีบทนิยามดังนี้

บทนิยาม 2 องศา หรือ ดีกรี ของ จุด ในกราฟแบบไม่มีทิศทาง หมายถึง จำนวนด้าน ซึ่งตกกระทบบน จุดนั้น ยกเว้น รูปบ่วง ที่หนึ่งจุด ซึ่ง จะทำให้ องศาเป็นสองเท่า ของ จุด องศาของจุด v ใช้สัญลักษณ์ deg(v)

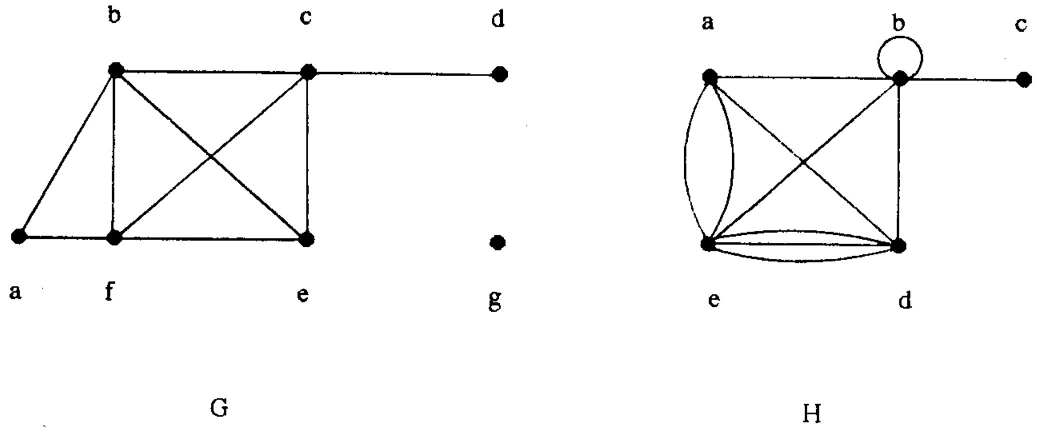
(The **degree** of a vertex in an undirected graph is the number of edges incident with it, except that a loop at a vertext contributes twice to the degree of that vertex. The degree of the vertex v is denoted by deg(v).) [3]

ตัวอย่าง 1 จงหา องศา ของ จุดต่างๆ ใน กราฟ G และ H ในรูปที่ 1

---

[2] Rosen, หน้า 417

[3] Rosen, หน้าเดียวกัน



รูปที่ 1 กราฟแบบไม่มีทิศทาง G และ H

ในกราฟ G

deg(a) = 2 , deg(e) = 3

deg(b) = 4, deg(f) = 4

deg(c) = 4 , deg(g) = 0

deg(d) = 1

ในกราฟ H

deg(a) = 4 , deg(d) = 5

deg(b) = 6, deg(e) = 6

deg(c) = 1

จุด ที่มีองศาเท่ากับ 0 เรียกว่า **จุดเอกเทศ** (isolated point) แสดงว่าจุดเอกเทศ จะไม่ประชิดกับจุดใดๆ ในตัวอย่าง 1 ในกราฟ G จุด g เป็นจุดเอกเทศ

จุดที่มี องศาเท่ากับ 1 เรียกว่า จุด pendant ดังนั้น จุด pendant จะประชิดกับอีกหนึ่งจุดเท่านั้น ตัวอย่างเช่น ในกราฟ G จุด d เป็นจุด pendant

เมื่อเราบอก องศา ของ จุดทั้งหมด ในกราฟ G = (V, E) จะได้อะไรบ้าง? จะเห็นว่า แต่ละด้านเกิดจาก สองจุด คือผลรวมขององศาของจุด เพราะว่า หนึ่งด้าน ตกกระทบบนสองจุดเท่านั้น สิ่งนี้ หมายความว่า ผลบวกรวมขององศาของจุด เป็นสองเท่าของจำนวนด้าน

ทฤษฎีบท 1 The Handshaking Theorem ให้ G = (V, E) เป็นกราฟแบบไม่มีทิศทาง ซึ่งมีจำนวน e ด้าน จะได้ว่า

$$2e = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

โปรดสังเกตว่า ทฤษฎีบทข้างต้นนี้ ประยุกต์ใช้ได้กับ กราฟที่มีหลายด้าน และ กราฟที่มีรูปบ่วงด้วย

ตัวอย่าง 2 ในกราฟที่มี 10 จุด แต่ละจุด มีองศาเท่ากับ 6 กราฟชุดนี้จะมีกี่ด้าน?

(How many edges are there in a graph with 10 vertices each of degree 6?)

ผลเฉลย เนื่องจาก ผลรวมขององศาของทุกจุดคือ 6*10 = 60 เพราะฉะนั้น จากทฤษฎีบท ข้างต้น

$$2e = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

$$\therefore \quad 2e = 60$$

$$e = 60/2 = 30$$ ด้าน

จากทฤษฎีบทที่ 1 แสดงให้เห็นว่า ผลรวมขององศาของจุดในกราฟแบบมีทิศทาง จะเป็นเลขคู่เสมอ

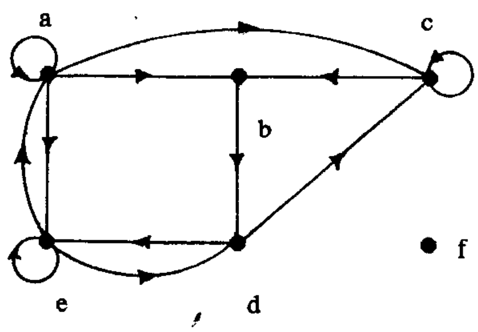
บทนิยาม 3 เมื่อคู่อันดับ (u, v) หมายถึง **ด้านแบบมีทิศทาง** ของกราฟ G เราเรียก u ว่าจุดประชิด กับ จุด v และเรียก จุด v ว่า **เป็นจุดประชิดจาก u** จุด u เรียกว่า **จุดแรก** (initial vertex) ของคู่อันดับ (u, v) และจุด v เรียกว่า **จุดปลาย หรือ จุดสุดท้าย** (terminal or end vertex) ของคู่อันดับ (u, v) จุดเริ่มต้น และ จุดสุดท้าย ของ รูปบ่วง จะเป็นจุดเดียวกัน

เนื่องจากด้านในกราฟแบบมีทิศทาง หมายถึงคู่อันดับ ดังนั้น บทนิยาม ของ องศาของจุด สามารถทำให้ละเอียดขึ้น เพื่อสะท้อน จำนวนด้าน กับ จุดนี้ ว่าเป็นจุดแรก หรือ จุดสุดท้าย

บทนิยาม 4 ในกราฟแบบมีทิศทาง อินดีกรี (indegree) ของจุด v ใช้สัญลักษณ์ $deg^-(v)$ หมายถึง จำนวนด้าน ที่มี v เป็นจุดปลาย ของด้านเหล่านี้ ส่วน เอ้าดีกรี (outdegree) ของ จุด v ใช้สัญลักษณ์ $deg^+(v)$ หมายถึง จำนวนด้าน โดยที่มี v เป็นจุดแรกของด้านเหล่านี้

(โปรดสังเกตว่า รูปบ่วง ของ หนึ่งจุด จะมีอินดีกรี และ เอ้าดีกรี เท่ากับ 1 ทั้งคู่)

ตัวอย่าง 3 จงหา อินดีกรี และเอ้าดีกรี ของทุกจุดในกราฟ G แบบมีทิศทาง ข้างล่างนี้



รูปที่ 2 ไดกราฟ G

ผลเฉลย

	a	b	c	d	e	f
อินดีกรี	2	2	3	2	3	0
เอ้าดีกรี	4	1	2	2	3	0

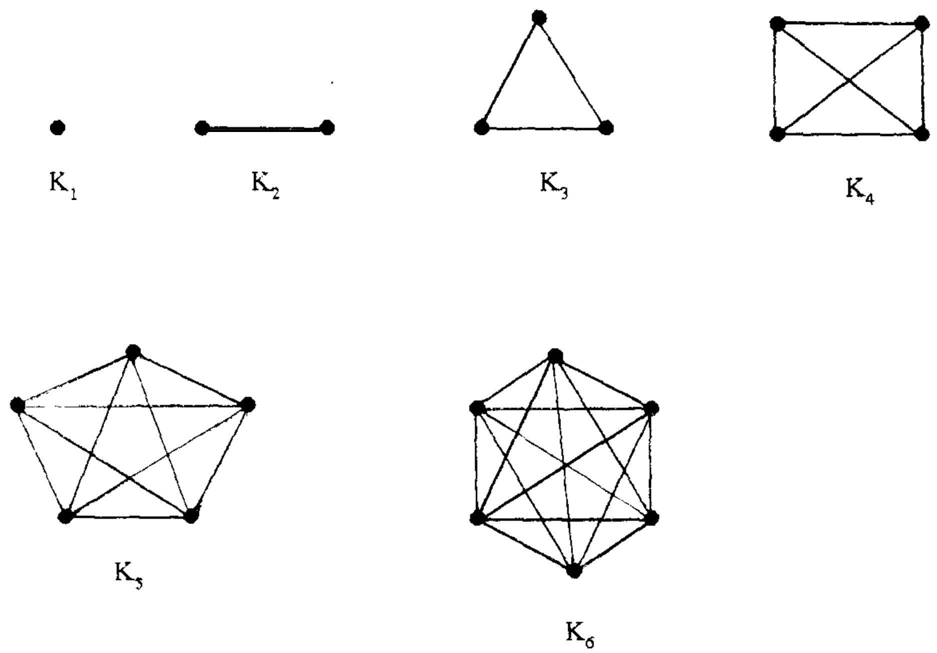
เนื่องจาก หนึ่งด้าน มี จุดแรก หนึ่งจุด และ มีจุดปลาย หนึ่งจุด ดังนั้น ผลรวมของ อินดีกรี และ ผลรวมของ เอ้าดีกรี ของ จุดทั้งหมด ในกราฟแบบมีทิศทาง จะเท่ากันเสมอ และ เลขตัวนี้ คือ จำนวนด้านของกราฟรูปนั้น

กราฟเชิงเดียวชนิดพิเศษ

(Some special simple graphs)

กราฟเชิงเดี่ยว มีหลายชนิด กราฟเหล่านี้ บ่อยครั้งนำมาใช้เป็นตัวอย่าง และเกิดขึ้นในงานประยุกต์จำนวนมาก

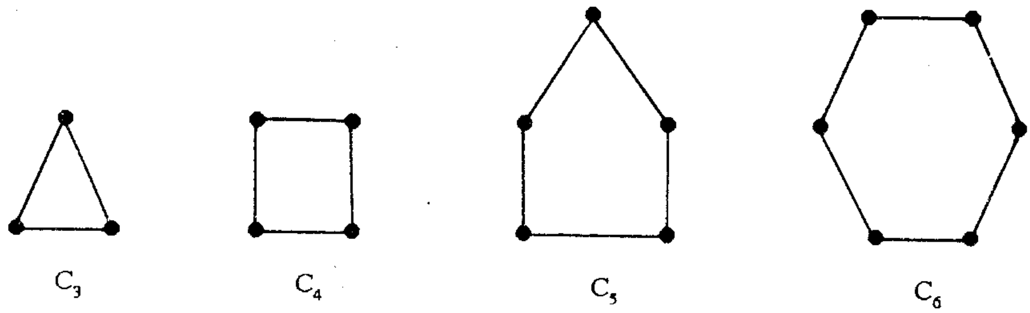
ตัวอย่าง 4 กราฟบริบูรณ์ (Complete graph) กราฟบริบูรณ์ บน n จุด ใช้สัญลักษณ์ K_n หมายถึงกราฟเชิงเดียว ซึ่งระหว่าง แต่ละคู่ของ จุดที่แตกต่างกัน มีเพียงหนึ่งด้านเท่านั้น กราฟ K_n สำหรับ n = 1, 2, 3, 4, 5, 6 แสดงให้เห็นในรูปที่ 3



รูปที่ 3 กราฟ K_n , $1 \le n \le 6$

ตัวอย่าง 5 วัฏจักร (Cycle)

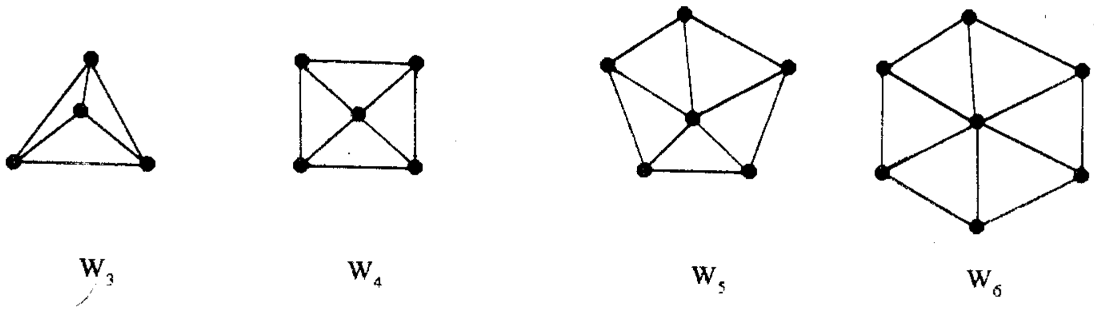
วัฏจักร C_n , $n \ge 3$ ประกอบด้วย n จุด คือ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ และ ด้าน $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}$ และ $\{v_n, v_1\}$ วัฏจักร C_3, C_4, C_5 และ C_6 แสดงให้เห็นในรูปที่ 4



รูปที่ 4 วัฏจักร C_3, C_4, C_5 และ C_6

ตัวอย่าง 6 ล้อ (Wheels)

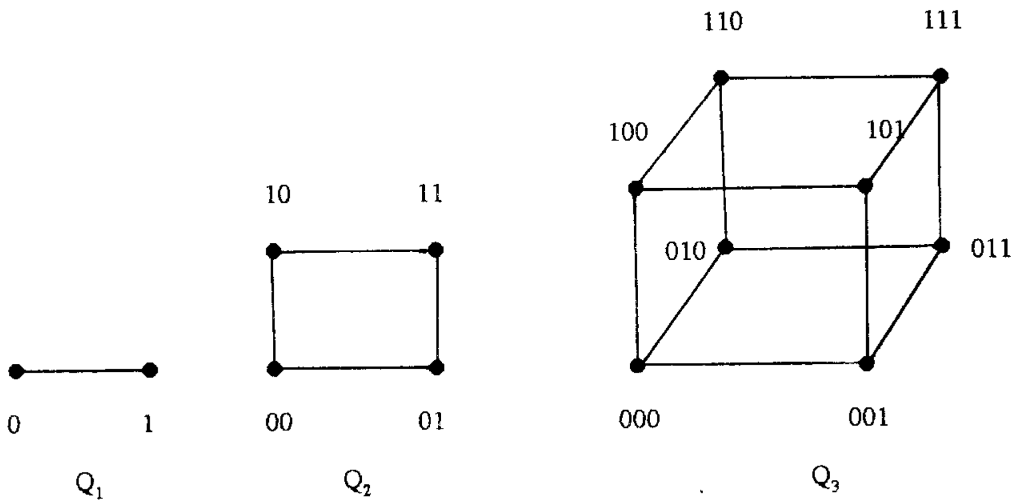
เราจะได้ล้อ W_n เมื่อเราใส่ หนึ่งจุดเพิ่มในวัฏจักร C_n สำหรับ $n \geq 3$ และต่อจุดใหม่นี้กับ ทุก n จุด ใน C_n ด้วยด้านใหม่ ล้อ W_3, W_4, W_5 และ W_6 แสดงให้เห็นในรูปที่ 5



รูปที่ 5 ล้อ W_3, W_4, W_5 และ W_6

ตัวอย่าง 7 n-ลูกบาศก์ (n - Cubes)

n-cube ใช้สัญลักษณ์ Q_n หมายถึงกราฟ ซึ่งมี จุดต่างๆ แทนสายบิต 2^n ของความยาว n จุดสองจุด จะเป็นจุดประชิดกัน ก็ต่อเมื่อ สายบิต ซึ่งแทนสองจุดนั้น แตกต่างกัน หนึ่งบิต เท่านั้น กราฟ Q_1, Q_2 และ Q_3 แสดงให้เห็นในรูปที่ 6



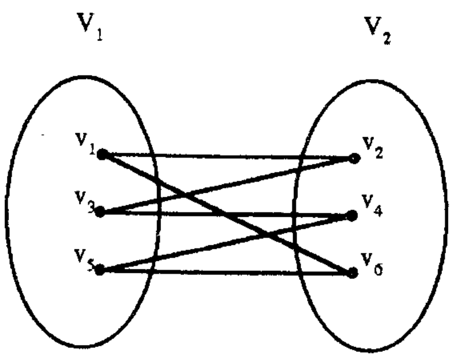
รูปที่ 6 n-cube Q_n สำหรับ n = 1, 2 และ 3

กราฟสองส่วน (Bipartite Graphs)

