บทที่ 4 วิธีนับจำนวน
(Counting Methods)

4.1 หลักเบื้องต้น (Basic Principles)

4.2 วิธีเรียงสับเปลี่ยน และวิธีจัดหมู่

(Permutations and Combinations)

4.3 วิธีเรียงสับเปลี่ยน และวิธีจัดหมู่ โดยทั่วไป

(Generalized Permutations and Combinations)

4.4 สัมประสิทธิ์ทวินาม และเอกลักษณ์เชิงวิธีจัดหมู่

(Binomial Coefficients and Combinatorial Identities)

4.5 การนับเข้าและตัดออก

(Inclusion and Exclusion)

4.6 การประยุกต์ของ การนับเข้าและตัดออก

(Application of Inclusion - Exclusion)

ในปัญหาไม่ต่อเนื่องจำนวนมาก เราเผชิญหน้ากับ ปัญหาของการนับ ตัวอย่างเช่น ใน บทที่ 3 หัวข้อ 3.5 จะเห็นว่า ในการประมาณค่า เวลาดำเนินการ (run time) ของอัลกอริทึม เรา จำเป็น ต้องนับ จำนวนของเวลา ของขั้นตอนต่างๆ หรือ ส่วนวนซ้ำ (loops) ซึ่งถูกกระทำการ การนับ ยังมีบทบาทสำคัญมากในทฤษฎีความน่าจะเป็น เนื่องจากความสำคัญของการนับ จึงมี สิ่งช่วยเหลือที่เป็นประโยชน์หลากหลาย บางอย่างซึ่งทันสมัยมาก ได้ถูกพัฒนาขึ้นมา เนื้อหาใน บทนี้ จะพัฒนาเครื่องมือ (tools) หลายอย่างสำหรับการนับ เทคนิคเหล่านี้ สามารถนำมาใช้ เพื่อ ให้ได้มาของ ทฤษฎีบททวิภาค (binomial theroem)

4.1 หลักเบื้องต้น (Basic Principles)

ในรายการอาหารของภัตตาคารหัวหมาก เขียนไว้ว่า มีอาหารว่าง สองชนิด (A_1, A_2), อาหารหลัก สามชนิด (M_1, M_2, M_3) และมีเครื่องดื่ม สี่ชนิด (B_1, B_2, B_3, B_4) จะมีกี่วิธีในการจัด อาการค่ำ ที่แตกต่างกัน โดยให้มี อาหารหลัก หนึ่งอย่าง และเครื่องดื่ม หนึ่งอย่าง

ถ้าเราเขียนรายการอาหารค่ำที่เป็นไปได้ทั้งหมด ประกอบด้วยอาหารหลัก หนึ่งอย่าง และเครื่องดื่มอีก หนึ่งอย่าง จะเป็นดังนี้ :

M_1B_1, M_1B_2, M_1B_3, M_1B_4, M_2B_1, M_2B_2, M_2B_3, M_2B_4, M_3B_1, M_3B_2, M_3B_3, M_3B_4

จะเห็นว่ามีทั้งหมด 12 วิธี ที่แตกต่างกัน

โปรดสังเกตว่า มีอาหารหลัก 3 ชนิด มีเครื่องดื่ม 4 ชนิด

จำนวนวิธี $= 3 \times 4 = 12$ วิธี

และถ้าต้องการให้อาหารค่ำ ประกอบด้วย อาหารว่าง หนึ่งอย่าง อาหารหลัก หนึ่งอย่าง และเครื่องดื่มอีก หนึ่งอย่าง จะมีวิธีจัดทั้งหมด 24 วิธีที่เป็นไปได้ ดังนี้ :

