บทที่ 5 ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด
(Recurrence Relations)

5.1 ความรู้เบื้องต้น (Introduction)

5.2 การแก้ปัญหา ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

(Solving Recurrence Relations)

5.3 ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดเอกพันธุ์เชิงเส้นขององศา k ที่มีสัมประสิทธิ์ คงที่

(Linear Homogeneous Recurrence Relation of Degree k with Constant Coefficients)

5.1 ความรู้เบื้องต้น (Introduction)

จำนวนแบคทีเรีย (bacteria) ใน โคโลนี (colony) แห่งหนึ่ง เพิ่มจำนวนเป็นสองเท่า ทุกๆ ชั่วโมง ถ้า โคโลนี แห่งนี้ เริ่มต้นด้วยแบคทีเรีย ห้า ตัว ในเวลา n ชั่วโมง จะมีแบคทีเรีย จำนวนเท่าใด?

การแก้ปัญหานี้ ให้ a_n เป็นจำนวนแบคทีเรีย ณ สิ้นชั่วโมง ที่ n เพราะว่า จำนวนแบคทีเรีย เพิ่มขึ้นสองเท่า ทุกๆ ชั่วโมง ความสัมพันธ์ $a_n = 2a_{n-1}$ จะเป็นจริง ตราบใดที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก ความสัมพันธ์นี้ รวมกับ เงื่อนไขแรก $a_0 = 5$ มีเพียงหนึ่งอย่างเท่านั้น ในการหา a_n สำหรับ n ซึ่งเป็น จำนวนเต็มบวก ไม่เป็นลบ ทั้งหมด เราสามารถหาสูตร สำหรับ a_n จากสารสนเทศนี้

ปัญหาของการนับ หลายชนิด เราไม่สามารถแก้ปัญหาได้โดยใช้เทคนิคต่างๆ ซึ่งได้อภิปรายมาแล้วในบทที่ 4 อย่างไรก็ตาม บางปัญหา สามารถแก้ไขได้ โดยการหา ความสัมพันธ์ ซึ่งเรียกว่า ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด ระหว่างเทอมต่างๆ ของลำดับ เช่นที่ได้กระทำมาแล้ว ในปัญหา เกี่ยวกับแบคทีเรีย ต่อไปเราจะศึกษา ปัญหาการนับหลายๆ ชนิด ซึ่งนำมาเป็นตัวแบบ โดยใช้ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด และจะได้พัฒนา วิธีต่างๆ ในบทนี้ เพื่อการหาสูตรชัดแจ้ง (explicit formulae) สำหรับเทอมต่างๆ ของลำดับ ซึ่ง มีคุณสมบัติตาม ชนิดของ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดนั้น

ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (Recurrence Relations)

ในบทที่ 3 เราได้อภิปรายมาแล้วว่า ลำดับสามารถให้นิยาม แบบเรียกซ้ำ ได้อย่างไร จะเห็นว่า บทนิยามการเรียกซ้ำ ของ ลำดับ มีการกำหนดเทอมแรก ให้หนึ่งเทอม หรือ มากกว่าหนึ่งเทอม และมีกฎ สำหรับการหา เทอมถัดไป จาก เทอมต่างๆ ซึ่งอยู่ก่อนหน้ามัน

บทนิยามการเรียกซ้ำ (Recursive definitions) สามารถนำมาใช้ แก้ปัญหา เรื่อง การนับจำนวน ในกรณีเช่นนี้ กฎ สำหรับ การหาเทอมต่างๆ จาก เทอมก่อนหน้า เรียกว่า **ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด**

บทนิยาม ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด สำหรับ ลำดับ $\{a_n\}$ หมายถึงสูตร ซึ่ง แสดง a_n ในเทอมของเทอมก่อนหน้า ของลำดับ หนึ่งเทอม หรือ มากกว่าหนึ่งเทอม ได้แก่ $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ สำหรับ n ทุกตัว ซึ่งเป็น จำนวนเต็ม โดยที่ $n \geq n_0$ เมื่อ n_0 คือจำนวนเต็มบวกไม่เป็นลบ

ลำดับ จะเรียกว่า **ผลเฉลย** ของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด ถ้า เทอมต่างๆ ของมัน มีคุณสมบัติ ของ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

(**A recurrence reiation for** the sequence $\{a_n\}$ is a formula that expresses a, in terms of one or more of the previous terms of the sequence, namely, a,, a,, . . . , a_{n-}, , for all integers n with $n \geq n_0$, where n_0 is a nonnegative integer.

A sequence is called **a solution** of a recurrence relation if its terms satisfy the recurrence relation .) [1]

Johnsonbaugh กล่าวว่า

ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด สำหรับ ลำดับ $a_0, a_1, \ldots$ **หมายถึง สมการ ซึ่งเกี่ยวข้อง** a_n **กับเทอมก่อนหน้าของมัน** a,, a,, . . ., a_{n-1}

เงื่อนไขแรก สำหรับ ลำดับ $a_0, a_1, \ldots$ **หมายถึง ค่า ซึ่งกำหนดให้ชัดแจ้ง สำหรับ จำนวน จำกัด ของ เทอมต่างๆ ของลำดับ**

(A **recurrence relation** for the sequence a_0, a,, . . . is an equation that relates a, to certain of its predecessors a,, a,, . . ., a_{n-1}.

Initial conditions for the sequence a,, a,, . . . are explicitly given values for a tinite number of the terms of the sequence.) [2]

ตัวอย่าง 1 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งมีคุณสมบัติของ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ สำหรับ $n = 2, 3, 4, \ldots$, และสมมติว่า $a_0 = 3$ และ $a_1 = 5$ จงหา a_2 และ a_3

ผลเฉลย จากความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

$$a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2$$

$$a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3$$

ตัวอย่าง 2 จงหาว่า ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นผลเฉลย ของ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ สำหรับ $n = 2, 3, 4, \ldots$, เมื่อ

(a) $a_n = 3n$ สำหรับ n ทุกตัว ซึ่งเป็นจำนวนเต็ม ไม่เป็นลบ หรือไม่?

(b) ตอบคำถามเดียวกัน เมื่อ $a_n = 2^n$ และ

(c) ตอบคำถามอย่างเดียวกัน เมื่อ $a_n = 5$

---

[1] Rosen หน้า 295

[2] Johnsonbaugh หน้า 253

ผลเฉลย (a) สมมติว่า $a_n = 3n$ สำหรับ n ทุกตัว ซึ่งเป็นจำนวนเต็ม ไม่เป็นลบ

ดังนั้น สำหรับ $n \geq 2$ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} - a_{n-2} \\ &= 2[3(n-1)] - 3(n-2) \\ &= 6n - 6 - 3n + 6 \\ &= 3n \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ เมื่อ $a_n = 3n$ เป็นผลเฉลย ของ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

(b) สมมติว่า $a_n = 2^n$ สำหรับ n ทุกตัว ซึ่งเป็น จำนวนเต็ม ไม่เป็นลบ โปรดสังเกตว่า $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ เนื่องจาก $a_2 \neq 2a_1 - a_0 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ จะเห็นว่า $\{a_n\}$ เมื่อ $a_n = 2^n$ ไม่ใช่ผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

(c) สมมติว่า $a_n = 5$ สำหรับ n ทุกตัว ซึ่งเป็นจำนวนเต็มไม่เป็นลบ ดังนั้น สำหรับ $n \geq 2$ จะเห็นว่า $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2 \cdot 5 - 5 = 5$ เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ เมื่อ $a_n = 5$ เป็น ผลเฉลย ของ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

เงื่อนไขแรก สำหรับ ลำดับ คือ การกำหนด เทอม ซึ่ง อยู่ก่อนเทอมแรก เมื่อ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด มีผล (The **initial conditions** for a sequence specify the terms that precede the first term where the recurrence relation takes effect.)[3] เช่นในตัวอย่าง 1, $a_0 = 3$ และ $a_1 = 5$ เป็นเงื่อนไขแรก

ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด และเงื่อนไขแรก เป็นเพียงหนึ่งอย่างที่หาลำดับได้ เพราะว่า ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด รวมกับ เงื่อนไขแรก คือ บทนิยามการเรียกซ้ำ ของ ลำดับ เทอมใดๆ ก็ตามของลำดับ สามารถหาได้จาก เงื่อนไขแรก โดยใช้ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด จำนวนครั้งที่พอเพียง อย่างไรก็ตาม มีวิธีอื่นที่ดีกว่า สำหรับ การคำนวณ เทอมต่างๆ ของลำดับ ชนิดเฉพาะกรณี ซึ่ง นิยาม โดย ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด และเงื่อนไขแรก

การเป็นตัวแบบ กับ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

(Modeling with Recurrence Relations)

เราสามารถใช้ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด ให้เป็นตัวแบบ ของปัญหา ได้มากมาย เช่น

---

[3] Rosen หน้า 296

การคำนวณหาดอกเบี้ยทบต้น, การนับจำนวนกระต่ายบนเกาะแห่งหนึ่ง, การนับจำนวนครั้งของการย้ายแผ่น disks ใน ปริศนาหอคอยแห่งฮานอย และการนับจำนวนสายบิต ซึ่งมีคุณสมบัติที่กำหนดไว้

ตัวอย่าง 3 ชายคนหนึ่ง นำเงิน $10,000 ฝากธนาคาร เป็นบัญชีประเภทประจำ ได้รับดอกเบี้ย 11% ต่อปี คิดดอกเบี้ยทบต้นทุกปี หลังจาก 30 ปี ชายคนนี้ จะมีเงินในบัญชีจำนวนเท่าใด?

ผลเฉลย ให้ P_n แทน จำนวนเงินในบัญชี ณ สิ้นปีที่ n เพราะว่า จำนวนเงินในบัญชี หลังจาก n ปี เท่ากับ จำนวนเงินในบัญชี หลังจาก n - 1 ปี บวกกับ ดอกเบี้ย สำหรับ ปีที่ n จะเห็นว่า ลำดับ $\{P_n\}$ มีคุณสมบัติ ของ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

$$P_n = P_{n-1} + 0.11P_{n-1} = (1.11)P_{n-1}$$

เงื่อนไขแรก คือ $P_0 = 10,000$

เราใช้วิธีการทำซ้ำ (iterative approach) เพื่อหาสูตร ของ P_n

โปรดสังเกตว่า

$$P_1 = (1.11)P_0$$

$$P_2 = (1.11)P_1 = (1.11)^2P_0$$

$$P_3 = (1.11)P_2 = (1.11)^3P_0$$

$$P_n = (1.11)P_{n-1} = (1.11)^nP_0$$

เมื่อ ใส่เงื่อนไขแรก $P_0 = 10,000$ จะได้สูตร

$$P_n = (1.11)^n(10,000)$$

เราสามารถใช้ อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อสร้างความถูกต้องของมัน

สูตรนี้ ถูกต้อง สำหรับ $n = 0$ นั่นคือ เป็นไปตามเงื่อนไขแรก ขณะนี้สมมติว่า

$P_n = (1.11)^n(10,000)$ เป็นจริง

ดังนั้น จาก *ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด และ สมมติฐานอุปนัย*

$$P_{n+1} = (1.11)P_n = (1.11)(1.11)^n(10,000)$$

$$= (1.11)^{n+1}(10,000)$$

สิ่งนี้แสดงว่า สูตรชัดแจ้ง สำหรับ P_n เป็นจริง

การใส่ $n = 30$ ในสูตร $P_n = (1.11)^n(10,000)$ แสดงให้เห็นว่า หลังจาก 30 ปี จำนวนเงินในบัญชี เท่ากับ

$$P_{30} = (1.11)^{30}(10{,}000)$$
$$= \$228{,}922.97$$

ตัวอย่าง 4 ณ เกาะแห่งหนึ่ง มีลูกกระต่ายอยู่ 1 คู่ (สองเพศ) กระต่ายคู่นี้จะยังไม่ให้ลูก จนกว่ามันจะมีอายุครบสองเดือน หลังจากมีอายุได้สองเดือน กระต่ายแต่ละคู่ จะให้ลูกอีกหนึ่งคู่ ในแต่ละเดือน ดูรูป 5.1 จงหาความสัมพันธ์เวียนบังเกิด สำหรับ จำนวนคู่ ของกระต่ายบนเกาะ หลังจาก เดือน โดยสมมติว่า ไม่มีกระต่ายตัวใดตาย

	Month	Reproducing pairs	Young pairs	Total pairs
	1	0	1	1
	2	0	1	1
	3	1	1	2
	4	1	2	3
	5	2	3	5
	6	3	5	8
Reproducing pairs Young pairs				

รูป 5.1.1 กระต่ายบนเกาะ

ผลเฉลย

ให้ f_n แทน จำนวนคู่ ของ กระต่าย หลังจาก n เดือน เราจะแสดงให้เห็นว่า f_n, n = 1, 2, 3, ... เป็นเทอมต่างๆ ของ ลำดับฟิโบแนชชี (Fibonacci sequence)

ประชากรกระต่าย สามารถทำเป็นตัวแบบ โดยใช้ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด ณ สิ้นเดือนแรก จำนวนคู่ของกระต่ายบนเกาะ คือ $f_1 = 1$ เพราะว่ากระต่ายคู่นี้ ยังไม่ให้ลูก ระหว่างเดือนที่สอง $f_2 = 1$ เช่นกัน การหาจำนวนคู่ของกระต่าย หลังจากเดือนที่ n ให้บวก จำนวนกระต่ายบนเกาะ ของเดือนก่อน f_{n-1}, กับจำนวนกระต่ายคู่ที่เกิดใหม่ ซึ่งเท่ากับ f_{n-2} เพราะว่ากระต่ายคู่ใหม่แต่ละคู่ มาจากกระต่ายหนึ่งคู่ ซึ่งมีอายุอย่างน้อยที่สุด สองเดือน เพราะฉะนั้น ลำดับ $\{f_n\}$ มีคุณสมบัติของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

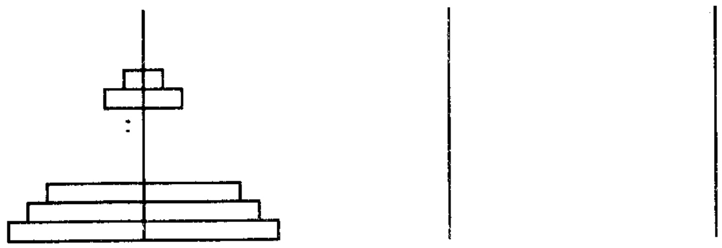
$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{สำหรับ} \quad n \geq 3$$

ที่มี เงื่อนไขแรก

$$f_1 = 1 \quad \text{และ} \quad f_2 = 1$$

เพราะว่า ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดนี้ และเงื่อนไขแรก หาลำดับนี้ เพียงหนึ่งอย่าง ได้จำนวนคู่ของกระต่ายบนเกาะ หลังจาก n เดือน จึงถูกกำหนด โดย จำนวนฟีโบแนชชี เทอมที่ n

ตัวอย่าง 5 ปริศนาซึ่ง เป็นที่รู้จักกันอย่างกว้างขวาง ในปลายศตวรรษที่ 19 คือ หอคอยแห่งฮานอย (the Tower of Hanoi) ซึ่งประกอบด้วยหลัก 3 อันติดอยู่บนกระดาน รวมทั้งมีแผ่น disks ขนาดแตกต่างกัน ตอนเริ่มต้น แผ่น disks เหล่านี้วางอยู่บนหลักที่หนึ่ง เรียงขนาดตามลำดับ แผ่นใหญ่ที่สุด อยู่ตอนล่าง ดูรูป 5.1.2