บางครั้ง กราฟหนึ่งชุด มีคุณสมบัติว่า เซตจุดของมันสามารถแบ่งออกเป็น เซตย่อยต่างสมาชิกกันได้ สองชุด โดยที่ แต่ละด้าน ต่อ หนึ่งจุด ใน หนึ่ง เซตย่อย กับ อีกหนึ่งจุด ใน อีกหนึ่งเซตย่อย ตัวอย่างเช่น จงพิจารณา กราฟซึ่งแทนการแต่งงาน ระหว่าง ประชากร ใน หมู่บ้านแห่งหนึ่ง ซึ่งประชากร แต่ละคน แทนหนึ่งจุด และการแต่งงาน แทนด้วยหนึ่งด้าน ในกราฟนี้ แต่ละด้าน ต่อ หนึ่งจุด ใน เซตย่อย ของ จุดต่างๆ ซึ่งแทน ประชากรชาย และ อีกจุดหนึ่ง ในเซตย่อย ซึ่งแทน ประชากรหญิง

บทนิยาม 5 กราฟเชิงเดียว G เรียกว่า **กราฟสองส่วน** (bipartite) ถ้า เซต V ของจุดของมันสามารถแบ่งออกเป็นเซตไม่ว่างต่างสมาชิกกัน สองชุด คือ V_1 และ V_2 โดยที่ แต่ละด้าน ในกราฟ ต่อ หนึ่งจุด ใน V_1 และ อีกหนึ่งจุด ใน V_2 (ดังนั้น จึงไม่มีด้านใดๆ ใน G ต่อ จุดสองจุดใน V_1 หรือ ต่อ จุดสองจุด ใน V_2)

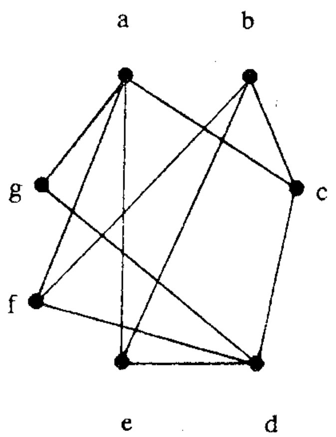
ตัวอย่าง 8 จากรูปที่ 7 แสดงให้เห็นว่า C_6 เป็นกราฟสองส่วน เพราะว่า เซตของจุดของมันสามารถแบ่งออกเป็นสองเซต $V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$ และ $V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$ และทุกด้าน ของ C_6 ต่อ หนึ่งจุด ใน V_1 และ หนึ่งจุด ใน V_2



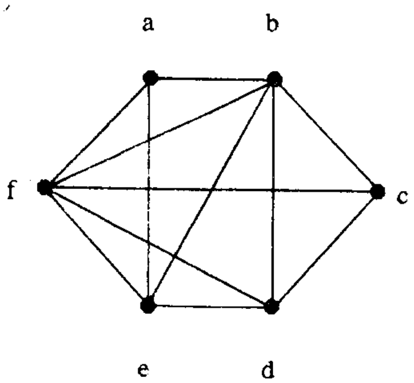
รูปที่ 7 แสดงให้เห็นว่า C_6 เป็นกราฟสองส่วน

ตัวอย่าง 9 K_3 ไม่ใช่กราฟสองส่วน เพราะว่าถ้าเราแบ่ง เซตจุดของ K_3 ออกเป็น เซตต่างสมาชิกสองชุด เซตชุดหนึ่งใน เซตสองชุดนั้น จะต้องมีสองจุด ถ้าเป็นกราฟสองส่วน สองจุดนี้ ไม่สามารถต่อกันด้วย หนึ่งด้าน แต่ใน K_3 ทุกจุด ต่อกับ จุดอื่นทุกจุด ด้วยหนึ่งด้าน

ตัวอย่าง 10 กราฟ G และ H ในรูปที่ 8 เป็นกราฟสองส่วนหรือไม่?



กราฟ G



กราฟ H

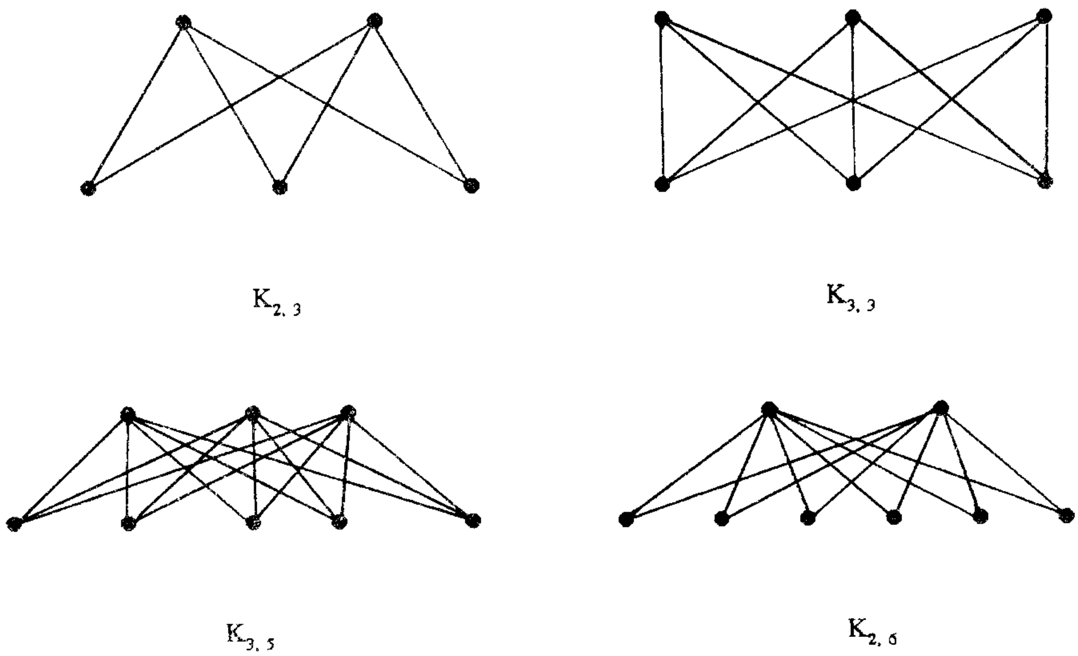
ผลเฉลย

กราฟ G เป็นกราฟสองส่วน เพราะว่า เซตจุดของมัน คือผลผนวกของเซตต่างสมาชิกสองชุด คือ {a, b, d} และ {c, e, f, g} และแต่ละด้าน ต่อ หนึ่งจุด ในเซตย่อยนี้ กับ อีกหนึ่ง

จุด ในเซตย่อย อีกหนึ่งชุด (โปรดสังเกตว่า สำหรับ กราฟ G ซึ่งเป็นกราฟสองส่วน ไม่จำเป็นที่ทุกจุด ใน {a, b, d} ต้องเป็น จุดประชิดกับทุกจุด ใน {c, e, f, g}   ตัวอย่างเช่น จุด b และ g ไม่ใช่จุดประชิดกัน

กราฟ H ไม่ใช่กราฟสองส่วน เพราะว่า เซตจุดของมัน ไม่สามารถแบ่งออกเป็น เซตย่อยสองชุด เพื่อให้ ด้าน ไม่ต้อง ต่อ สองจุด จากเซตย่อยเดียวกัน ให้ตรวจทานโดยพิจารณา จุด a, b และ f

ตัวอย่าง 11 **กราฟสองส่วนบริบูรณ์** (Complete Bipartite Graphs) กราฟสองส่วนบริบูรณ์ $K_{m,n}$ หมายถึง กราฟ ซึ่ง เซตจุด ของมัน แบ่งเป็น เซตย่อยสองชุด ของ m จุด และ n จุด ตามลำดับ มีหนึ่งด้าน ระหว่าง สองจุด ก็ต่อเมื่อ หนึ่งจุดอยู่ในเซตย่อยชุดแรก และอีกหนึ่งจุด อยู่ในเซตย่อย ชุดที่สอง   ตัวอย่าง กราฟสองส่วน บริบูรณ์ $K_{2,3}$, $K_{3,3}$, $K_{3,5}$ และ $K_{2,6}$ แสดงให้เห็นในรูปที่ 9

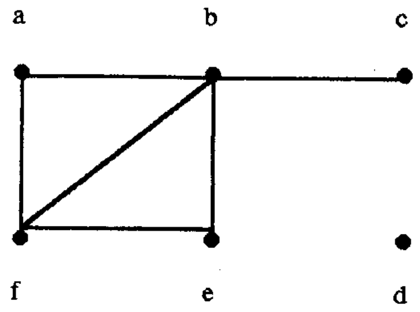


รูปที่ 9 กราฟสองส่วนบริบูรณ์

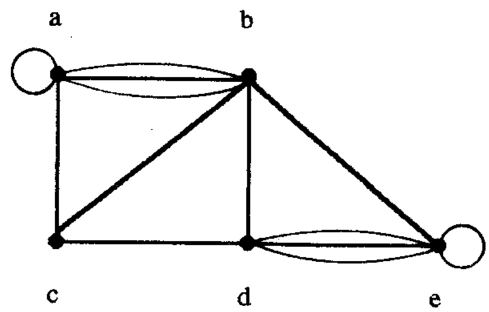
แบบฝึกหัด 6.2

ในแบบฝึกหัด ข้อ 1 - ข้อ 3 จงหา จำนวนจุด จำนวนด้าน และดีกรี ของทุกจุด ในกราฟแบบไม่มีทิศทางที่กำหนดให้ และมีจุดใด เป็น จุดเอกเทศ (isolated vertices) และจุดใด เป็น จุด pendant?

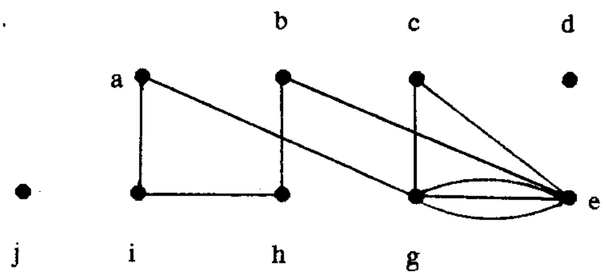
1.



2.



3.

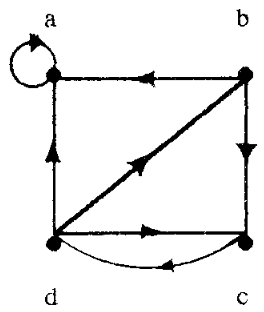


4. จงหาผลบวก ของ ดีกรี ของ จุดต่างๆ ใน กราฟแต่ละชุด ในข้อ 1 - ข้อ 3 และตรวจสอบให้เห็นว่า มันเท่ากับ สองเท่า ของ จำนวนด้าน ในกราฟ

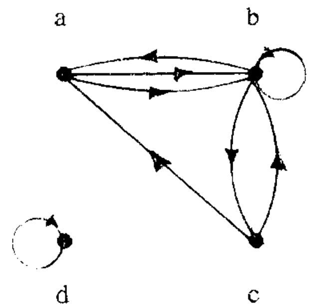
5. กราฟเชิงเดียว ซึ่งมี 15 จุด แต่ละจุด จะมีองศาเท่ากับ 5 มีหรือไม่?
   (Can a simple graph exist with 15 vertices each of degree 5?)

ในแบบฝึกหัดข้อ 6 - ข้อ 8 จงคำนวณหา จำนวน จุด จำนวนด้าน และจงหา อินดีกรี และเอ้าดีกรี ของแต่ละจุด สำหรับ กราฟหลายเส้น แบบมีทิศทางที่กำหนดให้

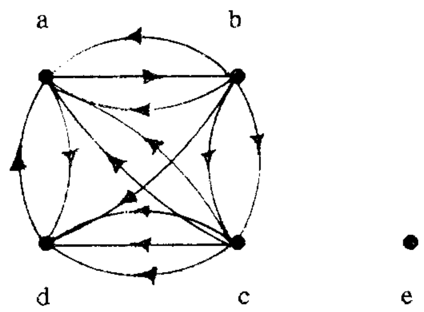
6.



7.



8.



9. สำหรับ กราฟแต่ละชุด ในข้อ 6 - ข้อ 8 จงคำนวณหา ผลบวก ของ อินดีกรี ของ จุด และ ผลบวก ของ เอ้าดีกรี ของ จุด โดยตรง จงแสดงให้เห็นว่า ผลบวกนี้ เท่ากับ จำนวนด้านใน กราฟ

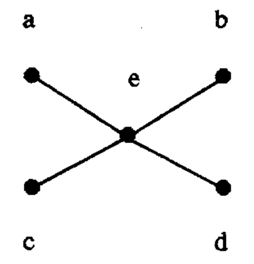
10. จงวาดรูปกราฟต่อไปนี้

a) K_7 b) $K_{1,8}$ c) $K_{4,4}$

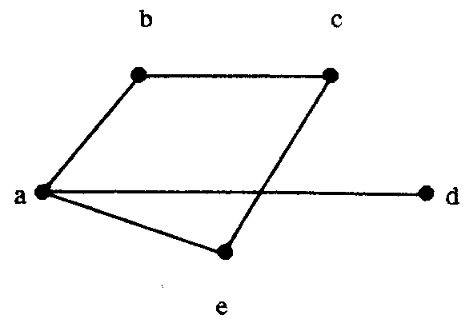
d) C_7 e) W_7 f) Q_4

ในแบบฝึกหัดข้อ 11 - ข้อ 15 จงบอกว่ากราฟนั้น เป็นกราฟสองส่วนหรือไม่?

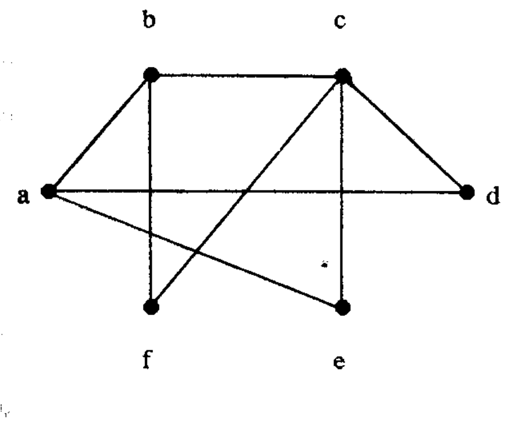
11.



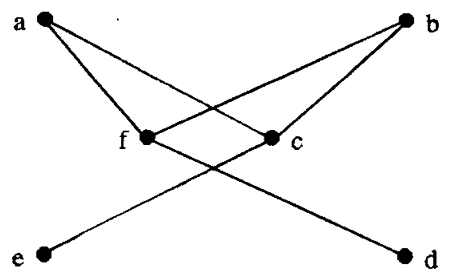
12.



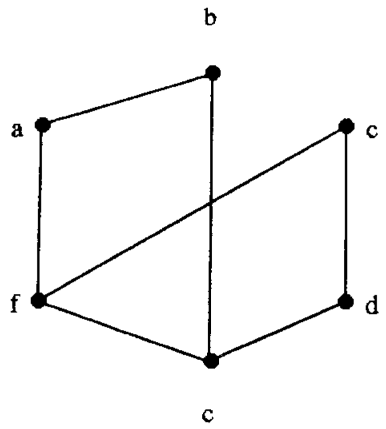
13.



14.



15.