$A_1M_1B_1$, $A_1M_1B_2$, $A_1M_1B_3$, $A_1M_1B_4$, $A_1M_2B_1$, $A_1M_2B_2$, $A_1M_2B_3$, $A_1M_2B_4$,

$A_1M_3B_1$, $A_1M_3B_2$, $A_1M_3B_3$, $A_1M_3B_4$, $A_2M_1B_1$, $A_2M_1B_2$, $A_2M_1B_3$, $A_2M_1B_4$,

$A_2M_2B_1$, $A_2M_2B_2$, $A_2M_2B_3$, $A_2M_2B_4$, $A_2M_3B_1$, $A_2M_3B_2$, $A_2M_3B_3$, $A_2M_3B_4$

โปรดสังเกตว่า มีอาหารว่าง สองชนิด อาหารหลัก สามชนิด และมีเครื่องดื่ม สี่ชนิด

จำนวนวิธี $= 2 \times 3 \times 4 = 24$ วิธี

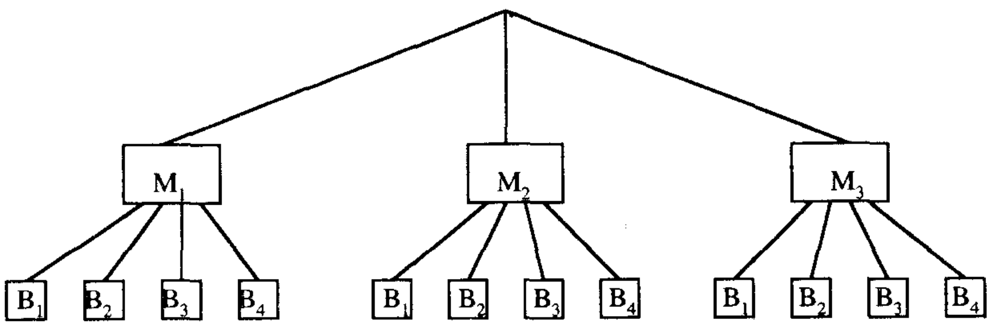
ตัวอย่างข้างต้นนี้ เราพบว่า จำนวนของอาหารค่ำทั้งหมด เท่ากับ ผลคูณของ จำนวน ของ อาหารแต่ละชนิด

หลักของการคูณ (Multiplication Principle)

ถ้ากิจกรรม อย่างหนึ่ง สร้างโดย t ขั้นตอนอย่างสืบเนื่อง และขั้นที่หนึ่ง กระทำได้ n_1 วิธี ขั้นที่สอง กระทำได้ n_2 วิธี ... , ขั้นที่ t กระทำได้ n_t วิธี ดังนั้น จำนวนกิจกรรมต่างๆ ที่เป็นไปได้ทั้งหมด เท่ากับ $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_t$ วิธี

(If an activity can be constructed in t successive steps and step I can be done in n_1 ways; step 2 can be done in n_2 ways; . . . ; and step t can then be done in n_t ways, then the number of different possible activities is $n_1 . n_2 \cdot . . . . n_t$.) [1]

ในปัญหา ของการนับ จำนวน อาหารค่ำที่เป็นไปได้ โดยให้มี อาหารหลัก หนึ่งอย่าง และเครื่องดื่มอีก หนึ่งอย่าง ขั้นที่หนึ่ง "เลือกอาหารหลัก" และขั้นที่สอง "เลือกเครื่องดื่ม" ดังนั้น $n_1 = 3$ และ $n_2 = 4$ จากหลักของการคูณ จำนวนอาหารค่ำทั้งหมด $= 3 \cdot 4 = 12$ วิธี (ดูรูปที่ 1)



รูปที่ 1

เราอาจสรุปหลักของการคูณ โดยกล่าวว่า ให้คูณจำนวนของแต่ละวิธีของการกระทำแต่ละขั้นตอนเข้าด้วยกัน เมื่อกิจกรรมนั้น ถูกสร้างขึ้นในขั้นตอนต่อเนื่อง

(We may summarize the Multiplication Principle by saying that we multiply together the numbers of ways of doing each step when an activity is constructed in successive steps.) [2]