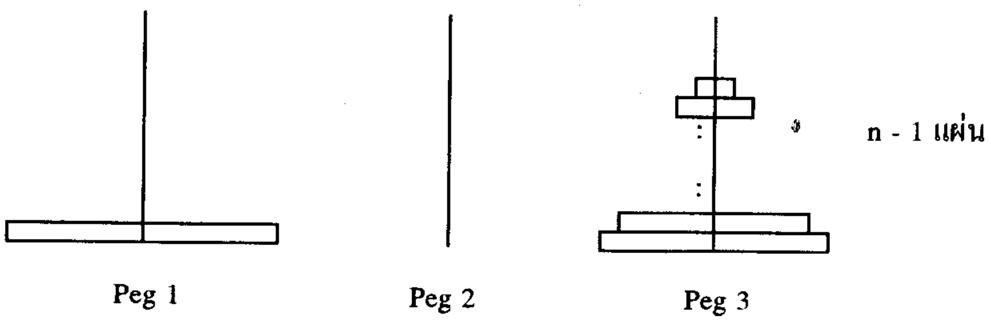
Peg 1 Peg 2 Peg 3

รูป 5.1.2 The Initial Position in the Tower of Hanoi

กฎของปริศนา ให้ย้ายแผ่น disk ได้ครั้งละหนึ่งแผ่น จาก หลักหนึ่ง ไปยังอีกหลักหนึ่ง ตราบใดที่ แผ่น disk นั้น ไม่ได้วางอยู่เหนือ แผ่น disk ที่มีขนาดเล็กกว่า เป้าหมายของปริศนานี้คือ ให้แผ่น disks ทั้งหมด วางอยู่บนหลักที่สอง เรียงตามลำดับขนาด แผ่นซึ่งมีขนาดใหญ่ที่สุดอยู่ตอนล่าง

ให้ H_n แทน จำนวนครั้ง ของ การย้ายแผ่น disks เพื่อแก้ปัญหา หอคอยแห่งฮานอยที่มี disks n แผ่น จงสร้าง ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด สำหรับ ลำดับ $\{H_n\}$

ผลเฉลย เริ่มต้นด้วย disks จำนวน n แผ่นวางอยู่บนหลักที่ 1 เราสามารถย้าย disks จำนวน n - 1 แผ่นที่อยู่ตอนบน ตามกฎ ของปริศนา ไปยังหลักที่ 3 โดยย้าย H_{n-1} ครั้ง ดูรูป 5.1.3 แผ่น disk ที่มีขนาดใหญ่ที่สุด ยังคงที่ ระหว่างการย้ายเหล่านี้ จากนั้นย้ายอีกหนึ่งครั้ง เอาแผ่น disk ขนาดใหญ่ที่สุด ไปยังหลักที่สอง แล้วย้าย disks จำนวน n - 1 แผ่น จากหลักที่ 3 ไปยัง



รูป 5.1.3 An Intermediate Position in the Tower of Hanoi

หลักที่ 2 โดยใช้การย้ายจำนวน H_{n-1} ครั้งที่เพิ่มขึ้น วางทั้งหมดนี้ ตอนบนสุดของ disk ที่มีขนาดใหญ่ที่สุด ซึ่งยังคงอยู่ที่ตอนล่างสุด ของหลักที่ 2 นอกจากนี้ จะเห็นว่า ปริศนาจะไม่สามารถ แก้ปัญหาได้ โดยใช้ขั้นตอนน้อยกว่านี้ สิ่งนี้แสดงว่า

$$H_n = 2H_{n-1} + 1$$

เงื่อนไขแรก คือ $H_1 = 1$ เนื่องจาก disk หนึ่งแผ่น ย้ายจากหลักที่ 1 ไปยัง หลักที่ 2 เป็นไปตามกฎ ของปริศนา ในการย้ายหนึ่งครั้ง

เราสามารถใช้วิธีทำซ้ำ เพื่อแก้ปัญหา ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดนี้ โปรดสังเกตว่า

$$\begin{aligned}
H_n &= 2H_{n-1} + 1 \\
&= 2(2H_{n-2} + 1) + 1 = 2^2H_{n-2} + 2^1 + 1 \\
&= 2^2(2H_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3H_{n-3} + 2^2 + 2^1 + 2^0 \\
&\vdots \\
&= 2^{n-1}H_1 + 2^{n-2} + \ldots + 2^2 + 2^1 + 2^0 \\
&= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2^1 + 2^0 \\
&= 2^n - 1
\end{aligned}$$

เราใช้ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด ทำซ้ำเพื่อแสดง H_n ในเทอม ของ เทอมก่อนหน้า ของลำดับ ในขั้นตอน ก่อน สมการสุดท้าย เงื่อนไขแรก $H_1 = 1$ ถูกนำมาใช้ สมการสุดท้ายขึ้นอยู่กับ สูตรหาผลบวกสะสมของเทอมของอนุกรมเรขาคณิต

การทำซ้ำ ที่ให้ผลเฉลย กับ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด $H_n = 2H_{n-1} + 1$ ที่มีเงื่อนไขแรก $H_1 = 1$ สูตรนี้พิสูจน์ได้ โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

นิทานโบราณ เล่าว่า มีหอคอย ในเมือง ฮานอย ซึ่งบรรดาพระกำลังย้าย แผ่น disk

ทองคำ จำนวน 64 แผ่น จาก หลักหนึ่ง ไปยังอีกหลักหนึ่ง เป็นไปตามกฎของปริศนา เขาใช้เวลา หนึ่งวินาที ในการย้ายแผ่น disk หนึ่งแผ่น นิทานพูดว่า โลกกำลังจะถึงกาลสิ้นสุดเมื่อพระย้ายแผ่น disk ทองคำสำเร็จ หลังจากที่บรรดาพระเริ่มต้นทำงาน จนกระทั่งถึงกาลเวลาสิ้นสุดของโลก จะใช้เวลานานเท่าใด?

จากสูตรชัดแจ้ง จะต้องย้ายทั้งหมด

$$2^{64} - 1 = 18{,}446{,}744{,}073{,}709{,}551{,}615 \text{ ครั้ง}$$

ในการย้ายแผ่น disks ทั้งหมด ย้ายหนึ่งครั้ง ใช้เวลา 1 วินาที ซึ่งจะต้องใช้เวลาทั้งหมด 500 พันล้านปี เพื่อแก้ปัญหานี้ ดังนั้น โลกจึงได้รอดพ้นมาได้ นานกว่าที่มันผ่านมาแล้ว

แบบฝึกหัด 5.1

1. จงหาห้าเทอมแรก ของลำดับ ซึ่งนิยาม โดย ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด และเงื่อนไขแรก แต่ละข้อ ข้างล่างนี้

   a) $a_n = 6a_{n-1}$, $a_0 = 2$

   b) $a_n = a^2_{n-1}$, $a_1 = 2$

   c) $a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2}$, $a_0 = 1, a_1 = 2$

   d) $a_n = na_{n-1} + a^2_{n-2}$, $a_0 = 1, a_1 = 1$

   e) $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$, $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 0$

2. จงแสดงให้เห็นว่า ลำดับ $\{a_n\}$ คือ *ผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด*

   $a_n = -3a_{n-1} + 4a_{n-2}$ ถ้า

   a) $a_n = 0$

   b) $a_n = 1$

   c) $a_n = (-4)^n$

   d) $a_n = 2(-4)^n + 3$

3. ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นผลเฉลย ของ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด $a_n = 8a_{n-1} + 16a_{n-2}$ หรือไม่? ถ้า

   a) $a_n = 0$

   b) $a_n = 1$

   c) $a_n = 2^n$

   d) $a_n = 4^n$

   e) $a_n = n4^n$

   h) $a_n = n^2 4^n$

f) $a_n = 2 \cdot 4^n + 3n4^n$

g) $a_n = (-4)^n$

4. สำหรับ ลำดับแต่ละข้อ ข้างล่างนี้ จงหาความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (คำตอบ ไม่เป็นเพียงหนึ่งอย่าง (are not unique) เพราะว่าความสัมพันธ์เวียนบังเกิดที่มีคุณสมบัติเช่นนี้มีจำนวนมากไม่จำกัด)

a) $a_n = 3$

b) $a_n = 2n$

c) $a_n = 2n + 3$

d) $a_n = 5^n$

e) $a_n = n^2$

f) $a_n = n^2 + n$

g) $a_n = n + (-1)^n$

h) $a_n = n!$

5. จงหาผลเฉลย ของ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด และเงื่อนไขแรก ของลำดับแต่ละข้อ ข้างล่างนี้ ให้ใช้วิธีการทำซ้ำ (Use an iteration approach) เช่นเดียวกับที่ใช้ ในตัวอย่างที่ 5