6.3 การแทนที่กราฟ และกราฟถอดแบบกัน

(Representing Graphs and Graph Isomorphism)

มีวิธีที่เป็นประโยชน์จำนวนมาก เพื่อแทน กราฟ เช่นที่เราจะได้เห็นในหัวข้อนี้ ในการทำงานกับกราฟ มันเป็นสิ่งที่จะช่วยเหลือได้ เมื่อสามารถเลือก การแทนค่าที่ดีที่สุดของมัน

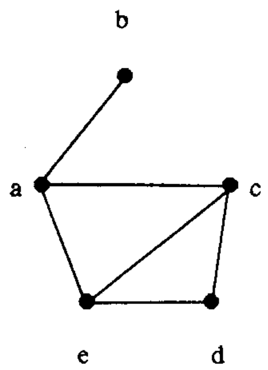
บางครั้ง กราฟสองชุด มี รูปแบบอย่างเดียวกัน ในแง่ที่ว่า มีการสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่ง ระหว่างเซตจุดของมัน ซึ่งคงไว้ซึ่งด้านต่างๆ ในกรณีเช่นนี้ เราพูดว่า กราฟสองชุดนี้ **ถอดแบบกัน** (isomorphic) ในการหาว่า กราฟสองชุด ถอบแบบกันหรือไม่ เป็น ปัญหาสำคัญ ของทฤษฎีกราฟ ซึ่งเราจะได้ศึกษาต่อไป

การแทนที่กราฟ (Representing Graphs)

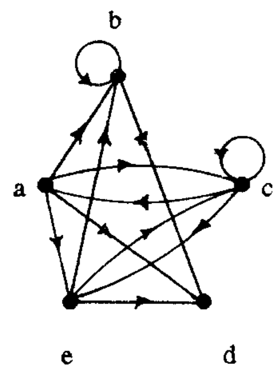
วิธีหนึ่งเพื่อแทน กราฟ ซึ่งไม่ใช่กราฟหลายเส้น คือ เขียนรายการด้านทั้งหมด ของกราฟนี้ อีกวิธีหนึ่ง คือแทนกราฟ ซึ่งไม่ใช่กราฟหลายเส้น คือการใช้**รายการประชิด** (adjacency lists) ซึ่ง ระบุ จุดต่างๆ ซึ่งเป็นจุดประชิด กับ แต่ละจุด ของกราฟ

ตัวอย่าง 1 จงใช้รายการประชิด เพื่ออธิบาย กราฟเชิงเดียว ที่กำหนดให้ในรูปที่ 1

ผลเฉลย ตารางที่ 1 แสดงรายชื่อ จุดต่างๆ ซึ่งประชิดกับ แต่ละจุดของกราฟ



รูปที่ 1 กราฟเชิงเดียว



รูปที่ 2 กราฟมีทิศทาง

ตารางที่ 1 รายชื่อด้าน สำหรับกราฟเชิงเดียว	
จุด	จุดประชิด (Adjacent vertices)
a	b, c, e
b	a
c	a, d, e
d	c, e
e	a, c, d

ตัวอย่าง 2 จงแทนกราฟ มีทิศทางในรูปที่ 2 ด้วยรายการ ชื่อทั้งหมด ของจุด ซึ่งเป็นจุดปลาย ของด้านต่างๆ เริ่มต้นด้วย แต่ละจุด ของกราฟ

ผลเฉลย ตารางที่ 2 แทนกราฟมีทิศทาง ของรูปที่ 2

ตารางที่ 2 รายชื่อด้าน สำหรับกราฟมีทิศทาง	
จุด	จุดปลาย (Terminal vertices)
a	b, c, d, e
b	b, d
c	a, c, e
d	
e	b, c, d

เมทริกซ์ประชิด (Adjacency Matrices)

การแก้ปัญหาของอัลกอริทึมกราฟ ใช้การแทนที่ของกราฟ ด้วยการ เขียนรายการชื่อด้านต่างๆ หรือ โดยรายการประชิด ยุ่งยาก ถ้าในกราฟมีด้านจำนวนมาก เพื่อทำให้การคำนวณง่ายขึ้น กราฟ ถูกแทนที่ โดยใช้เมทริกซ์ มีเมทริกซ์สองชนิดซึ่งใช้ร่วมกัน เมื่อแทน กราฟ เมทริกซ์ชนิดที่หนึ่ง ขึ้นอยู่กับ การประชิดของจุด และเมทริกซ์อีกชนิดหนึ่ง ขึ้นอยู่กับ การตกกระทบของ จุดและด้าน

สมมติให้ $G = (V, E)$ คือกราฟเชิงเดียว เมื่อ $|V| = n$ และ จุดต่างๆ ของ G มีรายชื่อเรียงกัน ดังนี้ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ **เมทริกซ์ประชิด** (adjacency marix) A หรือ A_G ของกราฟ G ซึ่งมีรายชื่อของจุดต่างๆ นี้ หมายถึง เมทริกซ์ ศูนย์-หนึ่ง ขนาด $n \times n$ มี 1 เป็น สมาชิกตัวที่ (i, j) ของมัน เมื่อ v_i และ v_j เป็นจุดประชิด และมี 0 เป็น สมาชิกตัวที่ (i, j) เมื่อ v_i และ v_j ไม่ใช่จุดประชิด พูดอีกอย่างหนึ่งคือ ถ้าเมทริกซ์ประชิด คือ $A = [a_{ij}]$ ดังนั้น

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } \{v_i, v_j\} \text{ เป็นด้านของ } G \\ 0 & \text{กรณีอื่นๆ} \end{cases}$$

โปรดสังเกตว่า เมทริกซ์ประชิด ของ กราฟ ขึ้นอยู่กับ การเลือกการเรียงอันดับ ของจุดต่างๆ ดังนั้น กราฟที่มี n จุด จึงมี เมทริกซ์ประชิดที่แตกต่างกัน n! ชุด เพราะว่า การเรียงอันดับของ n จุด มีจำนวน n! วิธีที่แตกต่างกัน

เมทริกซ์ประชิด ของ กราฟเชิงเดียว เป็นเมทริกซ์สมมาตร นั่นคือ $a_{ij} = a_{ji}$ เพราะว่า

สมาชิกทั้งคู่นี้ เป็น 1 เมื่อจุด v_i และ v_j เป็นจุดประชิด และกรณีอื่นๆ สมาชิกทั้งคู่ เป็น 0 นอกจากนี้แล้ว เพราะว่ากราฟเชิงเดียว ไม่มีรูปบ่วง สมาชิกทุกตัว a_{ii} , $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ จึงมีค่าเท่ากับ 0

ตัวอย่าง 3 จงหาเมทริกซ์ประชิด เพื่อแทน กราฟ ในรูปที่ 3

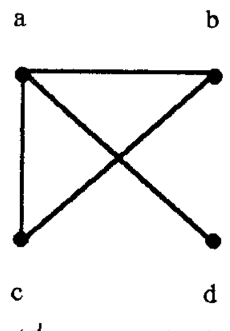
ผลเฉลย เราเรียงอันดับ จุด เป็น a, b, c, d เมทริกซ์ ซึ่งแทนกราฟนี้ คือ

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

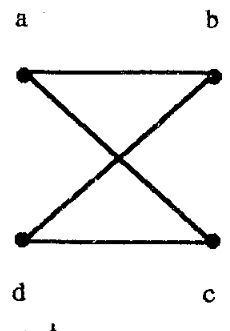
ตัวอย่าง 4 จงวาดรูปกราฟ ที่มีเมทริกซ์ประชิดข้างล่างนี้

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

การเรียงลำดับของจุด คือ a, b, c, d



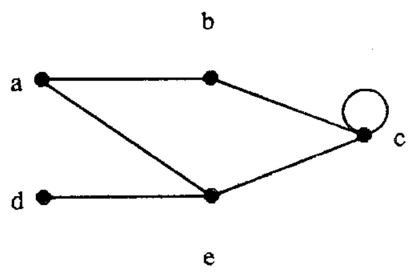
รูปที่ 3 กราฟเชิงเดียว



รูปที่ 4 กราฟ ซึ่งกำหนดเมทริกซ์ประชิดมาให้

ผลเฉลย กราฟที่มีเมทริกซ์ประชิดนี้ แสดงให้เห็นในรูปที่ 4

ตัวอย่าง 5 จงหาเมทริกซ์ประชิด ของกราฟเทียม ในรูปที่ 5



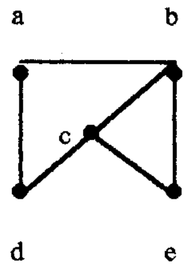
รูปที่ 5 pseudograph

ผลเฉลย สิ่งแรกเลือกการเรียงอันดับของจุด เช่น a, b, c, d, e จากนั้น ให้ชื่อแถว และ ชื่อสดมภ์ ของ เมทริกซ์ ด้วยจุดแบบมีอันดับ entry ในเมทริกซ์นี้ จะเป็น 1 ถ้าจุดแถว และจุดสดมภ์ ต่อกันด้วย หนึ่งด้าน และ entry นี้ จะเป็น 0 ในกรณีอื่นๆ ดังนั้น เมทริกซ์ประชิด ของกราฟข้างต้น คือ

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

โปรดสังเกตว่า เมทริกซ์ประชิด ยอมให้มี การแทนรูปบ่วง แต่ไม่ยอมให้มีด้านขนาน และถ้าเป็นกราฟเชิงเดียว การคำนวณหา องศา ของ จุด ได้โดยการบวก ข้อมูลในแต่ละ แถว หรือ บวกข้อมูล ในแต่ละสดมภ์ ของ เมทริกซ์ประชิด ชุดนั้น

ตัวอย่าง 6 ตัวอย่างของกราฟเชิงเดียว และ เมทริกซ์ประชิด



$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

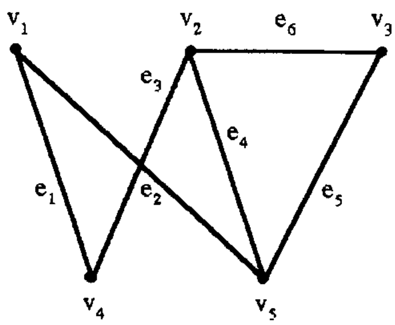
รูปที่ 6 กราฟเชิงเดียว และเมทริกซ์ประชิด

เมทริกซ์ตกกระทบ (Incidence Matrix)

อีกวิธีหนึ่ง ซึ่งใช้แทนกราฟ คือ การใช้ เมทริกซ์ตกกระทบ ให้ $G = (V, E)$ คือกราฟไม่มีทิศทาง สมมติว่า $v_1, v_2, \ldots, v_n$ เป็นจุดต่างๆ และ $e_1, e_2, \ldots, e_m$ เป็นด้านต่างๆ ของกราฟ G ดังนั้น เมทริกซ์ตกกระทบ กับ การเรียงอันดับ ของ V และ E เราให้ชื่อแถวด้วยจุด และให้ชื่อสดมภ์ด้วยด้าน หมายถึง เมทริกซ์ $M = [m_{ij}]$ ขนาด $n \times m$ เมื่อ

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อด้าน } e_j \text{ ตกกระทบบนจุด } v_i \\ 0 & \text{กรณีอื่นๆ} \end{cases}$$

ตัวอย่าง 7 จงแทน กราฟ ที่แสดงให้เห็น ในรูปที่ 7 ด้วยเมทริกซ์ตกกระทบ



รูปที่ 7 กราฟไม่มีทิศทาง

ผลเฉลย เมทริกซ์ตกกระทบ คือ

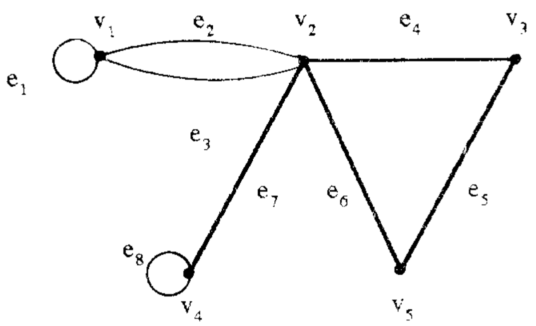
$$
\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

เมทริกซ์ตกกระทบ สามารถนำมาใช้แทน กราฟหลายเส้น และมีรูปบ่วงได้ กราฟหลายเส้น ถูกแทน ในเมทริกซ์ตกกระทบ โดยใช้ สดมภ์ ที่มี entries เหมือนกัน เพราะว่า ด้านเหล่านี้ ตกกระทบ กับ คู่เดียวกัน ของจุด

รูปบ่วง ถูกแทน โดยใช้สดมภ์ที่มี entry เท่ากับ 1 สมนัยกับ จุด ซึ่ง ตกกระทบ กับ รูปบ่วงนี้

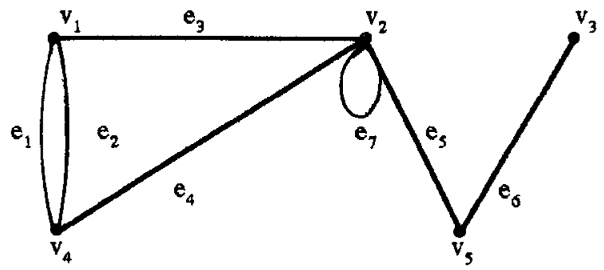
ตัวอย่าง 8 จงแทน pseudograph ที่แสดงในรูปที่ 8 โดยใช้ เมทริกซ์ตกกระทบ

$$
\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$



รูปที่ 8 Pseudograph

ตัวอย่าง 9 จงหาเมทริกซ์ตกกระทบของ กราฟ ข้างล่างนี้



รูปที่ 9

ผลเฉลย เราให้ชื่อแถวด้วยจุด และชื่อสดมภ์ด้วยด้าน entry สำหรับ แถว v_i และ สดมภ์ e_j จะเป็น 1 ถ้าด้าน e_j ตกกระทบด้วย จุด v_i และ entry ตัวนี้จะเป็น 0 กรณีอื่นๆ เพราะฉะนั้น เมทริกซ์ตกกระทบของ รูปที่ 9 คือ

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

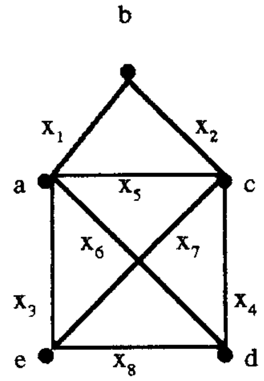
จะเห็นว่า สดมภ์ e_7 คือรูปบ่วง เมทริกซ์ตกกระทบ ทำให้สามารถแทนกราฟ ที่มีด้านขนาน และมีรูปบ่วงได้

โปรดสังเกตว่า สำหรับกราฟที่ไม่มีรูปบ่วง ทุกสดมภ์ จะมี 1's อยู่สองตัว และ ผลบวกของแต่ละแถวคือ องศาของจุดนั้น

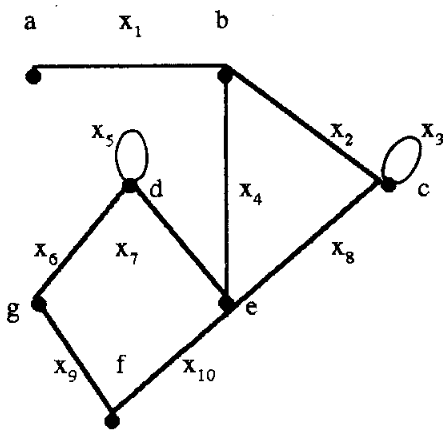
แบบฝึกหัด 6.3

ในแบบฝึกหัดข้อ 1 - 3 จงเขียนเมทริกซ์ประชิด (adjacency matrix) ของกราฟแต่ละภาพ

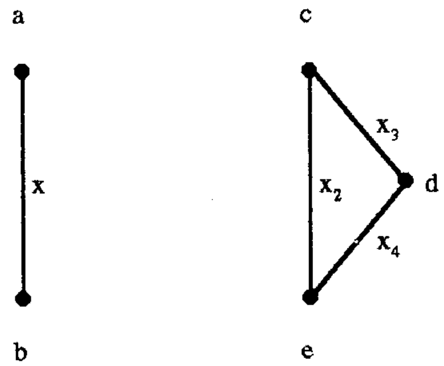
1.



2.



3.



ในแบบฝึกหัดข้อ 4-6 จงเขียนเมทริกซ์ตกกระทบ (incidence matrix) ของกราฟ แต่ละภาพ

4. กราฟ ของแบบฝึกหัด ข้อ 1
5. กราฟ ของแบบฝึกหัด ข้อ 2
6. กราฟ ของแบบฝึกหัด ข้อ 3

ในแบบฝึกหัดข้อ 7-9 จงวาดกราฟของเมทริกซ์ประชิดแต่ละชุด

7.

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

8.

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

9. เมทริกซ์ ขนาด 7 x 7 ซึ่ง entry ตัวที่ ij เป็น 1 ถ้า i + 1 หาร j + 1 ลงตัว หรือ j + 1 หาร i + 1 ลงตัว และ entry ตัวที่ ij เป็น 0 กรณีอื่นๆ

10. สำหรับ กราฟ ในแบบฝึกหัดข้อ 1-3 จงเขียนรายการลำดับด้าน ความยาว 3 ทั้งหมด จาก c ไป e

ในแบบฝึกหัดข้อ 11-12 จงวาดภาพ ซึ่งแทนด้วยเมทริกซ์ตกกระทบ

11.

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

12.

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

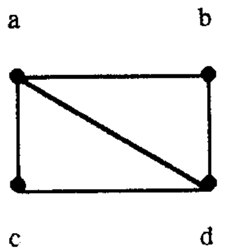
13. กราฟ จะมีรูปร่างอย่างไร ถ้ามีบางแถวของเมทริกซ์ตกกระทบของมัน มีแต่ 0's เท่านั้น

แบบฝึกหัดเสริม

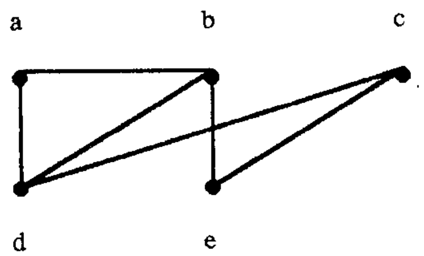
ในแบบฝึกหัดข้อ 1-4 จงใช้รายการประชิดเพื่อแทนกราฟที่กำหนดให้

(In Exercises 1-4 use an adjacency list to represent the given graph.)

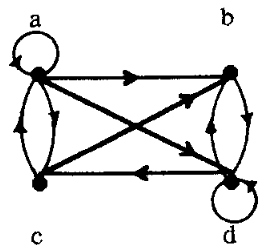
1.



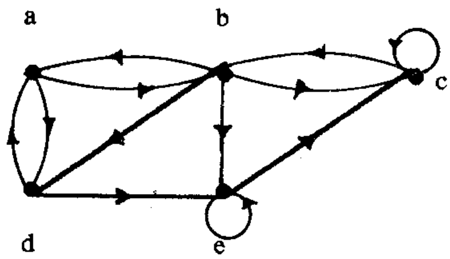
2.



3.



4.