---

[1] Johnsonbaugh หน้า 193

[2] Johnsonbaugh หน้า 193

ตัวอย่าง 1 จะมีกี่วิธี ในการจัดอาหารค่ำ ของ ภัตตาคารหัวหมาก ซึ่งประกอบด้วยอาหารหลักหนึ่งอย่าง และอาจจะมีเครื่องดื่มอีก หนึ่งอย่างหรือไม่ก็ได้ (one main course and an **optional** beverage)

เลือกอาหารหลัก (n_1) = 3 วิธี

เลือก optional beverage (n_2) = 5 วิธี

จากหลักของการคูณ รายการอาหารค่ำที่เป็นไปได้

$= 3 \times 5 = 15$ วิธี

ตัวอย่าง 2

a) สายอักขระความยาวเท่ากับ 4 สร้างจากตัวอักษร ABCDE ถ้าไม่ให้ซ้ำกันเลย จะสร้างได้กี่คำ ?

b) จากข้อ (a) ถ้าให้เริ่มต้นด้วย ตัวอักษร B จะสร้างได้กี่คำ ?

c) จากข้อ (a) ไม่ให้ขึ้นต้นด้วย ตัวอักษร B จะสร้างได้กี่คำ ?

ผลเฉลย

a) จากหลักของการคูณ จะมี $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ วิธี

$= 120$ วิธี

b) จากหลักของการคูณ จะมี $1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ วิธี

$= 24$ วิธี

c) ถ้าไม่ให้ขึ้นต้นด้วยตัวอักษร B จะมี $120 - 24$ วิธี

$= 96$ วิธี

ตัวอย่าง 3 สายอักขระแปดบิต (an eight-bit string) ที่แตกต่างกัน จะมีทั้งหมดกี่ชุด (บิตอาจจะเป็น 0 หรือ 1) สายอักขระแปดบิต หนึ่งชุด สร้างขึ้น ใน แปดขั้นตอนสืบเนื่อง คือเลือกบิตที่หนึ่ง, เลือกบิตที่สอง, ..., เลือกบิตที่แปด เนื่องจากในการเลือกแต่ละบิตมี สองวิธี จากหลักของการคูณ จำนวนสายอักขระแปดบิต จะมีทั้งหมด

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 256$ ชุด

ตัวอย่าง 4

จงใช้หลักของการคูณ แสดงให้เห็นว่า เซต $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ซึ่งมี สมาชิก n ตัว จะมี

เซตย่อย 2^n ชุด

เซตย่อย สร้างขึ้น ใน n ขั้นตอนสืบเนื่อง : หยิบหรือไม่หยิบ x_1, หยิบหรือไม่หยิบ x_2, ... หยิบหรือไม่หยิบ x_n ในแต่ละขั้นตอน กระทำได้สองวิธี ดังนั้น จำนวนเซตย่อยที่เป็นไปได้ทั้งหมด คือ

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{\text{n factors}} = 2^n$$

ตัวอย่าง 5

จะมีกี่วิธี ในการสร้างสายบิตความยาวเท่ากับแปด ซึ่งขึ้นต้นด้วย 101 หรือ 111?

(How many eight-bit strings begin either 101 or 111?)

สายบิตความยาวเท่ากับแปด ขึ้นต้นด้วย 101 สร้างใน 5 ขั้นตอนสืบเนื่อง คือ เลือกบิตที่ 4, เลือกบิตที่ห้า, ... , เลือกบิตที่แปด ในแต่ละบิตเลือกได้สองวิธี เพราะฉะนั้น จะมีวิธีเลือกเท่ากับ $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$ วิธี

ในทำนองเดียวกัน สายบิตความยาวเท่ากับแปด ขึ้นต้นด้วย 11 จะมีวิธีสร้างได้ = 32 วิธี เพราะฉะนั้น สายบิตความยาวแปด ขึ้นต้นด้วย 101 หรือ 111 จะมีทั้งหมด

$$32 + 32 = 64 \text{ ชุด}$$

ตัวอย่างนี้ เราบวก จำนวนของแต่ละวิธี ในการหาผลลัพธ์สุดท้าย หลักของการบวก จะบอกว่าเมื่อใด จึงทำการบวก เพื่อคำนวณหาวิธีที่เป็นไปได้ทั้งหมด