a) $a_n = 3a_{n-1}$, $a_0 = 2$

b) $a_n = a_{n-1} + 2$, $a_0 = 3$

c) $a_n = a_{n-1} + n$, $a_0 = 1$

d) $a_n = a_{n-1} + 2n + 3$, $a_0 = 4$

e) $a_n = 2a_{n-1} - 1$, $a_0 = 1$

f) $a_n = 3a_{n-1} + 1$, $a_0 = 1$

g) $a_n = na_{n-1}$, $a_0 = 1$

h) $a_n = 2na_{n-1}$, $a_0 = 1$

6. ชายคนหนึ่ง มีเงิน $1000 นำไปฝากธนาคารประเภทประจำ ซึ่งให้ดอกเบี้ยทบต้น อัตรา 9% ต่อปี

a) จงหาความสัมพันธ์เวียนบังเกิด สำหรับ จำนวนเงิน ในบัญชี ณ สิ้นปีที่ n

b) จงหาสูตรชัดแจ้ง สำหรับ จำนวนเงิน ในบัญชี ณ สิ้นปีที่ n

c) ในบัญชี จะมีจำนวนเงินเท่าใด? หลังจากฝากครบ 100 ปี

7. สมมติว่า จำนวนแบคทีเรีย ใน โคโลนี แห่งหนึ่ง เพิ่มจำนวนเป็น สามเท่าทุกชั่วโมง

a) จงหาความสัมพันธ์เวียนบังเกิด สำหรับ จำนวนของแบคทีเรีย หลังจากผ่านไป n ชั่วโมง

b) ถ้ามีแบคทีเรีย จำนวน 100 ตัว เมื่อตอนเริ่มต้น โคโลนีใหม่ หลังจาก 10 ชั่วโมง จะมีจำนวนแบคทีเรีย ใน โคโลนี จำนวนเท่าใด?

8. สมมติว่าในปี ค.ศ. 1988 จำนวนประชากร ในโลกนี้มี 6 พันล้านคน และมีอัตราเพิ่มขึ้น 3% ทุกปี

   a) จงหาความสัมพันธ์เวียนบังเกิด ของ จำนวนประชากรในโลก หลังจากผ่านปี 1988 ไป n ปี

   b) จงหาสูตรชัดแจ้งของจำนวนประชากรในโลก หลังจากผ่าน ปี 1988 ไป n ปี

   c) จะมีประชากรในโลกเป็นจำนวนเท่าใด ณ ปี 2001

9. โรงงานแห่งหนึ่ง มีอัตราการผลิตรถยนต์สำหรับแข่งขันเพิ่มขึ้น ดังนี้ ในเดือนแรกผลิตได้ เพียงหนึ่งคัน ในเดือนที่สอง ผลิตได้ สองคัน เช่นนี้เรื่อยไป และในเดือนที่ n ผลิตรถแข่ง ได้ n คัน

   a) จงหาความสัมพันธ์เวียนบังเกิด สำหรับ จำนวนรถยนต์ซึ่งผลิตได้ใน เดือนที่ n แรก ของ โรงงานนี้

   b) ในปีแรก โรงงานแห่งนี้ผลิตรถยนต์ได้กี่คัน?

   c) จงหาสูตรชัดแจ้ง สำหรับ จำนวนรถยนตร์ ซึ่งผลิตได้ใน n เดือนแรก โดยโรงงานแห่งนี้

10. พนักงานซึ่งทำงาน ในบริษัทแห่งหนึ่ง ในปี ค.ศ. 1987 ได้รับเงินเดือนแรก $50,000 ทุกๆ ปี พนักงานคนนี้ ได้รับเงินเดือน เพิ่มขึ้นอีก $1000 บวกกับ 5% ของเงินเดือน ในปีที่ผ่านมา

   a) จงหาความสัมพันธ์เวียนบังเกิด สำหรับเงินเดือน ของ พนักงานคนนี้ หลังจากผ่านปี 1987 ไป n ปี

   b) จงคำนวณหาเงินเดือน ของ พนักงานคนนี้ ในปี 1995

   c) จงหาสูตรชัดแจ้ง สำหรับเงินเดือน ของ พนักงานคนนี้ หลังจากผ่านปี 1987 ไป n ปี

5.2 การแก้ปัญหาความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

(Solving Recurrence Relations)

ลำดับ ซึ่งนิยาม แบบเวียนเกิด เกิดขึ้นบ่อย ในวิชาคณิตศาสตร์ และวิชาวิทยาศาสตร์ และมี เทคนิค หลายวิธี สำหรับการ หาสูตรชัดแจ้ง ของ ความสัมพันธ์ เวียนบังเกิดเหล่านั้น ในที่นี้ จะให้เพียงหนึ่ง ทฤษฎีบท เท่านั้น ซึ่งใช้ แก้ปัญหา ความสัมพันธ์ เวียนบังเกิดในรูปแบบ

$$\boxed{S_n = aS_{n-1} + bS_{n-2}}$$

ในที่นี้ a และ b เป็นค่าคงที่ (constants) และสมมติว่า มีการกำหนดค่าแรก ให้กับ S_0 และ S_1

กรณี $a = 0$ หรือ $b = 0$ เป็นกรณีง่ายที่สุด ในการแก้ปัญหา ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

- ถ้า $b = 0$ จะได้ $S_n = aS_{n-1}$ สำหรับ $n \geq 1$

ดังนั้น

$$S_1 = aS_0$$
$$S_2 = aS_1 = a^2S_0$$
$$S_3 = aS_2 = a^3S_0$$
$$\vdots$$

จากหลักอุปนัยเบื้องต้น แสดงให้เห็นว่า

$$\boxed{S_n = a^nS_0}$$ สำหรับทุกค่า $n \in N$ [1]

- ถ้า $a = 0$ จะได้ $S_n = bS_{n-2}$

$$S_2 = bS_0$$
$$S_4 = bS_2 = b^2S_0$$
$$S_6 = bS_4 = b^3S_0$$

เพราะฉะนั้น

$$\boxed{S_{2n} = b^nS_0}$$ สำหรับทุกค่า $n \in N$

---

[1] N = set of nonnegative integer

ในทำนองเดียวกัน

$$S_3 = bS_1$$
$$S_5 = bS_3 = b^2S_1$$
$$S_7 = bS_5 = b^3S_1$$

เพราะฉะนั้น

$$\boxed{S_{2n+1} = b^nS_1} \qquad \text{สำหรับทุกค่า } n \in N$$

ตัวอย่าง 1 (a) จงพิจารณา ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด $S_n = 3S_{n-1}$ ที่มี $S_0 = 5$

ในที่นี้ $a = 3$ และ จากสูตร $S_n = a^nS_0$

จะได้

$$S_n = 3^n \cdot 5 \qquad \text{สำหรับ } n \in N$$

(b) จงพิจารณาความสัมพันธ์เวียนบังเกิด $S_n = 3S_{n-2}$ ที่มี $S_0 = 5$ และ $S_1 = 2$

ในที่นี้ $b = 3$ ดังนั้น จากสูตร

จะได้

$$S_{2n} = 3^n \cdot 5$$

และ

$$S_{2n+1} = 3^n \cdot 2 \qquad \text{สำหรับ } n \in N$$

- สมมติว่า $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ ขณะนี้ เรายังไม่สนใจค่าที่กำหนดให้ของ S_0 และ S_1 สิ่งที่มีเหตุผลคือ ผลเฉลย บางอย่าง มีรูปแบบ $S_n = cr^n$ สำหรับ ค่าคงที่ c บางตัว ถ้าสิ่งนี้เป็นจริง แสดงว่า

$$r^n = ar^{n-1} + br^{n-2}$$

สมการข้างต้น หารด้วย r^{n-2}

จะได้

$$r^2 = ar + b \text{ หรือ } r^2 - ar - b = 0$$

พูดอีกอย่างหนึ่งคือ ถ้า $S_n = cr^n$ สำหรับทุกค่า n

ดังนั้น r ต้องเป็น ผลเฉลย ของ สมการกำลังสอง

$$x^2 - ax - b = 0$$

ซึ่งเรียกว่า **สมการลักษณะเฉพาะ** (characteristic equation) ของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