5. จงแทนกราฟในแบบฝึกหัดข้อ 1 ด้วยเมทริกซ์ประชิด

(Represent the graph in Exercise 1 with an adjacency matrix.)

6. จงแทนกราฟ ในแบบฝึกหัด ข้อ 2 ด้วยเมทริกซ์ประชิด

7. จงแทนกราฟ ในแบบฝึกหัด ข้อ 3 ด้วยเมทริกซ์ประชิด

8. จงแทนกราฟ ในแบบฝึกหัด ข้อ 4 ด้วยเมทริกซ์ประชิด

ในแบบฝึกหัดข้อ 9 - ข้อ 11 จงวาดรูปกราฟที่กำหนดซึ่งกำหนดด้วยเมทริกซ์ประชิดข้างล่างนี้

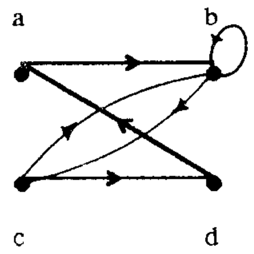
9. $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

10. $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

11. $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

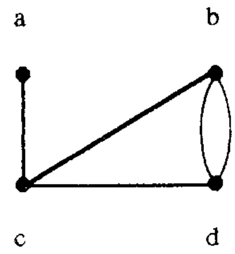
12. จงหาเมทริกซ์ประชิด ของ กราฟหลายเส้น แบบมีทิศทาง ข้างล่างนี้

(Find the adjacency matrix of the given directed multigraph.)

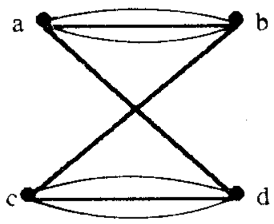


จงใช้เมทริกซ์ตกกระทบเพื่อแทนกราฟในแบบฝึกหัดข้อ 13 - ข้อ 15

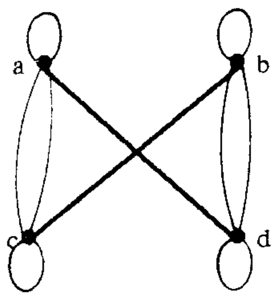
13.



14.



15.

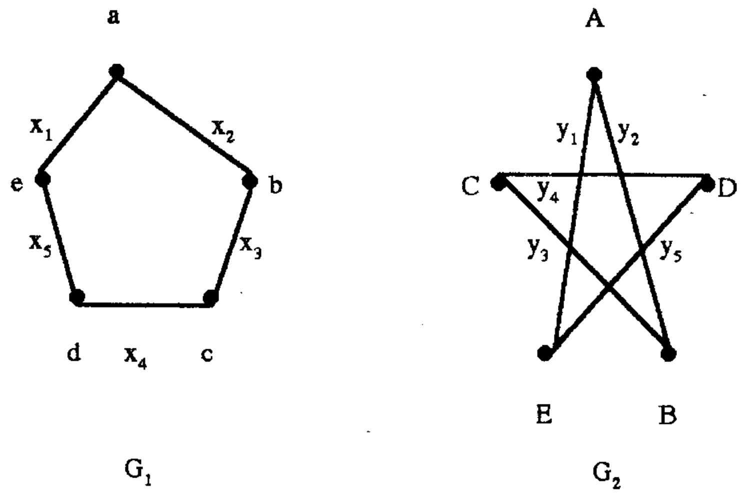


การถอดแบบกันของกราฟ (Isomorphism of Graphs)

บ่อยครั้ง ซึ่งเรา จำเป็นต้องทราบว่า เป็นไปได้หรือไม่ ที่จะวาดรูปกราฟสองรูป ในวิธีเดียวกัน ตัวอย่างเช่น ในวิชาเคมี กราฟถูกนำมาใช้เป็นตัวแบบให้กับ สารประกอบ (compounds)

สารประกอบ แตกต่างกัน สามารถมี สูตรโมเลกุล เหมือนกัน แต่มี โครงสร้างแตกต่างกัน สารประกอบเช่นนี้ จะถูกแทนด้วยกราฟ ซึ่งไม่สามารถวาดรูป ในวิธีเดียวกัน กราฟ ซึ่งแทน สารประกอบ ซึ่งรู้จักแล้วก่อนหน้านี้ สามารถนำมาใช้ บอกว่า สารประกอบตัวใหม่ ได้มีการศึกษามาก่อนหน้านี้ หรือไม่

ให้คนสองคน ซึ่งมองไม่เห็น กระดาษของกันและกัน ทำตามคำสั่งต่อไปนี้ : จงวาดภาพ ซึ่งมีจุด 5 จุด ชื่อ a, b, c, d และ e ต่อจุด a และ b, ต่อจุด b และ c, ต่อจุด c และ d, ต่อจุด d และ e กราฟที่ได้แสดงในรูปที่ 10



รูปที่ 10

ภาพสองรูปนี้ เป็นกราฟเดียวกัน ถึงแม้ว่า จะไม่เหมือนกัน กราฟเช่นนี้ เรียกว่า **ถอดแบบกัน** (isomorphic)

บทนิยาม 1 กราฟ G_1 และ G_2 **เป็นถอดแบบกัน** (isomorphic) ถ้ามีฟังก์ชัน f แบบหนึ่งต่อหนึ่ง และไปทั่วถึง จากจุด ของ G_1 ไปยังจุด ของ G_2 และมีฟังก์ชัน g แบบ หนึ่งต่อหนึ่ง และไปทั่วถึง จากด้านของ G_1 ไปยังด้านของ G_2 ดังนั้น ด้าน e ตกกระทบ บน v และ w ก็ต่อเมื่อ ด้าน g(e) ตกกระทบ บน f(v) และ f(w) ใน G_2 คู่ของฟังก์ชัน f และ g เรียกว่า **ฟังก์ชันถอดแบบ** (isomorphism)

ตัวอย่าง 10 ฟังก์ชันถอดแบบ สำหรับกราฟ G_1 และ G_2 ของรูปที่ 10 นิยามดังนี้

$f(a) = A, f(b) = B, f(c) = C, f(d) = D, f(e) = E$

$g(x_i) = y_i \; ; \; i = 1, \ldots, 5$

จากบทนิยาม 1 ถ้ากราฟ G_1 และ G_2 ถอดแบบกัน ฟังก์ชัน f คู่ จุด ใน G_1 กับ จุด ใน G_2 และฟังก์ชัน g คู่ด้านใน G_1 กับด้านใน G_2 ในวิธีซึ่งตกกระทบ จะได้ว่า ถ้ากราฟถอดแบบกัน สำหรับ การเรียงอันดับของจุด และด้าน มันจะมีเมทริกซ์ตกกระทบเหมือนกัน ทั้งนี้ บทกลับ (converse) เป็นจริงด้วยเช่นกัน

ทฤษฎีบท 1 กราฟ G_1 และ G_2 จะเป็นกราฟถอดแบบกัน ก็ต่อเมื่อ สำหรับ การเรียงอันดับบางอย่าง ของจุดและด้าน ทำให้ เมทริกซ์ตกกระทบของกราฟสองชุดนี้ เหมือนกัน
(Graphs G_1 and G_2 are isomorphic if and only if, for some ordering of the vertices and edges, their incidence matrices are identicals.)

ตัวอย่าง 11 เมทริกซ์ตกกระทบของกราฟ G_1 ของรูปที่ 10 สัมพันธ์กับการเรียงอันดับ a, b, c, d, e และ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 คือ

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

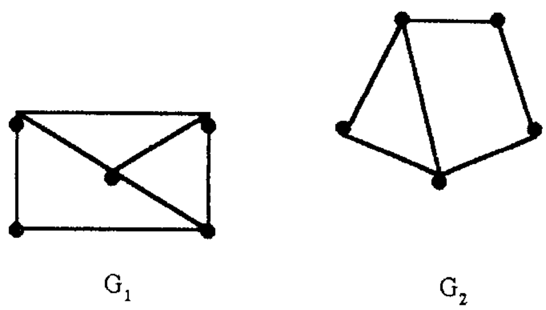
จากทฤษฎีบท 1 กราฟ G_1 และ G_2 ถอดแบบกัน

ปัญหาที่น่าสนใจคือ การหาว่า กราฟสองรูป ถอดแบบกันหรือไม่ วิธีหนึ่ง ในการแสดงว่า กราฟ สองรูป G_1 และ G_2 ไม่ถอดแบบกัน คือหาคุณสมบัติอย่างหนึ่ง ซึ่ง กราฟถอดแบบกันต้องมีอยู่ แต่ G_1 และ G_2 ไม่มีคุณสมบัตินี้ คุณสมบัตินั้นคือ การสงวนไว้ภายใต้ ฟังก์ชันถอดแบบของกราฟ เรียกว่า **ตัวยืนยง** (invariant)

(A property that is preserved under a graph isomorphism is called an **invariant**.)

จากบทนิยาม 1 ถ้ากราฟ G_1 และ G_2 ถอดแบบกัน จะมีฟังก์ชัน แบบหนึ่งต่อหนึ่ง และไปทั่วถึงจาก ด้าน(จุด) ของ G_1 ไปยัง ด้าน(จุด) ของ G_2 ดังนั้น ถ้า G_1 และ G_2 ถอดแบบกัน แล้ว G_1 และ G_2 จะมีจำนวนด้านเท่ากัน จำนวนจุดเท่ากัน เพราะฉะนั้น ถ้า e และ n เป็นจำนวนเต็ม ไม่ใช่ค่าลบ คุณสมบัติ "มี e ด้าน" และ "มี n จุด" เป็น ตัวยืนยง

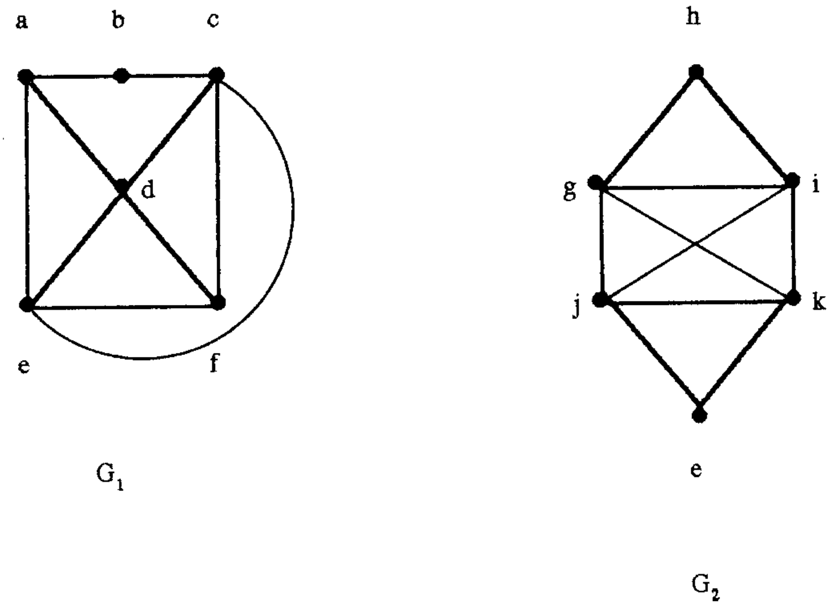
ตัวอย่าง 12



รูปที่ 11

กราฟ G_1 และ G_2 ในรูปที่ 11 ไม่ใช่กราฟถอดแบบกัน เพราะว่า G_1 มีเจ็ดด้าน และ G_2 มีหกด้าน และ "มีเจ็ดด้าน" เป็นตัวยืนยง

ตัวอย่าง 13 เพราะว่า "มีจุด ซึ่งมีองศา เท่ากับ 3" เป็นตัวยืนยง กราฟ G_1 และ G_2 ของรูปที่ 12 ไม่ใช่ถอดแบบกัน : กราฟ G_1 มี จุด (a และ f) ซึ่งองศา เท่ากับ 3 แต่กราฟ G_2 ไม่มีจุด ซึ่งมีองศาเป็น 3 โปรดสังเกตว่า G_1 และ G_2 มี จำนวนด้าน 10 ด้าน และจำนวนจุด หกจุด เท่ากัน

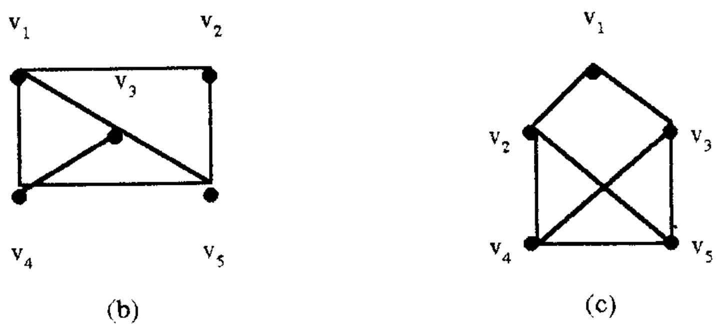


รูปที่ 12

ตัวยืนยง อีกชนิดหนึ่ง ซึ่งมี ประโยชน์ คือ "มีวงจรเชิงเดียว ความยาว เท่ากับ k"

ตัวอย่าง 14 จงหาเมทริกซ์ของกราฟรูปที่ 13 กราฟสองรูปนี้ถอดแบบกันหรือไม่?

(Write matrices for the graphs in Figure 13. Are the graphs isomorphic?)



รูปที่ 13

คำตอบ ใช่ กราฟสองรูปนี้ถอดแบบกัน

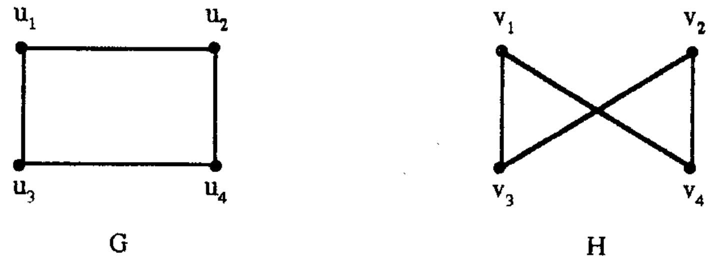
มีการใช้ศัพท์ (terminology) ซึ่งเป็นประโยชน์ สำหรับ กราฟ ที่มีโครงสร้างเหมือนกัน

บทนิยาม 2 กราฟเชิงเดียว $G_1 = (V_1, E_1)$ และ $G_2 = (V_2, E_2)$ เป็น**กราฟถอดแบบกัน** (isomorphic) ถ้ามีฟังก์ชัน แบบหนึ่งต่อหนึ่งและไปทั่วถึง f จาก V_1 ไป V_2 ด้วยคุณสมบัติว่า a และ b เป็นจุด

ประชิด ใน G_1 ก็ต่อเมื่อ f(a) และ f(b) เป็นจุดประชิด ใน G_2 สำหรับทุก จุด a และจุด b ใน V_1 ฟังก์ชัน f เช่นนี้ เรียกว่า **ถอดแบบกัน** (isomorphism)

พูดอีกอย่างหนึ่งคือ เมื่อกราฟเชิงเดียว สองชุด ถอดแบบกัน จะมี การสมนัย แบบหนึ่งต่อหนึ่ง ระหว่างจุดต่างๆ ของกราฟสองชุด ซึ่งรักษา ความสัมพันธ์ แบบประชิดกัน

ตัวอย่าง 15 จงแสดงให้เห็นว่า กราฟ G = (V, E) และ H = (W, F) ในรูปที่ 14 เป็นกราฟถอดแบบกัน



รูปที่ 14 กราฟ G และH

ผลเฉลย ฟังก์ชัน f ซึ่ง $f(u_1) = v_1$

$f(u_2) = v_4$

$f(u_3) = v_3$

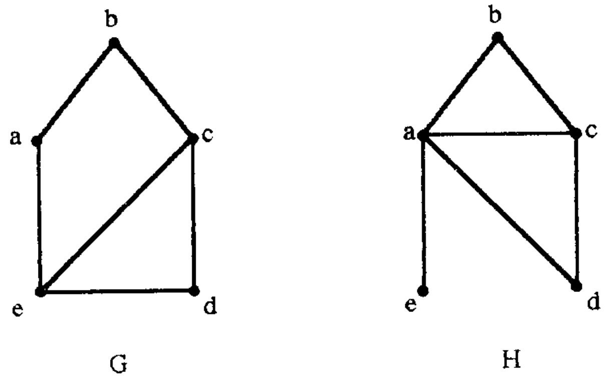
และ $f(u_4) = v_2$

เป็นฟังก์ชัน แบบหนึ่งต่อหนึ่ง สมนัยกัน ระหว่าง V และ W จะเห็นว่าการสมนัยนี้ รักษาการประชิด โปรดสังเกตว่า จุดประชิดใน G คือ u_1 และ u_2, u_1 และ u_3, u_2 และ u_4, u_3 และ u_4 โดยที่ แต่ละคู่ $f(u_1) = v_1$ และ $f(u_2) = v_4$, $f(u_1) = v_1$ และ $f(u_3) = v_3$, $f(u_2) = v_4$ และ $f(u_4) = v_2$, $f(u_3) = v_3$ และ $f(u_4) = v_2$ เป็นจุดประชิดกัน ใน H