หลักของการบวก (Addition Principle)

สมมติว่า $X_1, X_2, \ldots, X_t$ เป็นเซต และเซต X_i มีสมาชิก n_i ตัว ถ้า $\{X_1, X_2, \ldots, X_t\}$ เป็นเซตต่างสมาชิกทีละคู่ (นั่นคือ ถ้า $i \neq j$, $X_i \cap X_j = \phi$) จำนวนของสมาชิกที่เป็นไปได้ โดยเลือกจากเซต X_1 หรือ X_2 หรือ ... หรือ X_t เท่ากับ

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_t$$

(มีความหมายเหมือนกับผลผนวก $n_1 + n_1 + \ldots + n_t$ ตัว)

(Suppose that $X_1, X_2, \ldots, X_t$ are sets and that the ith set X_i has n_i elements. If $\{X_1, X_2, \ldots, X_t\}$ is a pairwise disjoint family (i.e., if $i \neq j$, $X_i \cap X_j = \phi$), the number of possible elements that can be selected from X_1 or X_2 or ... or X_t is

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_t$$

(Equivalently, the union $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_t$ contains $n_1 + n_1 + \ldots + n_t$ elements.))[3]

จากตัวอย่างข้างต้น ให้ X_1 เป็นเซตของสายบิตความยาวเท่ากับแปด ขึ้นต้นด้วย 101 และ X_2 เป็นเซตของสายบิตความยาวเท่ากับแปดขึ้นต้นด้วย 111 เนื่องจาก X_1 และ X_2 เป็นเซตต่างสมาชิกกัน จากหลักของการบวก จำนวนของสายบิตความยาวเท่ากับแปด ซึ่งเป็นชนิดที่หนึ่ง หรือชนิดที่สอง คือ จำนวนสมาชิกใน $X_1 \cup X_2$ เท่ากับ

$$32 + 32 = 64 \quad \text{ชุด}$$

เราอาจสรุปหลักของการบวก โดยกล่าวว่าให้บวก จำนวนของสมาชิก ในแต่ละเซตย่อย เมื่อ สมาชิกซึ่งกำลังถูกนับ สามารถแยกออกจากกัน เป็นเซตย่อยต่างสมาชิกกัน

สรุป
- ถ้านับจำนวนสิ่งของ ซึ่งประกอบขึ้นในขั้นตอนต่างๆ สืบเนื่อง ใช้หลักการคูณ
- ถ้ามีเซตต่างสมาชิกของสิ่งของ ต้องการทราบ จำนวนสิ่งของทั้งหมด ใช้หลักการบวก

สิ่งที่สำคัญคือ รู้ได้ว่า เมื่อใดจะประยุกต์ใช้หลักแต่ละข้อ ทักษะนี้ได้มาจากการปฏิบัติและคิดปัญหาแต่ละอย่างให้รอบคอบ

ตัวอย่าง 6 จะมีกี่วิธีในการเลือก หนังสือ สองเล่ม จาก ชื่อเรื่องแตกต่างกัน จากกองหนังสือซึ่งมีหนังสือคอมพิวเตอร์ ที่แตกต่างกันห้าเล่ม, หนังสือคณิตศาสตร์ แตกต่างกัน สามเล่ม และหนังสือศิลปะ แตกต่างกันสองเล่ม