สมการลักษณะเฉพาะ จะมีผลเฉลย หนึ่งอย่าง หรือ สองอย่าง ซึ่ง ขณะนี้ สมมติ ว่าเป็นจำนวนจริง

ทฤษฎีบท จงพิจารณาความสัมพันธ์เวียนบังเกิด ของ รูปแบบ

$$S_n = aS_{n-1} + bS_{n-2}$$

ที่มี สมการลักษณะเฉพาะ

$$x^2 - ax - b = 0$$

เมื่อ a และ b เป็นค่าคงที่ ไม่ใช่ศูนย์

(a) ถ้าสมการลักษณะเฉพาะ มีผลเฉลยเป็น r_1 และ r_2 แตกต่างกัน จะได้

$$\boxed{S_n = c_1r_1^n + c_2r_2^n} \qquad \text{———— (1)}$$

สำหรับค่าคงที่ c_1 และ c_2 ถ้า S_0 และ S_1 ถูกกำหนดค่าให้แล้ว ตัวคงที่สองตัวนี้คำนวณหาได้ โดย ให้ n = 0 และ n = 1 ในสมการที่ 1 และแก้ปัญหา สองสมการนี้[2] เพื่อหาค่า c_1 และ c_2

(b) ถ้าสมการลักษณะเฉพาะ มีผลเฉลยเพียง หนึ่งตัวเท่านั้น คือ r จะได้

$$\boxed{S_n = c_1r^n + c_2\cdot n\cdot r^n} \qquad \text{———— (2)}$$

สำหรับค่าคงที่ c_1 และ c_2 เช่นเดียวกับ ข้อ (a) ถ้า S_0 และ S_1 ถูกกำหนดค่ามาให้ จะสามารถหาค่า c_1 และ c_2 ได้

ข้อสังเกต ทฤษฎีบท ข้างต้นนี้ ประยุกต์ใช้ได้เฉพาะกับ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดในรูปแบบ $S_n = aS_{n-1} + bS_{n-2}$ เท่านั้น

ตัวอย่าง 2 จงพิจารณาความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

$$S_n = S_{n-1} + 2S_{n-2}$$

ที่มี $S_0 = S_1 = 3$

---

[2] มีสองสมการ และมีตัว ไม่ทราบค่า (unknowns) สองตัว จะสามารถแก้สมการได้เสมอ

ในที่นี้ $a = 1, b = 2$ มีสมการลักษณะเฉพาะ

$$x^2 - x - 2 = 0 \text{ หรือ } (x - 2)(x + 1) = 0$$

ซึ่งผลเฉลย คือ $r_1 = 2, r_2 = -1$

จากทฤษฎีบท

$$S_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$$
$$= c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot (-1)^n$$

สำหรับค่าคงที่ c_1 และ c_2

ให้ $n = 0$ และ $n = 1$ จะได้

$$S_0 = c_1 \cdot 2^0 + c_2 \cdot (-1)^0 = c_1 + c_2 = 3$$

และ

$$S_1 = c_1 \cdot 2^1 + c_2 \cdot (-1)^1 = 2c_1 - c_2 = 3$$

ดังนั้น หลังจากแก้สองสมการข้างต้น $c_1 = 2$ และ $c_2 = 1$

สรุปว่า

$$S_n = 2 \cdot 2^n + 1 \cdot (-1)^n$$
$$= 2^{n+1} + 1 \cdot (-1)^n \qquad \text{สำหรับ } n \in N$$

ตัวอย่าง 3 จงพิจารณา ลำดับ Fibonacci ซึ่งแทนด้วย (S_n) นิยามดังนี้ $S_0 = S_1 = 1$ และ $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$ สำหรับ $n \geq 2$

ในที่นี้ $a = b = 1$, สมการลักษณะเฉพาะคือ

$$x^2 - x - 1 = 0$$

จากสูตรสมการกำลังสอง [3] สมการข้างต้นนี้ มี ผลเฉลย สองชุด คือ

$$r = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)\cdot(-1)}}{2 \cdot 1}$$

---

[3] สมการกำลังสอง $ax^2 + bx + c = 0$ มีรากอยู่สองตัว คือ

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

จากสูตร ข้อ (a) ของทฤษฎีบท

$$S_n = c_1r_1^n + c_2r_2^n$$

$$\therefore \quad S_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

ให้ $n = 0$

$$\therefore \quad S_0 = c_1r_1^0 + c_2r_2^0 = c_1 + c_2 = 1 \qquad \text{———— (1)}$$

ให้ $n = 1$

$$S_1 = c_1r_1^1 + c_2r_2^1 = c_1r_1 + c_2r_2 = 1 \qquad \text{———— (2)}$$

ถ้าเราแทน c_2 ด้วย $1 - c_1$ ในสมการที่ (2)

จะได้

$$1 = c_1r_1 + (1 - c_1)r_2$$

$$1 = c_1r_1 + r_2 - c_1r_2$$

$$1 - r_2 = c_1(r_1 - r_2)$$

$$c_1 = \frac{1 - r_2}{r_1 - r_2}$$

เนื่องจาก $r_1 + r_2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$

และ $r_1 - r_2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \sqrt{5}$

สรุปได้ว่า

$$c_1 = \frac{r_1}{\sqrt{5}}$$

จากสมการ (1)

$$c_2 = 1 - c_1 = 1 - \frac{r_1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - r_1}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{r_1 - r_2 - r_1}{\sqrt{5}} = -\frac{r_2}{\sqrt{5}}$$

แทนค่าในสูตร

$$S_n = c_1 r_1^{\,n} + c_2 r_2^{\,n}$$

$$= \frac{r_1}{\sqrt{5}} \cdot r_1 - \frac{r_2}{\sqrt{5}} \cdot r_2^{\,n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(r_1^{\,n+1} - r_2^{\,n+1}\right)$$

$$\therefore\ S_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{2}{(1+\sqrt{5})^{n+1}} - \frac{2}{(1-\sqrt{5})^{n+1}} \right]$$

ตัวอย่าง 4 จงพิจารณา ลำดับ (S_n) นิยามโดย $S_0 = 1,\ S_1 = -3$ และ $S_n = 6S_{n-1} - 9S_{n-2}$ สำหรับ $n \geq 2$

ในที่นี้ สมการลักษณะเฉพาะ คือ

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x-3)(x-3) = 0$$

มีผลเฉลยเพียงหนึ่งตัวเท่านั้น คือ $r = 3$

จากข้อ (b) ของทฤษฎีบท

$$S_n = c_1 r^n + c_2 \cdot n \cdot r^n$$

$$S_n = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot n \cdot 3^n \qquad \text{สำหรับ } n \in N$$

ให้ $n = 0$ และ $n = 1$ จะได้

$$S_0 = c_1 \cdot 3^0 + c_2 \cdot 0 \cdot 3^0 = c_1 = 1$$

$$S_1 = c_1 \cdot 3^1 + c_2 \cdot 1 \cdot 3^1 = 3c_1 + 3c_2 = -3$$

ดังนั้น $c_1 = 1$ และ $c_2 = -2$

เพราะฉะนั้น

$$S_n = 3^n + 2 \cdot n \cdot 3^n \qquad \text{สำหรับ } n \in N$$

แบบฝึกหัด 5.2

1. จงหาสูตรชัดแจ้ง สำหรับ S_n เมื่อ $S_0 = 3$ และ $S_n = -2S_{n-1}$ สำหรับ $n \geq 1$
2. (a) จงหาสูตรชัดแจ้ง สำหรับ $S_n = 4S_{n-2}$ เมื่อ $S_0 = S_1 = 1$

   (b) ทำซ้ำข้อ (a) สำหรับ $S_0 = 1$ และ $S_1 = 2$
3. จงหาสูตรชัดแจ้ง สำหรับ S_n เมื่อ $S_0 = 3, S_1 = 6$ และ $S_n = S_{n-1} + 2S_{n-2}$ สำหรับ $n \geq 2$
4. ทำซ้ำข้อ 3 โดยให้ $S_0 = 3$ และ $S_1 = -3$
5. จงพิจารณา ลำดับ (S_n) เมื่อ $S_0 = 2, S_1 = 1$ และ $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$ สำหรับ $n \geq 2$