บ่อยครั้ง เป็นการยากที่จะบอกว่า กราฟเชิงเดียว สองชุด เป็นกราฟถอดแบบกันหรือไม่ เพราะว่า กราฟเชิงเดียวสองชุดที่มี n จุด จะมีการสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่งที่เป็นไปได้ถึง n! วิธี

อย่างไรก็ตาม มีคุณสมบัติอย่างหนึ่ง ซึ่งเรียกว่า ตัวยืนยง(invariant) ซึ่งเกี่ยวกับ การถอดแบบกัน ของกราฟเชิงเดียว ตัวอย่างเช่น กราฟเชิงเดียวถอดแบบกัน ต้องมี จำนวนจุดเท่ากัน ต้องมี จำนวนด้านเท่ากัน และดีกรีของจุด ต้องเท่ากัน นั่นคือ จุด v มีดีกรี เท่ากับ d ในกราฟ G ต้องสมนัยกับ จุด f(v) มีดีกรี เท่ากับ d ในกราฟ H เนื่องจาก จุด w ใน G ประชิดกับจุด v ก็ต่อเมื่อ f(v) และ f(w) เป็นจุดประชิดกัน ใน H

ตัวอย่าง 16 จงแสดงให้เห็นว่า กราฟในรูปที่ 15 ไม่ใช่กราฟถอดแบบกัน

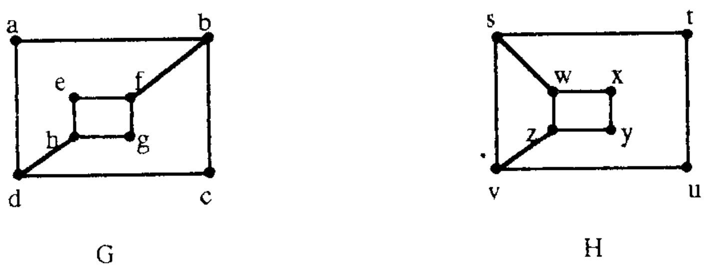


รูปที่ 15 กราฟ G และ H

ผลเฉลย กราฟ G และ H มี ห้าจุด และ หกด้าน เหมือนกัน อย่างไรก็ตามในกราฟ H จุด e มีดีกรี เท่ากับ 1 ในขณะที่ กราฟ G ไม่มีจุดใดเลยที่มี ดีกรีเท่ากับ 1 ดังนั้น G และ H ไม่ใช่กราฟถอดแบบกัน

จำนวนจุด จำนวนด้าน และดีกรี ของจุด คือคุณสมบัติทั้งหมดของการถอดแบบกัน ถ้าคุณสมบัติเหล่านี้ แตกต่างกัน ในกราฟ สองชุด กราฟเหล่านี้ จะไม่ใช่กราฟถอดแบบกัน อย่างไรก็ตาม กราฟสองชุดเมื่อมีคุณสมบัติเหมือนกัน ไม่จำเป็นว่า จะต้องเป็นกราฟถอดแบบกัน

ตัวอย่าง 17 จงหาว่า กราฟในรูปที่ 16 เป็นกราฟถอดแบบกันหรือไม่?



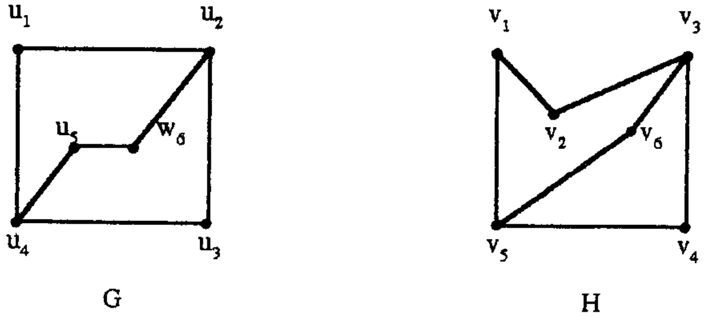
รูปที่ 16 กราฟ G และ H

ผลเฉลย กราฟ G และ H ทั้งคู่มี แปดจุด สิบด้าน เหมือนกัน สี่จุด มีดีกรีเท่ากับ 2 และอีกสี่จุด มีดีกรีเท่ากับ 3 เนื่องจากคุณสมบัติเหล่านี้ ใช้ได้ทั้งหมด กราฟสองชุดนี้ อาจยอมรับได้ว่าเป็นกราฟถอดแบบกัน

อย่างไรก็ตาม G และ H ไม่ใช่กราฟถอดแบบกัน เพราะว่า $deg(a) = 2$ ใน G, a ต้อง

สมนัย กับ t, u, x หรือ y ใน H เพราะว่า จุดเหล่านี้ เป็นจุดที่มีดีกรีเท่ากับ 2 ใน H แต่เนื่องจาก แต่ละจุดของสี่จุด ใน H ประชิดกับ อีกหนึ่งจุด ซึ่งมีดีกรีเท่ากับ 2 ใน H สิ่งนี้ ไม่เป็นจริง สำหรับ a ใน G

ตัวอย่าง 18 จงหาว่า กราฟ G และ H ในรูปที่ 17 เป็นกราฟถอดแบบกันหรือไม่?



รูปที่ 17 กราฟ G และ H

ผลเฉลย กราฟ G และ H มี หกจุด และ เจ็ดด้าน มี สี่จุด ที่มีดีกรีเท่ากับ 2 และ สองจุดมีดีกรีเท่ากับ 3 ให้ A_G เป็น เมทริกซ์ประชิด ของ กราฟ G

$$A_G = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

ให้ A_H เป็นเมทริกซ์ประชิดของกราฟ H

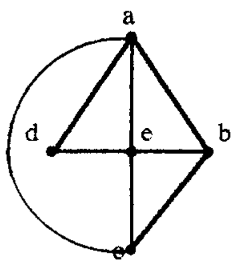
$$A_H = \begin{array}{c} \\ v_6 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_1 \\ v_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_6 & v_3 & u_4 & u_5 & u_1 & u_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

เพราะว่า $A_G = A_H$ แสดงว่า ฟังก์ชัน f รักษาด้าน สรุปว่า f เป็นฟังก์ชันถอดแบบกัน ดังนั้น G และ H เป็นกราฟถอดแบบกัน

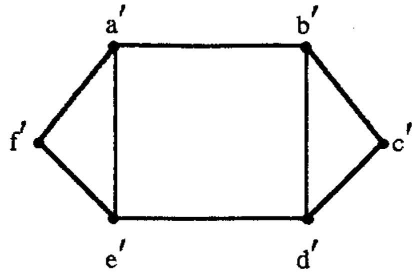
แบบฝึกหัดเสริม

ในแบบฝึกหัดข้อ 1-10 จงบอกว่า G_1 และ G_2 เป็นกราฟถอดแบบกัน หรือไม่? ถ้าเป็นกราฟถอดแบบกัน จงหา ฟังก์ชัน f สำหรับบทนิยาม 2 กรณีอื่นๆ จงหาตัวยืนยง ซึ่ง กราฟทั้งสองชุด ไม่มีร่วมกัน

1H.

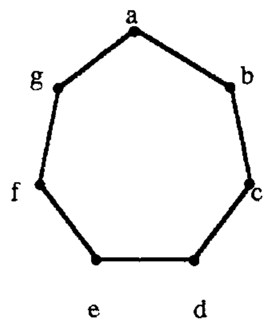


G_1

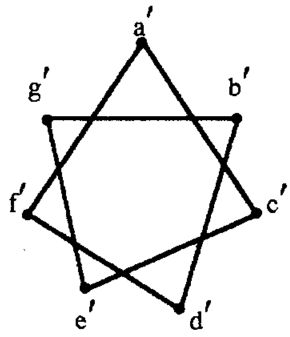


G_2

2.

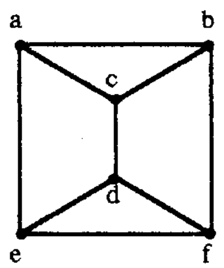


G_1

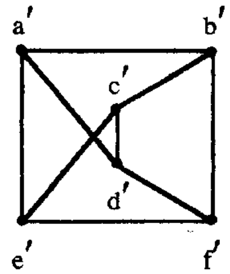


G_2

3H.

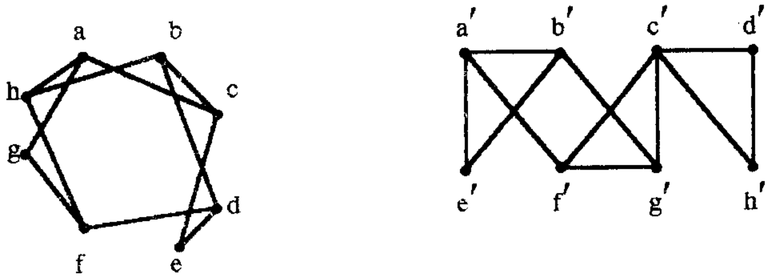


G_1



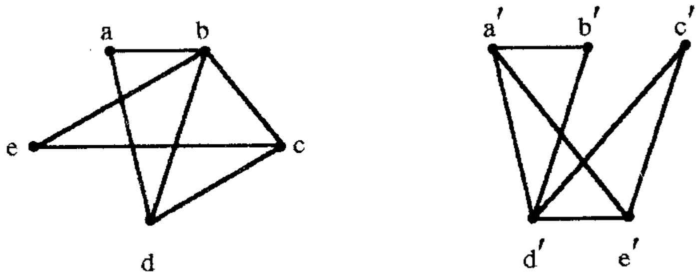
G_2

4.



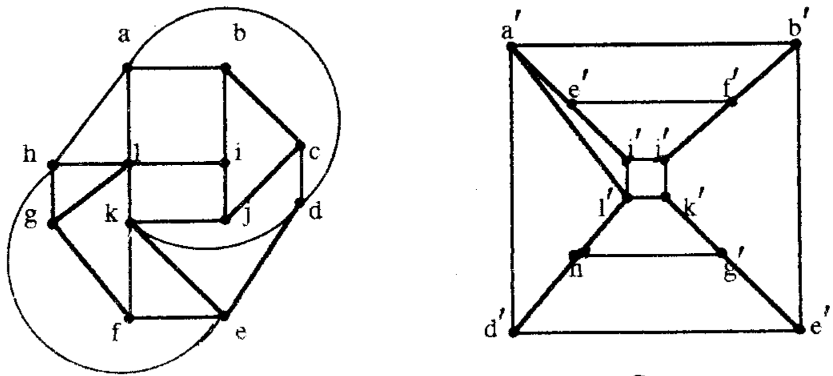
G_1 G_2

5H.



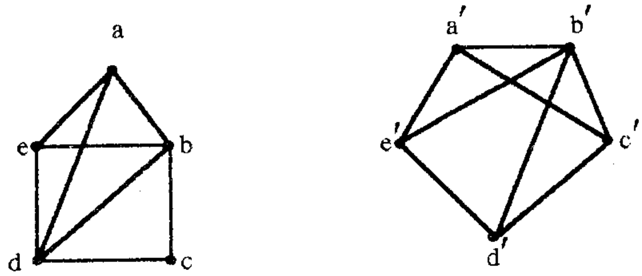
G_1 G_2

6.



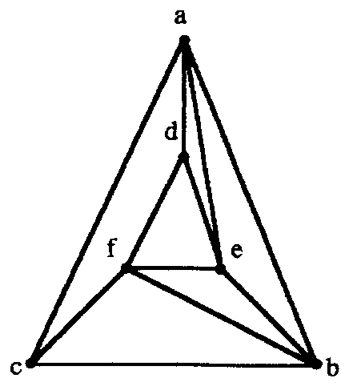
G_1 G_2

7H.

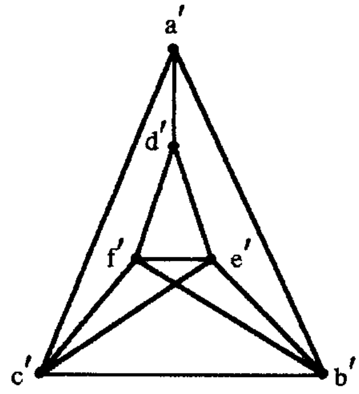


G_1 G_2

*8.

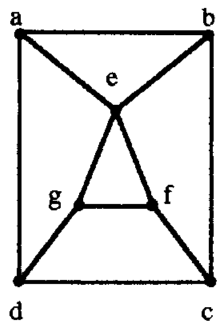


G_1

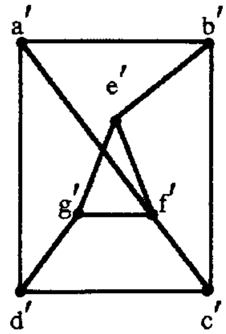


G_2

*9H.

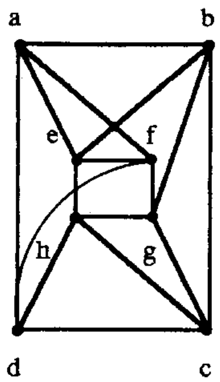


G_1

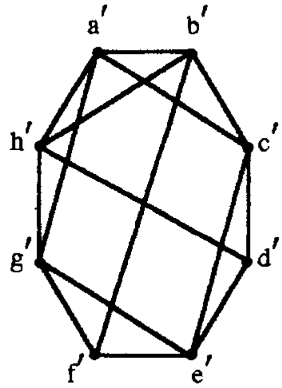


G_2

*10.



G_1



G_2

6.4 การต่อกัน (Connectivity)

ปัญหามากมาย ซึ่ง สามารถทำตัวแบบ ด้วย ทางเดินต่างๆ ประกอบเข้าด้วยกัน โดย การเดินทาง ไปตามด้านต่างๆ ของกราฟ ตัวอย่างเช่น การคำนวณว่า ข้อความ สามารถส่งถึงกันระหว่างคอมพิวเตอร์สองเครื่อง โดยใช้การเชื่อมต่อกัน นำมาศึกษา ด้วย ตัวแบบของกราฟได้หรือไม่ ปัญหาของ การวางแผนเส้นทางเดินที่มีประสิทธิภาพ สำหรับการส่งไปรษณีย์ การเก็บขยะ การตรวจวินิจฉัย ในข่ายงานคอมพิวเตอร์ และอื่นๆ สามารถแก้ปัญหา โดยใช้ ตัวแบบซึ่งเกี่ยวข้องกับทางเดินในกราฟ

ทางเดิน (Paths)

เราเริ่มต้น โดยการ ให้นิยาม คำศัพท์ต่างๆ ของทฤษฎีกราฟ ซึ่งเกี่ยวข้องกับทางเดิน

บทนิยาม 1 ทางเดินความยาว เท่ากับ n จากจุด u ไป จุด v ในกราฟไม่มีทิศทาง เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก หมายถึง ลำดับ ของด้าน $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ของกราฟ โดยที่ $f(e_1) = \{x_0, x_1\}$, $f(e_2) = \{x_1, x_2\}, \ldots, f(e_n) = \{x_{n-1}, x_n\}$ เมื่อ $x_0 = u$ และ $x_n = v$ สำหรับกราฟเชิงเดียว เราแทนทางเดินนี้ ด้วย ลำดับจุดของมัน คือ $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (เนื่องจากรายการจุดเหล่านี้ บอกทางเดินได้เพียงหนึ่งอย่างเท่านั้น)

ทางเดิน จะเป็น วงจร (circuit) ถ้ามันเริ่มต้น และ จบที่จุดเดียวกัน นั่นคือ ถ้า u = v ทางเดิน หรือ วัฏจักร เรียกว่า **การส่งผ่าน หรือ การแวะผ่าน (pass through or traverse)** จุด $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$

ทางเดิน หรือ วงจร จะเป็น **เชิงเดียว** ถ้าไม่มี ด้านเดียว ซ้ำมากกว่า หนึ่งครั้ง

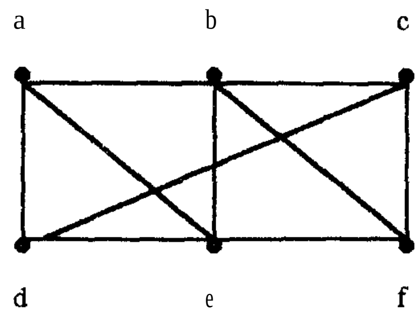
(A path or circuit is **simple** if it does not certain the same edge more than once.)