   (a) คำนวณหา S_n สำหรับ $n = 2, 3, 4, 5$ และ 6

   (b) จงหาสูตรชัดแจ้ง ของ S_n
6. ในแต่ละกรณีข้างล่างนี้ จงหาสูตรชัดแจ้ง ของ S_n

   (a) $S_0 = 2, S_1 = -1$ และ $S_n = -S_{n-1} + 6S_{n-2}$ สำหรับ $n \geq 2$

   (b) $S_0 = 2$ และ $S_n = 5 \cdot S_{n-1}$ สำหรับ $n \geq 1$

   (c) $S_0 = 1, S_1 = 8$ และ $S_n = 4S_{n-1} - 4S_{n-2}$ สำหรับ $n \geq 2$

   (d) $S_0 = c, S_1 = d$ และ $S_n = 5S_{n-1} - 6S_{n-2}$ สำหรับ $n \geq 2$

   ในที่นี้ c และ d เป็น ตัวคงที่ ไม่กำหนดค่า (unspecified constants)

   (e) $S_0 = 1, S_1 = 4$ และ $S_n = S_{n-2}$ สำหรับ $n \geq 2$

   (f) $S_0 = 1, S_1 = 2$ และ $S_n = 3 \cdot S_{n-2}$ สำหรับ $n \geq 2$

   (g) $S_0 = 1, S_1 = -3$ และ $S_n = -2S_{n-1} + 3S_{n-2}$ สำหรับ $n \geq 2$

   (h) $S_0 = 1, S_1 = 2$ และ $S_n = -2S_{n-1} + 3S_{n-2}$ สำหรับ $n \geq 2$

5.3 ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดเอกพันธุ์เชิงเส้น ขององศา k ที่มีสัมประสิทธิ์คงที่

(Linear Homogeneous Recurrence Relation of Degree k with Constant Coefficients)

ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดมากมายเกิดขึ้นในตัวแบบต่างๆ (models) ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดเหล่านี้ บางชนิด สามารถแก้ปัญหาได้ โดยใช้ การทำซ้ำ (iteration) หรือโดยการใช้เทคนิค ad hoc อย่างไรก็ตาม มีความสัมพันธ์เวียนบังเกิด ชนิดหนึ่ง ซึ่ง สำคัญ และสามารถแก้ปัญหาได้อย่างชัดแจ้ง ใน วิธีเชิงระบบ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดเหล่านี้ ซึ่งแสดงให้เห็น ในเทอมของลำดับ เช่นการจัดหมู่เชิงเส้น ของ เทอมต่างๆ ซึ่งอยู่ก่อนหน้า

บทนิยาม ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดเอกพันธุ์เชิงเส้น ขององศา k ที่มีสัมประสิทธิ์คงที่ หมายถึง ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด ของรูปแบบ

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \dots + c_ka_{n-k}$$

เมื่อ $c_1, c_2, \dots, c_k$ เป็นจำนวนจริง และ $c_k \neq 0$

ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด ในบทนิยาม ข้างต้นนี้ เป็นเชิงเส้น (linear) เพราะว่า ส่วนที่อยู่ทางด้านขวามือ ของเครื่องหมายเท่ากับ คือ ผลบวกสะสม ของ ผลคูณต่างๆ ของ เทอมก่อนหน้า ของลำดับ (is a sum of multiples of the previous terms of the sequence.)

ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด เป็น เอกพันธุ์ (homogeneous) เพราะว่า ไม่มีเทอมใดๆ เลย ซึ่งเป็นผลคูณต่างๆ ของ a_js (since no terms occur that are not multiples of the a_js.)

สัมประสิทธิ ของ เทอมต่างๆ ของลำดับ ทั้งหมด เป็น ตัวคงที่ (constants) ไม่ใช่ฟังก์-ชัน ซึ่งขึ้นอยู่กับค่า n

องศา k (degree k) เพราะว่า a_n แสดงให้เห็นในเทอม ของ k เทอมก่อนหน้า ของลำดับ

(because a_n is expressed in terms of the previous k terms of the sequence.)

ดังนั้น โดย กฎข้อที่สอง ของหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ที่ว่า ลำดับ ซึ่งมีคุณสมบัติ ของ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด ใน บทนิยาม สามารถหาได้ เป็นเพียงหนึ่งอย่าง โดย ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดนี้ และ k เงื่อนไขแรก

$$a_0 = C_0,\ a_1 = C_1,\ \dots,\ a_{k-1} = C_{k-1}$$

ตัวอย่าง 1

ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด $P_n = (1.11)P_{n-1}$ หมายถึง ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดเอกพันธุ์เชิงเส้น ของ องศา เท่ากับ หนึ่ง

ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ หมายถึง ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดเอกพันธุ์เชิงเส้น ขององศา เท่ากับ สอง

ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด $a_n = a_{n-5}$ หมายถึง ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดเอกพันธุ์เชิงเส้น ของ องศา เท่ากับ ห้า

ตัวอย่าง 2

ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

$$a_n = a_{n-1} + a^2_{n-2}$$

ไม่ใช่เชิงเส้น (is not linear)

ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

$$H_n = 2H_{n-1} + 1$$

ไม่ใช่เอกพันธุ์ (is not homogeneous)

ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

$$B_n = nB_{n-1}$$

ไม่มีสัมประสิทธิเป็นตัวคงที่ (does not have constant coefficients)

ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

$$a_n = 3a_{n-1}\, a_{n-2}$$

ไม่ใช่ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดเอกพันธุ์เชิงเส้น ที่มีสัมประสิทธิคงที่ เพราะว่า แต่ละเทอม ไม่ได้อยู่ ในรูปแบบ ca_k

ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

$$a_n = 3na_{n-1}\, a_{n-2}$$

ไม่ใช่ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดเอกพันธุ์เชิงเส้น ที่มีสัมประสิทธิคงที่ เพราะว่า $3n$ ไม่ใช่ตัวคงที่

ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดเอกพันธุ์เชิงเส้น ถูกนำมาศึกษา ด้วยเหตุผลสองประการคือ

ข้อแรก ความสัมพันธ์เหล่านี้ เกิดขึ้นบ่อยใน ตัวแบบ ของปัญหาต่างๆ (First, they often occur in modeling of problems.)

ข้อที่สอง ความสัมพันธ์เหล่านี้ สามารถแก้ปัญหา ได้อย่างเป็นระบบ (Second, they can be systematically solved.)

การแก้ปัญหา ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดเอกพันธุ์เชิงเส้น ที่มีสัมประสิทธิ เป็นตัวคงที่

(Solving Linear Homogeneous Recurrence Relations with Constant Coefficients)

หลักเบื้องต้น สำหรับการแก้ปัญหา ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดเอกพันธุ์เชิงเส้น คือ ดูผลเฉลยของรูปแบบ $a_n = r^n$ เมื่อ r เป็นตัวคงที่ โปรดสังเกตว่า $a_n = r^n$ คือผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$$

ก็ต่อเมื่อ

$$r^n = c_1r^{n-1} + c_2r^{n-2} + \ldots + c_kr^{n-k}$$

เมื่อ ทั้งสองข้าง ของสมการนี้ หารด้วย r^{n-k} และเอาทางด้านขวามือ ไปลบออกจากทางด้านซ้ายมือ จะได้สมการที่เท่ากันดังนี้

$$r^k - c_1r^{k-1} - c_2r^{k-2} - \ldots - c_{k-1}r - c_k = 0$$

ดังนั้น ลำดับ $\{a_n\}$ ที่มี $a_n = r^n$ เป็นผลเฉลย ก็ต่อเมื่อ r เป็นผลเฉลยของสมการสุดท้าย ซึ่งเรียกว่า **สมการลักษณะเฉพาะ** (characteristic equation) ของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด ผลเฉลยของสมการนี้ เรียกว่า **ค่าเจาะจง** (characteristic roots) ของ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด จะเห็นว่า ค่าเจาะจงเหล่านี้ นำไปใช้ ในการให้ สูตรชัดแจ้ง สำหรับผลเฉลย ทั้งหมดของ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

ขณะนี้ เรากำลังสนใจความสัมพันธ์เวียนบังเกิด เอกพันธุ์เชิงเส้น ขององศา เท่ากับ สอง **สิ่งแรก** พิจารณา กรณีที่มีรากเจาะจง สองตัว แตกต่างกัน

ทฤษฎีบท 1 ให้ c_1 และ c_2 เป็นจำนวนจริง สมมติว่า $r^2 - c_1r_1 - c_2 = 0$ มีรากสองตัวแตกต่างกัน คือ r_1 และ r_2 ดังนั้น ลำดับ $\{a_n\}$ คือ ผลเฉลย ของ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$$

ก็ต่อเมื่อ

$$a_n = \alpha_1r_1^n + \alpha_2r_2^n$$ สำหรับ $n = 0, 1, 2, \ldots,$ เมื่อ α_2 และ α_2 เป็นตัวคงที่

ตัวอย่าง 3 จงหาผลเฉลย ของ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

(What is the solution of the recurrence relation.)

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

ที่มี $a_0 = 2$ และ $a_1 = 7$

ผลเฉลย จากทฤษฎีบท สมการลักษณะเฉพาะของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด คือ

$$r^2 - r - 2 = 0$$

$$(r + 1)(r - 2) = 0$$

จะได้ รากเจาะจง สองตัวแตกต่างกัน คือ $r_1 = 2$, $r_2 = -1$

ดังนั้น จากทฤษฎีบท ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นผลเฉลย ของ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

ก็ต่อเมื่อ $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 (r_2)^n$

$$\therefore \quad a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2(-1)^n \qquad (1)$$

สำหรับตัวคงที่ α_1 และ α_2

จากเงื่อนไขแรก แทนค่า a_0 และ a_1 ในสมการ (1)

$$a_0 = 2 = \alpha_1 2^0 + \alpha_2(-1)^0 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$a_1 = 7 = \alpha_1 2^1 + \alpha_2(-1)^1 = 2\alpha_1 - \alpha_2$$

จาก สองสมการข้างต้นนี้

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2$$

$$2\alpha_1 - \alpha_2 = 7$$

แสดงว่า $\alpha_1 = 3$ และ $\alpha_2 = -1$

ดังนั้น ผลเฉลย ของ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด และเงื่อนไขแรก คือ ลำดับ $\{a_n\}$ ที่มี

$$a_n = 3 \cdot 2^n - (-1)^n$$

ตัวอย่าง 4 จงหาสูตรชัดแจ้ง ของ จำนวนฟีโบแนชชี

(Find an explicit formula for the Fibonacci numbers.)

ผลเฉลย ตามที่ทราบแล้วว่า ลำดับ ของจำนวนฟีโบแนชชี จะมีความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

และ มีเงื่อนไขแรก

$$f_0 = 0 \text{ และ } f_1 = 1$$

ดังนั้น รากเจาะจง ของ สมการลักษณะเฉพาะ $r^2 - r - 1 = 0$

ได้แก่ $r = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$ [2]

$$= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore\ r_1 = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} \quad \text{และ} \quad r_2 = \frac{(1-\sqrt{5})}{2}$$

จากทฤษฎีบท จะได้ว่า

$$f_n = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

สำหรับตัวคงที่ α_1 และ α_2

เงื่อนไขแรก $f_0 = 0$ และ $f_1 = 1$ นำมาใช้ ในการหาตัวคงที่เหล่านี้

$$f_0 = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 0$$

$$f_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$f_1 = a, \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \qquad \text{———— (1)}$$

$$\alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \qquad \text{———— (2)}$$

---

[2] ราก ของ สมการกำลังสอง $ax^2 + bx + c = 0$

คือ

$$\text{root} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

สมการที่ (1) คูณด้วย $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ จะได้

$$\alpha_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \alpha_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 0 \qquad \text{———————— (3)}$$

สมการ (2) - (3)

$$\alpha_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - \alpha_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 0$$

$$\alpha_2 - \sqrt{5}\,\alpha_2 - \alpha_2 - \sqrt{5}\,\alpha_2 = 2$$

$$\sqrt{5}\,\alpha_2 + \sqrt{5}\,\alpha_2 = -2$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

และ $$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

ดังนั้น จำนวนฟีโบแนชชี คือ

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

ทฤษฎีบท 2 ให้ c_1 และ c_2 เป็นจำนวนจริง โดยที่ $c_2 \neq 0$
สมมติว่า $r^2 - c_1r - c_2 = 0$ มี รากเพียงหนึ่งตัวเท่านั้น คือ r_0
ลำดับ $\{a_n\}$ คือ ผลเฉลย ของ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$$

ก็ต่อเมื่อ

$$a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n \qquad \text{สำหรับ } n = 0, 1, 2, \ldots$$

เมื่อ α_1 และ α_2 เป็นตัวคงที่

ตัวอย่าง 5 จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$$

ที่มีเงื่อนไขแรก $a_0 = 1$ และ $a_1 = 6$

ผลเฉลย สมการลักษณะเฉพาะ ได้แก่

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

$$(r-3)(r-3) = 0$$

จะได้ $\quad r = 3$

ดังนั้น จากทฤษฎีบท ผลเฉลย ของ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด คือ

$$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$$

สำหรับตัวคงที่ α_1 และ α_2 ใช้เงื่อนไขแรก จะได้

$$a_0 = \alpha_1 3^0 + \alpha_2 \cdot 0 \cdot 3^0 = 1$$

$$= \alpha_1 = 1$$

$$a_1 = \alpha_1 \cdot 3^1 + \alpha_2 \cdot 1 \cdot 3^1 = 6$$

$$= \alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cdot 3 = 6$$

เนื่องจาก $\quad \alpha_1 = 1 \qquad \text{.............. (1)}$

$$\alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cdot 3 = 6 \qquad \text{.............. (2)}$$

แก้สองสมการข้างต้น แสดงว่า $\alpha_1 = 1$ และ $\alpha_2 = 1$

เพราะฉะนั้น ผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด และเงื่อนไขแรก คือ

$$a_n = 3^n + n3^n$$

ทฤษฎีบท 3 ให้ $c_1, c_2, \ldots, c_k$ เป็นจำนวนจริง

สมมติว่า สมการลักษณะเฉพาะ

$$r^k - c_1 r^{k-1} - \ldots - c_k = 0$$

มีราก k ตัวแตกต่างกัน คือ $r_1, r_2, \ldots, r_k$

ดังนั้น ลำดับ $\{a_n\}$ คือ ผลเฉลย ของ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

ก็ต่อเมื่อ

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \ldots + \alpha_k r_k^n$$

สำหรับ $n = 0, 1, 2, \ldots$, เมื่อ $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$ เป็นตัวคงที่

ตัวอย่าง 6 จงหาผลเฉลย ของ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$$

ที่มีเงื่อนไขแรก $a_0 = 0$, $a_1 = 5$ และ $a_2 = 15$

ผลเฉลย พหุนามลักษณะเฉพาะ ของ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด คือ

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$$

รากเจาะจง ได้แก่ $r_1 = 1, r_2 = 2$ และ $r_3 = 3$

เพราะว่า $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = (r - 1)(r - 2)(r - 3)$

ดังนั้น ผลเฉลย ของ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดนี้ อยู่ในรูปแบบ

$$a_n = \alpha_1 \cdot 1^n + \alpha_2 \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot 3^n$$

ในการหาตัว คงที่ α_1, α_2 และ α_3 ใช้เงื่อนไขแรก

$$a_0 = \alpha_1 \cdot 1^0 + \alpha_2 \cdot 2^0 + \alpha_3 \cdot 3^0 = 2$$

$$= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2$$

$$a_1 = \alpha_1 \cdot 1^1 + \alpha_2 \cdot 2^1 + \alpha_3 \cdot 3^1 = 5$$

$$= \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 3 = 15$$

$$a_2 = \alpha_1 \cdot 1^2 + \alpha_2 \cdot 2^2 + \alpha_3 \cdot 3^2 = 15$$

$$= \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 3 = 15$$

$$= \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 4 + \alpha_3 \cdot 9 = 15$$