ตัวอย่าง 1 จากกราฟเชิงเดียวในรูปที่ 1

a, d, c, f, e หมายถึง simple path ความยาวเท่ากับ 4 เพราะว่า {a, d}, {d, c}, {c, f} และ {f, e} ทั้งหมดนี้คือด้าน อย่างไรก็ตาม d, e, c, a ไม่ใช่ทางเดิน เพราะว่า {e, c} ไม่ใช่ด้าน

โปรดสังเกตว่า b, c, f, e, b เป็นวงจร ความยาวเท่ากับ 4 เพราะว่า {b, c}, {c, f}, {f, e} และ {e, b} เป็นด้าน และ ทางเดินนี้ เริ่มต้น และ จบที่ จุด b

ทางเดิน a, b, e, d, a, b ความยาวเท่ากับ 5 แต่ไม่ใช่ simple path เพราะว่ามีด้าน {a, b} ซ้ำสองครั้ง



รูปที่ 1 กราฟเชิงเดียว

บทนิยาม 2 ทางเดินความยาว n เมื่อ n คือ จำนวนเต็มบวก จากจุด u ไป จุด v ใน กราฟหลายเส้นแบบมีทิศทาง หมายถึง ลำดับ ของด้าน $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ของกราฟ โดยที่ $f(e_1) = (x_0, x_1)$, $f(e_1) = (x_1, x_2), \ldots, f(e_n) = (x_{n-1}, x_n)$ เมื่อ $x_0 = u$ และ $x_n = v$ เมื่อ ไม่มีด้านหลายเส้น (no multiple edges) ในกราฟ ทางเดินนี้ ถูกแทนด้วย ลำดับจุดของมัน คือ $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$

ทางเดินซึ่ง เริ่มต้น และ จบ ที่จุดเดียวกัน เรียกว่า **วงจร** หรือ **วัฏจักร** (circuit or cycle)

ทางเดิน หรือ วงจร จะเรียกว่า **simple** ถ้ามันไม่มีด้านเดียวกัน มากกว่าหนึ่งครั้ง

ความไม่ขาดตอน ใน กราฟแบบไม่มีทิศทาง (Connectedness in undirected graphs)

เมื่อ ข่ายงานคอมพิวเตอร์ แห่งหนึ่ง มีคุณสมบัติว่า ทุกคู่ ของเครื่องคอมพิวเตอร์ สามารถใช้ สารสนเทศ ร่วมกัน ถ้า ข้อความ (messages) สามารถส่งผ่าน คอมพิวเตอร์ ตัวกลาง หนึ่งเครื่อง หรือ มากกว่า หนึ่งเครื่อง ได้ กราฟถูกนำมาใช้เพื่อแทนข่ายงานคอมพิวเตอร์ เช่นนี้ โดย จุด แทน เครื่องคอมพิวเตอร์ และ ด้าน แทน สายการสื่อสาร (communications links) คำถามมีดังนี้ : เมื่อไหร่ จึงจะมีทางเดินเสมอระหว่าง สองจุด ในกราฟ?

บทนิยาม 3 กราฟแบบไม่มีทิศทาง เรียกว่า **กราฟไม่ขาดตอน** ถ้ามีทางเดิน ระหว่าง ทุกคู่ ของจุดที่แตกต่างกัน ของกราฟ

(**An** undirected graph is called connected if there is a path between every pair of distinct vertices of the graph.) [1]

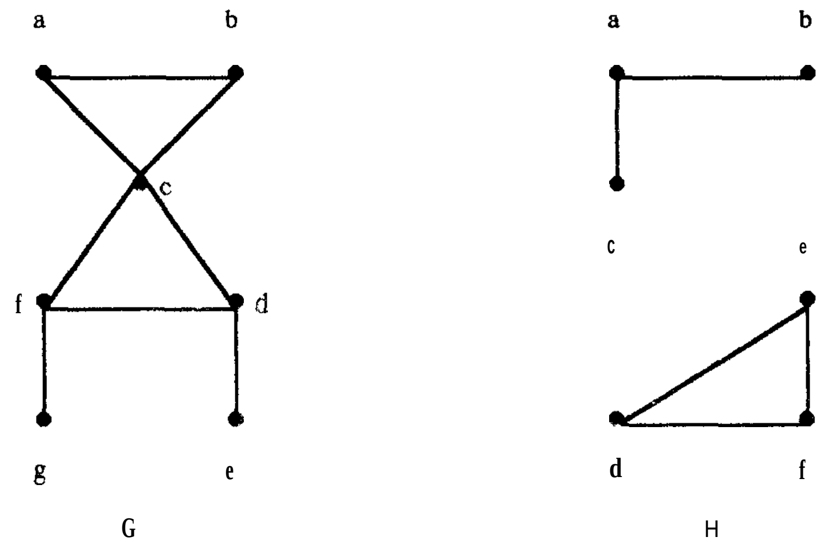
---

[1] Rosen, หน้า 443

ดังนั้น คอมพิวเตอร์ สองเครื่องใดๆ ในข่ายงาน สามารถ สื่อสารถึงกันได้ ก็ต่อเมื่อ กราฟของ ข่ายงานนี้ ไม่ขาดตอน

ตัวอย่าง 2 กราฟ G ในรูปที่ 2 เป็น กราฟไม่ขาดตอน เพราะว่า ทุกคู่ ของจุดที่แตกต่างกัน มีทางเดินระหว่างกัน

แต่ กราฟ H ในรูปที่ 2 ไม่ใช่ กราฟไม่ขาดตอน ยกตัวอย่างเช่น ระหว่างจุด a และ d ใน H ไม่มีทางเดินถึงกัน



รูปที่ 2 กราฟ G และ H

ทางเดินและการถอดแบบกัน

(Paths and Isomorphism)

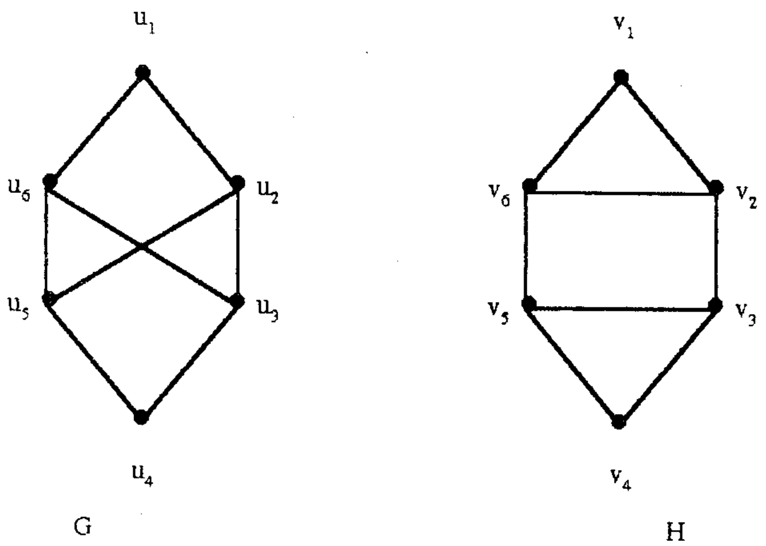
มีหลายวิธี ซึ่ง ทางเดิน และ วงจร สามารถ ช่วยบอกได้ว่า กราฟสองชุด เป็น กราฟถอดแบบกันหรือไม่ ตัวอย่างเช่น การมีอยู่ ของวงจรเชิงเดียวของ ความยาว อย่างหนึ่ง คือ ตัวยืนยงที่เป็นประโยชน์ สามารถนำมาใช้ เพื่อแสดงว่า กราฟสองชุด ไม่ใช่กราฟถอดแบบกัน นอกเหนือจากนี้แล้ว ทางเดิน สามารถนำมาใช้ เพื่อสร้าง การแปลงส่ง (mappings) ซึ่ง อาจเป็น การถอดแบบกัน

ตามที่ได้กล่าวมาแล้ว ตัวยืนยงการถอดแบบที่มีประโยชน์ สำหรับกราฟเชิงเดียว คือ การมีอยู่จริง ของ วงจรเชิงเดียว ของความยาว k เมื่อ k เป็น จำนวนเต็มบวก มีค่ามากกว่า 2 ตัวอย่าง

ที่ 3 จะแสดงให้เห็นว่า ตัวยืนยงนี้ สามารถนำมาใช้ แสดงว่า กราฟสองชุด ไม่เป็นการถอดแบบกัน อย่างไร

ตัวอย่าง 3 จงหาว่า กราฟ G และ H ในรูปที่ 6 ถอดแบบกันหรือไม่?

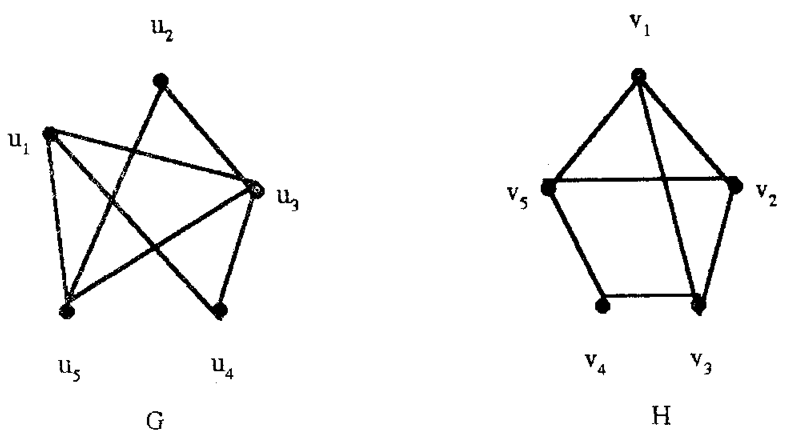
ผลเฉลย กราฟ G และ H ทั้งคู่ มี หกจุด และ มี แปดด้าน เหมือนกัน แต่ละรูป มี สี่จุด ซึ่งมีองศา เท่ากับ 3 และมีสองจุด ที่มีองศาเท่ากับ 2 ดังนั้น ตัวยืนยง สามตัว คือ จำนวนจุด จำนวนด้าน และองศาของจุด ของกราฟทั้งคู่ ตรงกันหมด แต่ H มี วงจรเชิงเดียว ความยาวเท่ากับ 3 ชื่อ v_1, v_2, v_6, v_1 ในขณะที่ G ไม่มี วงจรเชิงเดียว ความยาวเท่ากับ 3 จะเห็นได้ว่า วงจรเชิงเดียวทั้งหมดใน G มีความยาวอย่างน้อยที่สุดเท่ากับ 4 เนื่องจาก การมีอยู่ ของ วงจรเชิงเดียว ของความยาว เท่ากับ 3 คือ ตัวยืนยงถอดแบบกัน เพราะฉะนั้น G และ H ไม่ใช่ กราฟถอดแบบกัน



รูปที่ 6 กราฟ G และ H

ตัวอย่าง 4 จงหาว่า กราฟ G และ H ในรูปที่ 7 ถอดแบบกันหรือไม่

ผลเฉลย กราฟ G และ H ทั้งคู่ มี ห้าจุด และ เจ็ดด้านเหมือนกัน ทั้งคู่ มี สามจุด ที่มีองศาเท่ากับ 3 และ มี หนึ่งจุด ที่มีองศาเท่ากับ 2 และทั้งคู่ มีวงจรเชิงเดียว ของความยาวเท่ากับ 3 วงจรเชิงเดียว ของความยาวเท่ากับ 4 และ มีวงจรเชิงเดียวของความยาวเท่ากับ 5 เนื่องจาก ตัวยืนยงเหล่านี้ ทั้งหมด ตรงกัน ดังนั้น G และ H ถอดแบบกัน



รูปที่ 7 กราฟ G และ H

ในการหา การถอดแบบที่เป็นไปได้ หนึ่งชุด เราสามารถติดตามทางเดิน ซึ่ง ไปตลอดจุดทั้งหมด เพื่อให้ จุดสมนัยกัน ใน กราฟทั้งสองชุด มีดีกรีเหมือนกัน ตัวอย่างเช่น ทางเดิน u_1, u_4, u_3, u_2, u_5 ใน G และ ทางเดิน v_3, v_1, v_2, v_5, v_4 ใน H ทั้งคู่ ไปตลอด ทุกชุด ในกราฟ และ จบ ที่จุด ซึ่งมีดีกรี เท่ากับ 2 จากทางเดินนี้ ตลอดกราฟ เรานิยามการแปลงส่ง f ด้วย $f(u_1) = v_3$, $f(u_4) = v_1$, $f(u_3) = v_2$, $f(u_2) = v_5$ และ $f(u_5) = v_4$ แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันถอดแบบกัน หรือ โดยแสดงให้เห็นว่า f รักษา (preserves) ด้าน หรือ โดยการแสดงให้เห็นด้วย การเรียงอันดับที่เหมาะสม ของ จุดต่างๆ แล้ว เมทริกซ์ประชิดของ G และ H เหมือนกัน

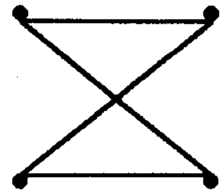
การนับจำนวนทางเดิน ระหว่างจุด

(Counting paths between vertices)

จำนวนทางเดินระหว่างสองจุด ในกราฟ สามารถหาได้ โดยใช้ เมทริกซ์ประชิดของมัน

ทฤษฎีบท ให้ G เป็นกราฟ มี A เป็นเมทริกซ์ประชิด ด้วยการเรียงอันดับของจุด $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ด้วยด้านแบบมีทิศทาง หรือ ด้านแบบไม่มีทิศทาง, ด้วยด้านหลายด้าน และ ยอมให้มีรูปบ่วงได้) จำนวน ด้านที่แตกต่างกัน ของ ความยาว จากจุด v_i ไป จุด v_j เท่ากับ entry ตัวที่ (i, j) ของ A^r เมื่อ r คือ จำนวนเต็มบวก

ตัวอย่าง 5 ในกราฟเชิงเดียว G ในรูปที่ 8 มีทางเดินความยาวเท่ากับ 4 จากจุด a ไปจุด d ทั้งหมดกี่ชุด



รูปที่ 8 กราฟ G

ผลเฉลย เมทริกซ์ประชิด ของ G (เรียงลำดับจุด เป็น a, b, c, d) คือ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ในที่นี้ จำนวนทางเดิน ของ ความยาวเท่ากับ 4 จากจุด a ไป จุด d คือ ข้อมูลตัวที่ (1, 4) ของ A^4 เนื่องจาก

$$A^4 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

มีทางเดินความยาวเท่ากับ 4 จากจุด a ไปจุด d ทั้งหมด แปด ชุด ได้แก่ ทางเดิน

a, b, a, b, d; a, b, a, c, d; a, b, d, b, d; a, b, d, c, d; a, c, a, b, d; a, c, a, c, d; a, c, d, b, d; a, c, d, c, d;

แบบฝึกหัด 6.4

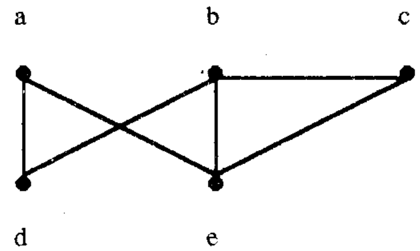
1. รายการ จุด ข้างล่างนี้ แต่ละชุด คือ ทางเดิน ใน กราฟ หรือไม่? จงหาว่า ทางเดินชุดใดบ้าง เป็น ทางเดินเชิงเดียว? ชุดใดบ้าง เป็น วงจร? และชุดที่เป็นทางเดิน มีความยาวเท่าใด?

   a) a, e, b, c, b

   b) a, e, a, d, b, c, a

   c) e, b, a, d, b, e

   d) c, b, d, a, c, e



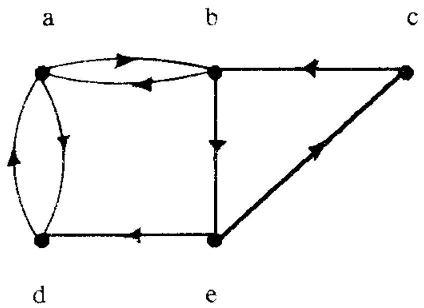
2. รายการจุด ข้างล่างนี้ แต่ละชุด เป็นทางเดิน ใน กราฟ หรือไม่? จงหาว่าชุดใดบ้าง ปีนทางเดินเชิงเดียว? ชุดใดบ้าง เป็น วงจร? และ ชุดที่เป็นทางเดิน นั้น มีความยาวเท่าใด?

   a) a, b, e, c, b

   b) a, d, a, d, a

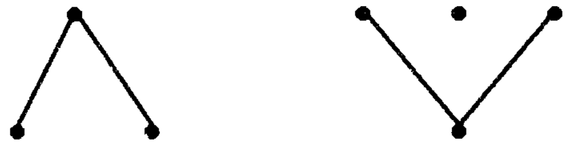
   c) a, d, b, e, a

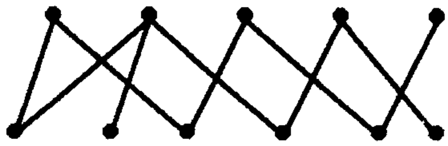
   d) a, b, e, c, b, d, a

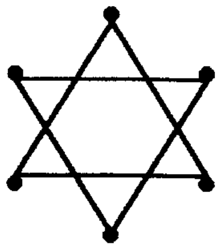


ในแบบฝึกหัดข้อ 3 - ข้อ 5 จงหาว่า กราฟที่กำหนดให้นั้น เป็นกราฟไม่ขาดตอนหรือไม่?

3.



4. 

5. 

6. จงหา จำนวนทางเดิน ระหว่าง จุด c และ จุด d ในกราฟ แบบฝึกหัดข้อที่ 1 ของความยาว

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

e) 6 f) 7

7. จงหา จำนวนทางเดิน จาก จุด a ไป จุด e ในกราฟมีทิศทาง ในแบบฝึกหัดข้อ 2 ของความยาว

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

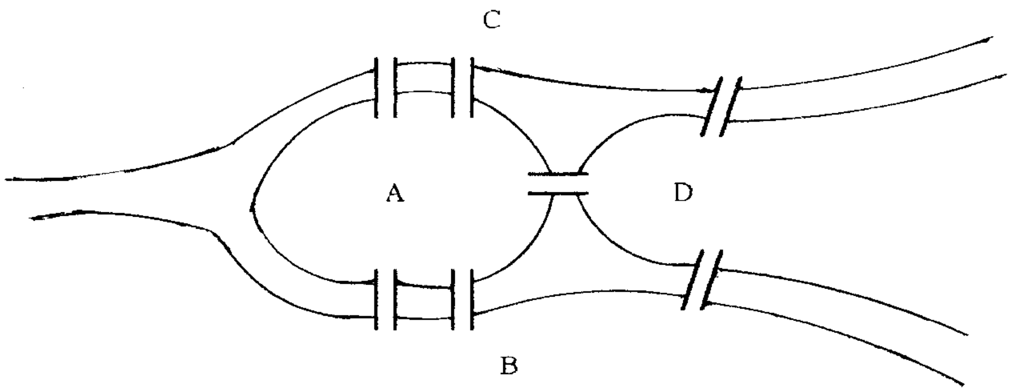
e) 6 f) 7

8. จงแสดงให้เห็นว่า กราฟไม่ขาดตอน ที่มี n จุดจะมี อย่างน้อยที่สุด n - 1 ด้าน

6.5 ทางเดินออยเลอร์ และ ทางเดินแฮมมิลตัน

(Euler and Hamilton Paths)

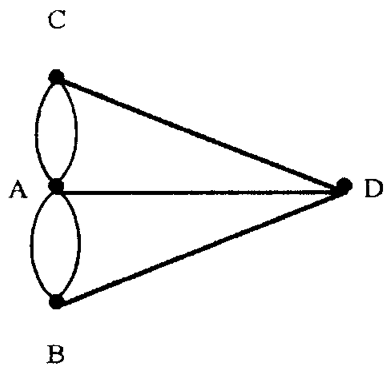
เมืองโคนิกส์เบิร์ก (Konigsberg) ในประเทศรัสเซีย แบ่งพื้นที่ออกเป็นสี่ส่วน โดย พื้นที่สี่ส่วนนี้ มีสองแห่งอยู่บนฝั่งของแม่น้ำ และมีอีกสองแห่งเป็นเกาะในแม่น้ำ ในขณะนั้น มีสะพานอยู่ 7 แห่ง เชื่อมต่อระหว่างพื้นที่เหล่านี้ ดังรูป



รูปที่ 1 เมืองโคนิกส์เบิร์ก

คนในเมือง ต้องการเดินผ่านตลอดทั่วเมือง ในวันอาทิตย์ เขาสงสัยว่า จะเป็นไปได้หรือไม่ ที่เริ่มต้น ที่ ตำแหน่งหนึ่ง ในเมือง แล้ว เดินข้ามทุกสะพาน แต่ละสะพานเดินผ่านเพียงครั้งเดียว แล้วกลับมายัง จุดเริ่มต้น ได้

นักคณิตศาสตร์ ชาว สวิส ชื่อ Leonhard Euler แก้ปัญหานี้ การแก้ปัญหาของเขา ได้ตีพิมพ์ในปี ค.ศ. 1736 นับเป็นครั้งแรกที่ใช้ ทฤษฎีกราฟ ออยเลอร์ ศึกษาปัญหานี้ โดยใช้ กราฟหลายเส้น เมื่อ พื้นที่สี่แห่ง แทนด้วยจุด และสะพานเจ็ดแห่ง แทนด้วยด้าน กราฟหลายเส้น (multigraph) ที่ได้นี้ คือ รูปที่ 2



รูปที่ 2 ตัวแบบกราฟหลายเส้นของเมืองโคนิกส์เบิร์ก

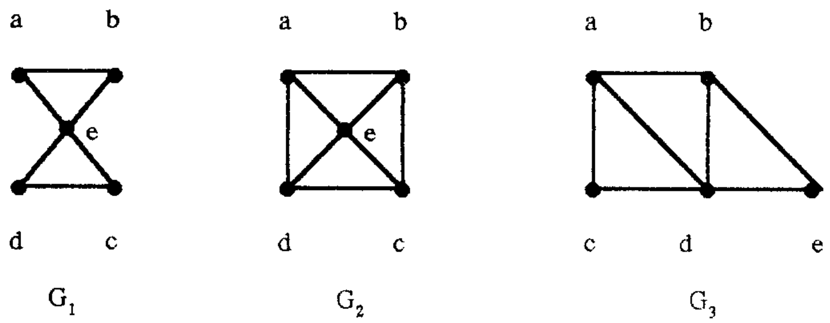
ปัญหาของการเดินทางข้ามทุกสะพาน โดยที่ แต่ละสะพานข้ามเพียงครั้งเดียว คือ ตัวแบบนี้ คำถาม : มีวงจรเชิงเดียว ใน กราฟหลายเส้นชุดนี้ ซึ่ง ประกอบด้วยทุกด้านหรือไม่?

(Is there a simple circuit in this multigraph that contains every edge?)

บทนิยาม 1 วงจรออยเลอร์ ใน กราฟ G หมายถึง วงจรเชิงเดียว ประกอบด้วย ทุกด้าน ของ G ทางเดินออยเลอร์ ใน G หมายถึง ทางเดินเชิงเดียว ประกอบด้วยทุกด้านของ G

(An **Euler circuit** in a graph G is a simple circuit containing every edge of G. An **Euler path** in G is a simple path containing every edge of G.) [2]

ตัวอย่าง 1 กราฟไม่มีทิศทางในรูปที่ 3 ชุดใด มีวงจรออยเลอร์ ชุดใดไม่มีวงจรออยเลอร์ และชุดใด มีทางเดินออยเลอร์?



รูปที่ 3 กราฟไม่มีทิศทาง G_1, G_2, และ G_3

ผลเฉลย

กราฟ G_1 มี วงจรออยเลอร์ ตัวอย่างเช่น a, e, c, d, e, b, a

กราฟ G_2 และ G_3 ไม่มีวงจรออยเลอร์

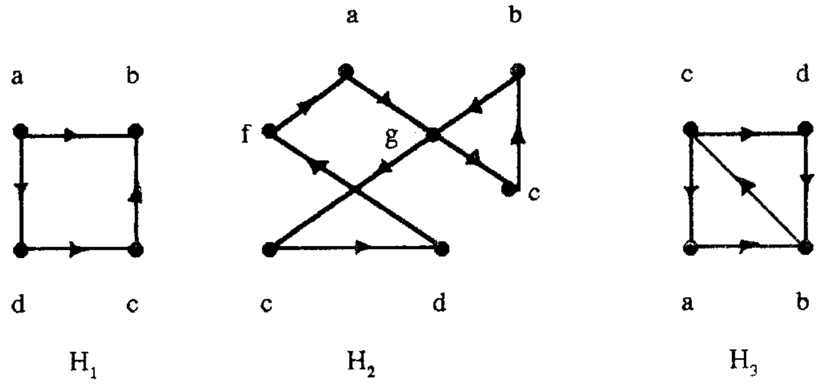
กราฟ G_3 มีทางเดินออยเลอร์ ชื่อ a, c, d, e, b, d, a, b

กราฟ G_2 ไม่มี ทางเดินออยเลอร์

---

[2] Rosen, หน้า 453

ตัวอย่าง 2 กราฟมีทิศทางในรูปที่ 4 ชุดใดมีวงจรออยเลอร์ ชุดใดไม่มีวงจรออยเลอร์ และชุดใดมี ทางเดินออยเลอร์?



รูปที่ 4 กราฟมีทิศทาง H_1, H_2 และ H_4

ผลเฉลย

กราฟ H_2 มีวงจรออยเลอร์ ตัวอย่างเช่น a, g, c, b, g, e, d, f, a

กราฟ H_1 และ H_3 ไม่มีวงจรออยเลอร์

กราฟ H_3 มีทางเดินออยเลอร์ ชื่อ c, a, b, c, d, b

กราฟ H_1 ไม่มีทางเดินออยเลอร์

ทฤษฎีบท 1 กราฟหลายเส้น ไม่ขาดตอน จะมี วงจรออยเลอร์ ก็ต่อเมื่อ ทุกจุดของกราฟ มีองศาเป็นเลขคู่

(A connected multigraph has an Euler circuit if and only if each of its vertices has even degree.)[3]

ขณะนี้ เราสามารถแก้ปัญหาสะพานโคนิกส์เบิร์กได้แล้ว เนื่องจากกราฟหลายเส้น ซึ่งแทน สะพานเหล่านี้ แสดงไว้ในรูปที่ 2 มี สี่จุด ที่มีองศาเป็นเลขคี่ เพราะฉะนั้น กราฟนี้ ไม่มีวงจรออยเลอร์ หมายความว่า ไม่มีวิธีใดๆ เลย ที่เริ่มต้น จากจุดที่กำหนด เดินผ่านทุกสะพาน แต่ละสะพานเดินผ่านเพียงครั้งเดียว และสามารถกลับมายังจุดเริ่มต้นได้

---

[3] Rosen, หน้า 455

ทฤษฎีบท 2 กราฟหลายเส้นไม่ขาดตอน จะมีทางเดินออยเลอร์ แต่ไม่มีวงจรออยเลอร์ ก็ต่อเมื่อกราฟชุดนี้ มีเพียงสองจุดเท่านั้น ที่มีองศาเป็นเลขคี่

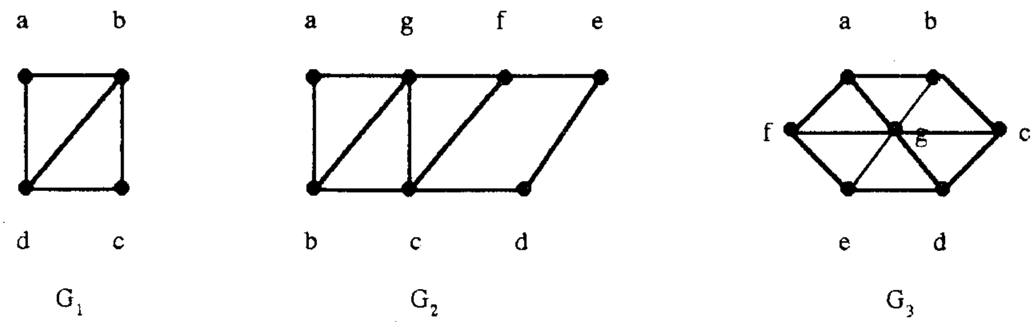
(A connected multigraph has an Euler path but not an Euler circuit if and only if it has exactly two vertices of odd degree.) [4]

ตัวอย่าง 3 กราฟชุดใด ในรูปที่ 5 มีทางเดินออยเลอร์?

ผลเฉลย

กราฟ G_1 มีสองจุดเท่านั้นที่มีองศาเป็นเลขคี่ คือจุด b และ d ดังนั้น กราฟ G_1 จึงมีทางเดินออยเลอร์ ซึ่ง ต้องมีจุด b และจุด d เป็นจุดปลาย (endpoints) และทางเดินออยเลอร์คือ d, a, b, c, d, b

ในทำนองเดียวกัน กราฟ G_2 มีสองจุดเท่านั้นที่มีองศาเป็นเลขคี่ คือจุด b และ f ดังนั้น G_2 จึงมีทางเดินออยเลอร์ ซึ่งต้องมีจุด b และ f เป็นจุดปลาย ทางเดินออยเลอร์ชุดนั้น คือ b, a, g, f, e, d, c, g, b, c, f



รูปที่ 5 กราฟแบบไม่มีทิศทาง 3 ชุด

กราฟ G_3 ไม่มีทางเดินออยเลอร์ เพราะว่า มันมี หกจุดที่มีองศาเป็นเลขคี่

สำหรับ ปัญหาสะพานโคนิกส์เบิร์ก เป็นไปได้หรือไม่ที่เริ่มต้น หนึ่งจุดในเมือง เดินข้ามทุกสะพาน และจบที่จุดอื่นในเมือง? คำถามนี้สามารถมีคำตอบ โดยการหาว่า มีทางเดินออยเลอร์

---

[4] Rosen, หน้า 457

ใน กราฟหลายเส้น ซึ่งแทนสะพาน ในเมืองโคนิกส์เบิร์กหรือไม่? เนื่องจากมีสี่จุดในกราฟหลายเส้นนี้ ที่มีองศาเป็นเลขคี่ เพราะฉะนั้น กราฟหลายเส้นชุดนี้ ไม่มีทางเดินออยเลอร์ ดังนั้น การเดินทางเช่นนี้เป็นไปไม่ได้

ทางเดินแฮมมิลตันและวงจรแฮมมิลตัน (Hamilton paths and circuits)

เราได้พัฒนา เงื่อนไขที่พอเพียง และจำเป็น สำหรับการมีอยู่ของทางเดินและวงจร ซึ่งประกอบด้วย ทุกด้านของกราฟหลายเส้นเพียงครั้งเดียวเท่านั้น มาแล้ว เราสามารถทำเช่นเดียวกัน สำหรับทางเดินเชิงเดียว ซึ่ง ประกอบด้วย ทุกจุดของกราฟ เพียงครั้งเดียว ได้หรือไม่?

บทนิยาม 2 ทางเดิน $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ ในกราฟ $G = (V, E)$ จะเรียกว่าทางเดินแฮมมิลตัน ถ้า $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ และ $x_i \neq x_j$ สำหรับ $0 \leq i < j \leq n$

วงจร $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_0$ (เมื่อ $n > 1$) ในกราฟ $G = (V, E)$ เรียกว่า วงจรแฮมมิลตัน ถ้า $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ คือทางเดินแฮมมิลตัน

ตัวอย่าง 4 กราฟเชิงเดียวในรูปที่ 6 มีชุดใดบ้าง มีวงจรแฮมมิลตัน? หรือ ถ้าไม่มีวงจรแฮมมิลตัน มันมีทางเดินแฮมมิลตันหรือไม่?

ผลเฉลย

กราฟ G_1 มีวงจรแฮมมิลตัน ได้แก่ a, b, c, d, e, a

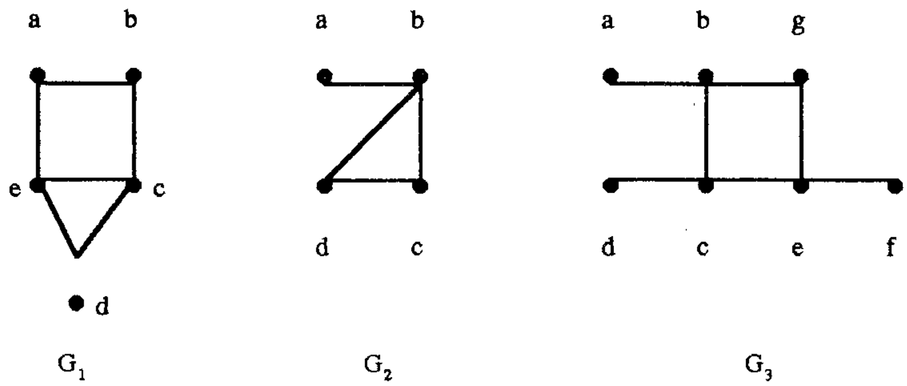
กราฟ G_2 ไม่มีวงจรแฮมมิลตัน จะเห็นว่า ทุกวงจรซึ่งประกอบด้วยทุกจุด ต้อง มีด้าน {a, b} สองครั้ง

กราฟ G_2 มีทางเดินแฮมมิลตัน ชื่อ a, b, c, d

กราฟ G_3 ไม่มีวงจรแฮมมิลตัน และ ไม่มีทางเดินแฮมมิลตัน เพราะว่า ทุกทางเดิน ซึ่งมีทุกจุด ต้องมีหนึ่งชุดของด้าน {a, b}, {e, f} ละ {c, d} มากกว่าหนึ่งครั้ง

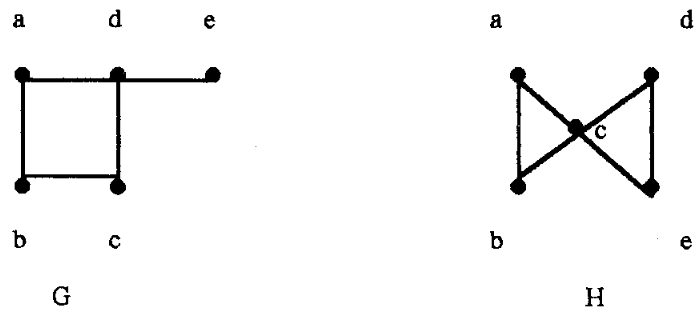
จะมีวิธีง่ายๆ ที่จะบอกว่า กราฟรูปหนึ่ง มีวงจรแฮมมิลตัน หรือ มีทางเดินแฮมมิลตัน หรือไม่? น่าประหลาดใจ ไม่มีทางทราบง่ายๆ ที่เป็นเกณฑ์พอเพียง และจำเป็น สำหรับการมีอยู่ ของวงจรแฮมมิลตัน แต่มีหลายทฤษฎี ที่ให้เงื่อนไขพอเพียงสำหรับการมีอยู่ของวงจรแฮมมิลตัน และคุณสมบัติหลายอย่างที่สามารถใช้แสดงว่า กราฟนั้น ไม่มีวงจรแฮมมิลตัน ตัวอย่างเช่น กราฟที่มีจุด ซึ่งมีองศาเท่ากับ 1 จะไม่สามารถมี วงจรแฮมมิลตัน เพราะว่าในวงจรแฮมมิลตัน ทุกจุดตกกระทบบน สองด้านในวงจร นอกจากนี้แล้ว ถ้าจุดหนึ่งในกราฟ มีองศาเท่ากับ 2 แล้วด้านทั้งคู่