มีอยู่ สาม สมการ และมีตัวไม่ทราบค่า (unknown) สามตัว

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2 \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (1)$$

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 5 \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (2)$$

$$\alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 = 15 \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (3)$$

แก้สมการ จะได้ $\alpha_1 = 1, \alpha_2 += -1$ และ $\alpha_3 = 2$

ดังนั้น ผลเฉลยที่เป็นหนึ่งอย่าง (unique solution) ของ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด และเงื่อนไขแรก ที่กำหนดให้ คือ ลำดับ $\{a_n\}$ ที่มี

$$a_n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n$$

แบบฝึกหัด 5.3

1. ข้อใด คือ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดเอกพันธุ์เชิงเส้น ที่มีสัมประสิทธิคงที่ และมีองศา เท่ากับเท่าใด?

   a) $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} + 5a_{n-3}$

   b) $a_n = 2na_{n-1} + a_{n-2}$

   c) $a_n = a_{n-1} + a_{n-4}$

   d) $a_n = a_{n-1} + 2$

   e) $a_n = a^2_{n-1} + a_{n-2}$

   f) $a_n = a_{n-2}$

2. ข้อใด คือ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดเอกพันธุ์เชิงเส้น ที่มีสัมประสิทธิคงที่ และองศาเท่ากับเท่าใด?

   a) $a_n = 3a_{n-2}$

   b) $a_n = 3$

   c) $a_n = a^2_{n-1}$

   d) $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-3}$

   e) $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n}$

   f) $a_n = 4a_{n-2} + 5a_{n-4} + 9a_{n-7}$

3. จงแก้ปัญหา ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด ซึ่งมีเงื่อนไขแรก กำหนดให้

   a) $a_n = 2a_{n-1}$ for $n \geq 1$, $a_0 = 3$

   b) $a_n = a_{n-1}$ for $n \geq 1$, $a_0 = 2$

   c) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ for $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$

   d) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ for $n \geq 2$, $a_0 = 6$, $a_1 = 8$

   e) $a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ for $n \geq 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$

   f) $a_n = 4a_{n-2}$ for $n \geq 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 4$

   g) $a_n = \dfrac{a_{n-2}}{4}$ for $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$

4. จงแก้ปัญหาความสัมพันธ์เวียนบังเกิด ข้างล่างนี้ ซึ่งมีเงื่อนไขแรก กำหนดให้

   a) $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ for $n \geq 2$, $a_0 = 3$, $a_1 = 6$

b) $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$ for $n \geq 2$, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$

c) $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$ for $n \geq 2$, $a_0 = 4$, $a_1 = 10$

d) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ for $n \geq 2$, $a_0 = 4$, $a_1 = 1$

e) $a_n = a_{n-2}$ for $n \geq 2$, $a_0 = 5$, $a_1 = -1$

f) $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ for $n \geq 2$, $a_0 = 3$, $a_1 = -3$

g) $a_{n+2} = -4a_{n+1} + 5a_n$ for $n \geq 0$, $a_0 = 2$, $a_1 = 8$

5. ตัวแบบ (model) สำหรับ จำนวนกุ้ง (number of lobsters) ซึ่งจับในแต่ละปี ขึ้นอยู่กับ ข้อสมมติที่ว่า จำนวนกุ้งซึ่งจับในหนึ่งปี เท่ากับ ค่าเฉลี่ย ของ จำนวนกุ้ง ซึ่งจับ ใน สองปีก่อนหน้า

   a) จงหา ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด สำหรับ $\{L_n\}$, เมื่อ L_n คือ จำนวนกุ้ง ซึ่งจับ ในปีที่ n ภายใต้ ข้อสมมติที่ใช้สำหรับ ตัวแบบนี้

   b) จงหา L_n ถ้า กุ้งจำนวน 100,000 ตัว ถูกจับในปีที่ 1 และจำนวน 300,000 ตัว ถูกจับในปีที่ 2

6. ฝากเงินจำนวน $100,000 ไว้กับกองทุนการเงิน ณ ตอนต้นปี เมื่อถึงวันสุดท้ายของแต่ละปี จะมีรางวัลเป็นเงินสองส่วน เงินส่วนแรก 20% ของ จำนวนเงิน ในบัญชีในระหว่างปีนั้น เงินส่วนที่สอง คือ 45% ของ จำนวนเงินในบัญชี ระหว่าง ปีก่อนหน้านั้น

   a) จงหา ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด $\{P_n\}$ เมื่อ P_n คือ จำนวนเงิน ใน บัญชี ณ สิ้นปีที่ n ถ้า ไม่มีการถอนเงินเลย

   b) ถ้า ไม่มีการถอนเงินเลย หลังจาก n ปี ในบัญชี จะมีจำนวนเงินเท่าใด?

7. จงหาผลเฉลย ของ $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ สำหรับ n = 3, 4, 5 ที่มี $a_0 = 3$, $a_1 = 6$ และ $a_2 = 0$

8. จงหาผลเฉลยของ $a_n = 7a_{n-2} + 6a_{n-3}$ ที่มี $a_0 = 9$, $a_1 = 10$ และ $a_2 = 32$

9. จงหาผลเฉลยของ $a_n = 5a_{n-2} - 4a_{n-4}$ ที่มี $a_0 = 3$, $a_1 = 2$ และ $a_2 = 6$ และ $a_3 = 8$

10. จงหาผลเฉลย ของ $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$ ที่มี $a_0 = 7$, $a_1 = -4$ และ $g_2 = 8$

แบบฝึกหัดเสริม

จงบอกว่า ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด แต่ละชุด ในแบบฝึกหัดข้อ 1 - 10 เป็นความสัมพันธ์เวียนบังเกิดเอกพันธุ์เชิงเส้น ที่มีสัมประสิทธิคงที่ หรือไม่?

จงหาองศา ของ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิคงที่แต่ละชุด

1. $a_n = -3a_{n-1}$
2. $a_n = 2na_{n-1}$
3. $a_n = 2na_{n-2} - a_{n-1}$
4. $a_n = a_{n-1} + n$
5. $a_n = 7a_{n-2} - 6a_{n-3}$
6. $a_n = a_{n-1} + 1 + 2^{n-1}$
7. $a_n = (\lg 2n)a_{n-1} - [\lg (n-1)]a_{n-2}$
8. $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$
9. $a_n = -a_{n-1} - a_{n-2}$
10. $a_n = -a_{n-1} + 5a_{n-2} - 3a_{n-3}$

ในแบบฝึกหัดข้อ 11-24 จงแก้ปัญหาความสัมพันธ์เวียนบังเกิดแต่ละชุด สำหรับเงื่อนไขแรกที่กำหนดให้

11. แบบฝึกหัดข้อ 1 ; $a_0 = 2$
12. แบบฝึกหัดข้อ 2 ; $a_0 = 1$
13. แบบฝึกหัดข้อ 3 ; $a_0 = 0$
14. $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$; $a_0 = 1$, $a_1 = 0$
15. $2a_n = 7a_{n-1} - 3a_{n-2}$; $a_0 = a_1 = 1$
16. แบบฝึกหัดข้อ 5 ; $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$
17. แบบฝึกหัดข้อ 6 ; $a_0 = 0$
18. แบบฝึกหัดข้อ 8 ; $a_0 = a_1 = 1$
19. แบบฝึกหัดข้อ 9 ; $a_0 = 1$, $a_1 = 2$
20. แบบฝึกหัดข้อ 10; $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$

21. จงแก้ปัญหาความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

$$\sqrt{a_n} = \sqrt{a_{n-1}} + 2\sqrt{a_{n-1}}$$

ที่มีเงื่อนไขแรก $a_0 = a_1 = 1$

22. จงแก้ปัญหา ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}} / a^2_{n-1}$$

ที่มีเงื่อนไขแรก $a_0 = 1, a_1 = 2$

23. จงแก้ปัญหา ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

$$a_n = -2na_{n-1} + 3n(n-1)a_{n-2}$$

ที่มีเงื่อนไขแรก $a_0 = 1, a_1 = 2$