ซึ่งตกกระทบบนจุดนี้ ต้องเป็นส่วนหนึ่งของวงจรแฮมมิลตัน ชุดใดชุดหนึ่ง



รูปที่ 6 กราฟเชิงเดียว สามชุด

ตัวอย่าง 5 จงแสดงให้เห็นว่า กราฟ ในรูปที่ 11 ไม่มีวงจรแฮมมิลตัน



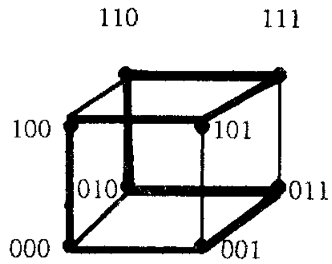
รูปที่ 7 กราฟทั้งสองชุดนี้ ไม่มีวงจรแฮมมิลตัน

ผลเฉลย

กราฟ G ไม่มีวงจรแฮมมิลตัน เพราะว่าใน G มีจุด e ซึ่งมีองศา เท่ากับ 1

กราฟ H เนื่องจากจุด a, b, d และ e ทั้งหมดนี้ มีองศาเท่ากับ 2 ดังนั้นทุกด้านซึ่งตกกระทบ กับจุดเหล่านี้ ต้องเป็น ส่วนหนึ่งของ วงจรแฮมมิลตัน ชุดใดชุดหนึ่ง จะเห็นว่า ไม่มีวงจรแฮมมิลตันใดๆ เลยอยู่ใน H สำหรับวงจรแฮมมิลตันใดๆ จะประกอบด้วย สี่ด้าน ตกกระทบกับ จุด C เป็นไปไม่ได้

ตัวอย่าง 6 Q_3 ซึ่งแสดงให้เห็นในรูปที่ 8 มีวงจรแฮมมิลตัน



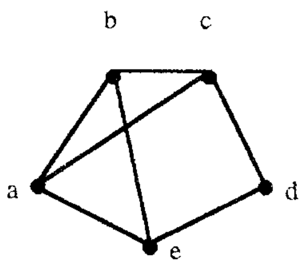
รูปที่ 8 วงจรแฮมมิลตัน สำหรับ Q_3

ในที่นี้ ลำดับของสายบิต แตกต่างกันเพียง หนึ่งบิตเท่านั้น และวงจรแฮมมิลตัน คือ 000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100

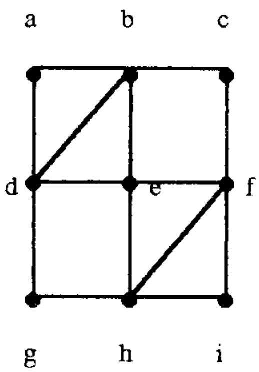
แบบฝึกหัด 6.5

ในแบบฝึกหัดข้อ 1-7 จงหาว่า กราฟแต่ละรูป มีวงจรออยเลอร์หรือไม่ ถ้ามีให้สร้างวงจรนั้น

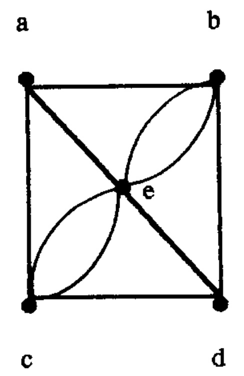
1.



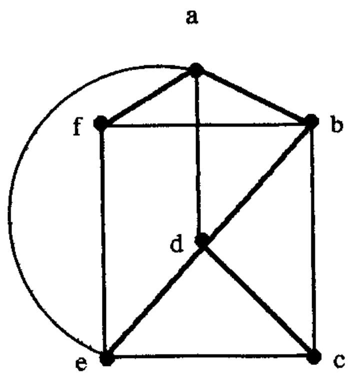
2.



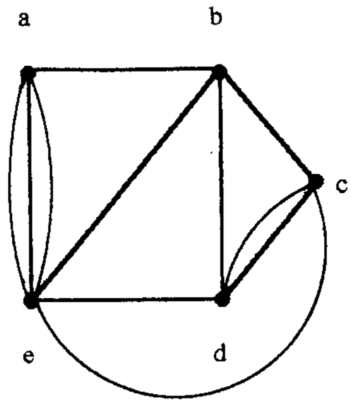
3.



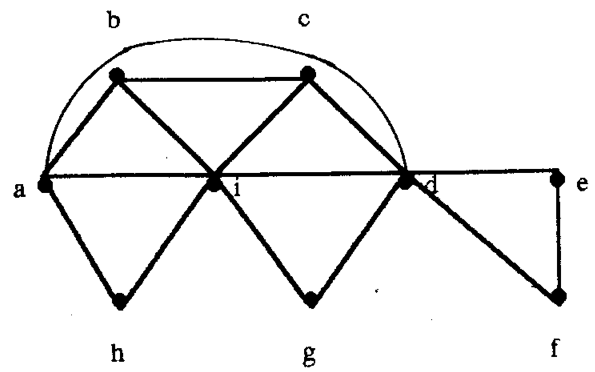
4.



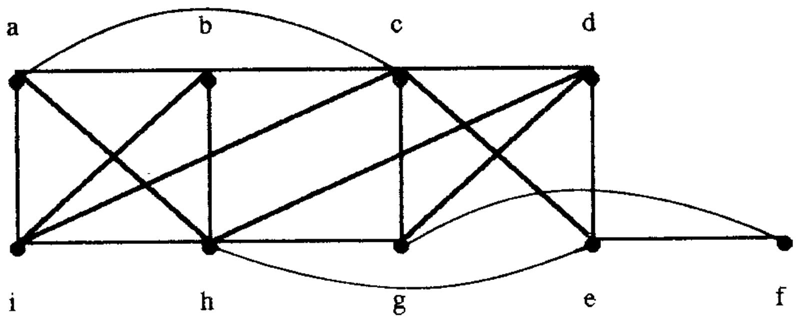
5.



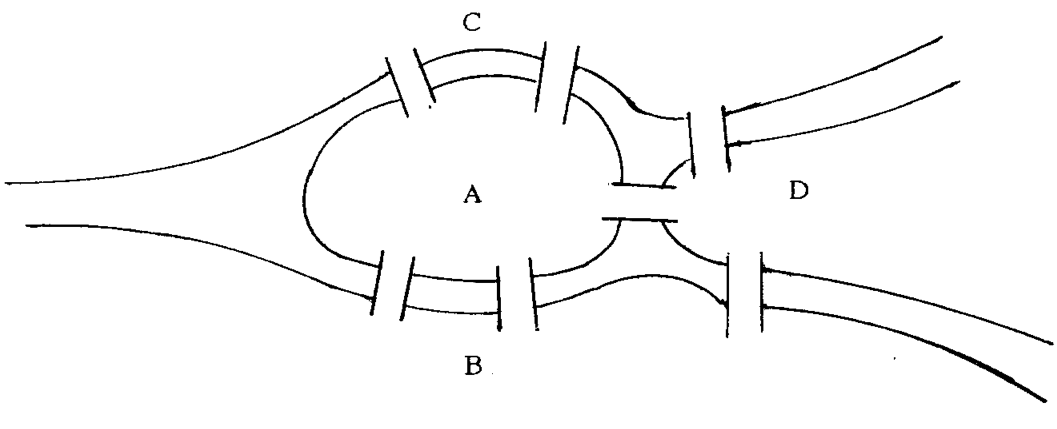
6.



7.

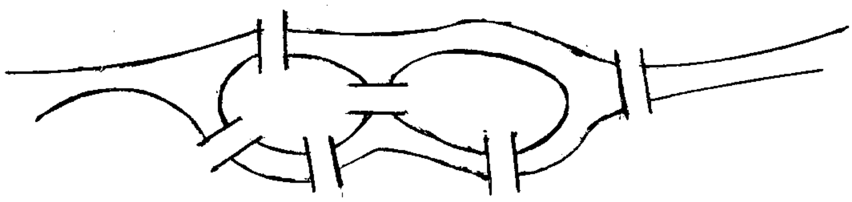


8. กราฟในแบบฝึกหัดข้อ 1 มี ทางเดินออยเลอร์ หรือไม่ ถ้ามี จงสร้างทางเดินนั้น
9. กราฟในแบบฝึกหัดข้อ 2 มี ทางเดินออยเลอร์ หรือไม่ ถ้ามี จงสร้างทางเดินนั้น
10. กราฟในแบบฝึกหัดข้อ 3 มี ทางเดินออยเลอร์ หรือไม่ ถ้ามี จงสร้างทางเดินนั้น
11. กราฟในแบบฝึกหัดข้อ 4 มี ทางเดินออยเลอร์ หรือไม่ ถ้ามี จงสร้างทางเดินนั้น
12. กราฟในแบบฝึกหัดข้อ 5 มี ทางเดินออยเลอร์ หรือไม่ ถ้ามี จงสร้างทางเดินนั้น
13. กราฟในแบบฝึกหัดข้อ 6 มี ทางเดินออยเลอร์ หรือไม่ ถ้ามี จงสร้างทางเดินนั้น
14. กราฟในแบบฝึกหัดข้อ 7 มี ทางเดินออยเลอร์ หรือไม่ ถ้ามี จงสร้างทางเดินนั้น
15. จากปัญหาสะพานโคนิกส์เบิร์ก ให้สร้างสะพานเพิ่มขึ้นอีกสองสะพาน นอกเหนือจากของเดิมที่มีอยู่แล้ว เจ็ดสะพาน สะพานใหม่นี้ ให้ต่อ พื้นที่ B และ C, ต่อพื้นที่ B และ D ตามลำดับ ขณะนี้ บุคคลหนึ่ง จะสามารถข้าม ทั้ง 9 สะพาน โดยแต่ละสะพานข้ามครั้งเดียว และกลับมายัง จุดเริ่มต้น ได้หรือไม่?



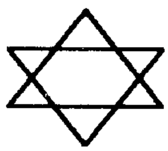
สะพานในเมืองโคนิกส์เบิร์ก

16. ในแผนที่ข้างล่างนี้ ใครบางคน จะสามารถข้ามทุกสะพาน แต่ละสะพานข้ามเพียงครั้งเดียว และกลับมายังจุดเริ่มต้น ได้หรือไม่?

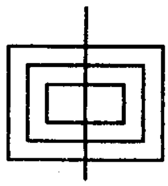


ในแบบฝึกหัดข้อ 17 - 19 จงหาว่า รูปภาพที่แสดงนั้น จะสามารถวาดด้วยดินสอ ในการเคลื่อนแบบต่อเนื่อง โดยไม่มีการยกดินสอ หรือ ลากเส้นทับ ส่วนของรูปภาพ ได้หรือไม่?

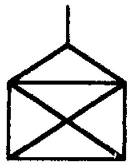
17.



18.

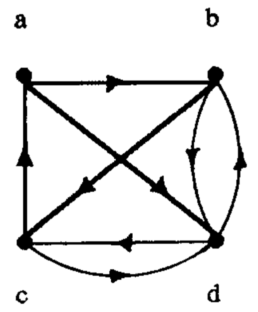


19.

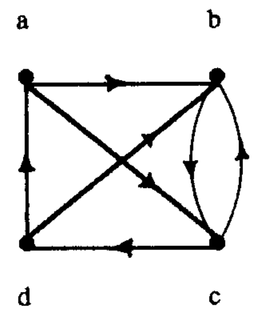


ในแบบฝึกหัดข้อ 20 - 23 จงหาว่า กราฟแบบมีทิศทางซึ่งกำหนดให้นั้น มีวงจรออยเลอร์หรือไม่ ถ้ามีจงสร้างวงจรนั้น

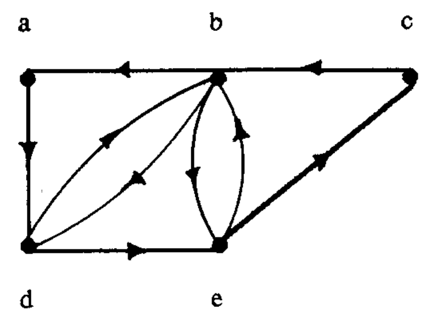
20.



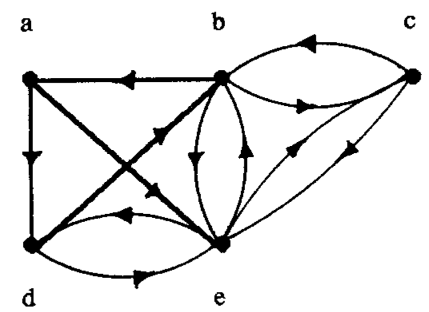
21.



22.



23.



24. จงหาว่า กราฟมีทิศทาง ในแบบฝึกหัดข้อ 20 มีวงจรออยเลอร์ หรือไม่ ถ้ามี จงสร้างวงจรนั้น

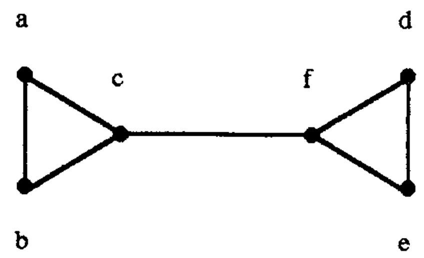
25. จงหาว่า กราฟมีทิศทาง ในแบบฝึกหัดข้อ 21 มีวงจรออยเลอร์ หรือไม่ ถ้ามี จงสร้างวงจรนั้น

26. จงหาว่า กราฟมีทิศทาง ในแบบฝึกหัดข้อ 22 มีวงจรออยเลอร์ หรือไม่ ถ้ามี จงสร้างวงจรนั้น

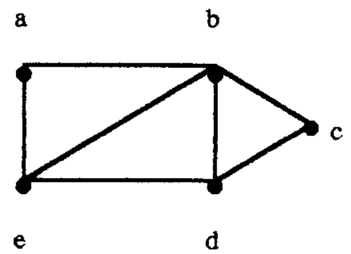
27. จงหาว่า กราฟมีทิศทาง ในแบบฝึกหัดข้อ 23 มีวงจรออยเลอร์ หรือไม่ ถ้ามี จงสร้างวงจรนั้น

ในแบบฝึกหัดข้อ 28 - 31 จงหาว่ากราฟที่กำหนดให้นั้น มีวงจรแฮมมิลตัน หรือไม่ ถ้ามี จงหาวงจรนั้น ถ้าไม่มี จงให้เหตุผล เพื่อแสดงว่า ทำไม จึงไม่มีวงจรเช่นนั้น

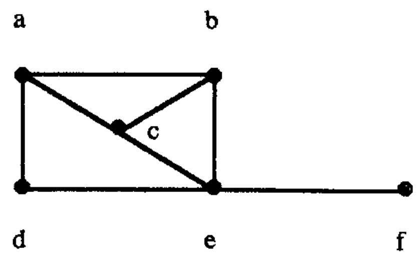
28.



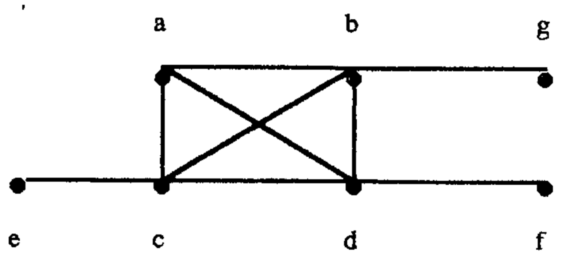
29.



30.



31.



32. กราฟในแบบฝึกหัดข้อ 28 มีทางเดินแฮมมิลตัน หรือไม่? ถ้ามี จงหาทางเดินนั้น ถ้า ไม่มี จงให้เหตุผล เพื่อแสดงให้เห็นว่า ทำไม จึงไม่มีทางเดินเช่นนั้น

33. กราฟในแบบฝึกหัดข้อ 29 มีทางเดินแฮมมิลตัน หรือไม่? ถ้ามี จงหาทางเดินนั้น ถ้า ไม่มี จงให้เหตุผล เพื่อแสดงให้เห็นว่า ทำไม จึงไม่มีทางเดินเช่นนั้น

34. กราฟในแบบฝึกหัดข้อ 30 มีทางเดินแฮมมิลตัน หรือไม่? ถ้ามี จงหาทางเดินนั้น ถ้า ไม่มี จงให้เหตุผล เพื่อแสดงให้เห็นว่า ทำไม จึงไม่มีทางเดินเช่นนั้น

35. กราฟในแบบฝึกหัดข้อ 31 มีทางเดินแฮมมิลตัน หรือไม่? ถ้ามี จงหาทางเดินนั้น ถ้า ไม่มี จงให้เหตุผล เพื่อแสดงให้เห็นว่า ทำไม จึงไม่มีวงจรเช่นนั้น