จากหลักของการคูณ เลือกหนังสือสองเล่มจากหนังสือคอมพิวเตอร์ หนึ่งเล่มและอีกหนึ่งเล่มจาก คณิตศาสตร์ จะมี

$$5 \cdot 3 = 15 \quad \text{วิธี}$$

ในทำนองเดียวกัน เลือก หนึ่งเล่มจาก คอมพิวเตอร์ และอีกหนึ่งเล่มจากหนังสือศิลปะ จะมี

$$5 \cdot 2 = 10 \quad \text{วิธี}$$

เลือกหนึ่งเล่ม จากคณิตศาสตร์ และอีกหนึ่งเล่มจากศิลปะ จะมี

$$3 \cdot 2 = 6 \quad \text{วิธี}$$

เนื่องจากทั้งสามเซตนี้ เป็นเซตต่างสมาชิกกัน จากหลักของการบวก สรุปว่า จะมี

$$15 + 10 + 6 = 31 \quad \text{วิธี}$$

---

[3] Johnsonbaugh หน้า 196

ในการเลือกหนังสือ สองเล่ม ให้มีชื่อเรื่องแตกต่างกัน จากกองหนังสือ คอมพิวเตอร์ คณิตศาสตร์ และศิลปะ

ตัวอย่าง 7 ในคณะกรรมการ หกคน มี A, B, C, D, E และ F ต้องการเลือก ประธาน 1 คน, เลขานุการ 1 คน และเหรัญญิก 1 คน

(a) จะเลือกได้กี่วิธี

(b) จะเลือกได้กี่วิธี ถ้าให้ A ได้ตำแหน่งประธาน หรือ ให้ B ได้ตำแหน่งประธาน

(c) จะเลือกได้กี่วิธี ถ้าให้ E ต้องได้หนึ่งตำแหน่ง

(d) จะเลือกได้กี่วิธี ถ้าทั้ง D และ F ต้องได้ตำแหน่งทั้งคู่

ผลเฉลย

(a) ใช้หลักของการคูณ ตำแหน่งต่างๆ เลือกในสามขั้นตอนสืบเนื่อง คือ เลือกประธาน เลือกเลขานุการ และเลือกเหรัญญิก จำนวนวิธีที่เป็นไปได้คือ

$$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120 \text{ วิธี}$$

(b) ใช้หลักเดียวกับข้อ (a) ถ้า A ถูกเลือกเป็นประธาน จะมี $5 \cdot 4 = 20$ วิธี ในการเลือกตำแหน่งที่เหลือ และในทำนองเดียวกัน ถ้า B ถูกเลือกเป็นประธาน จะมี $5 \cdot 4 = 20$ วิธี ในการเลือกตำแหน่งที่เหลือ เนื่องจากกรณีเหล่านี้เป็นเซตต่างสมาชิก จากหลักของการบวก จำนวนวิธีที่เป็นไปได้คือ

$$20 + 20 = 40 \text{ วิธี}$$

(c) **วิธีที่หนึ่ง** ใช้หลักเดียวกับข้อ (a) ถ้า E ได้รับเลือกเป็นประธาน จะมี 20 วิธี ในการเลือกตำแหน่งที่เหลือ ในทำนองเดียวกัน ถ้า E ได้รับเลือกเป็นเลขานุการ จะมี 20 วิธี ในการเลือกตำแหน่งที่เหลือ และถ้า E ได้รับเลือกเป็นเหรัญญิก จะมี 20 วิธี ในการเลือกตำแหน่งที่เหลือ เนื่องจากทั้งสามกรณี เป็นเซตต่างสมาชิกทีละคู่ จากหลักของการบวก จำนวนวิธีที่เป็นไปได้ คือ

$$20 + 20 + 20 = 60 \text{ วิธี}$$

วิธีที่สอง พิจารณากิจกรรมของการกำหนดหนึ่งตำแหน่งให้ E และอีกสองตำแหน่งให้กรรมการคนอื่นๆ ประกอบด้วยสามขั้นตอนสืบเนื่อง : E ได้หนึ่งตำแหน่ง มี 3 วิธี ตำแหน่งถัดไปทำได้ 5 วิธี และตำแหน่งสุดท้ายทำได้ 4 วิธี จากหลักของการคูณ จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ

$$3 \cdot 5 \cdot 4 = 60 \text{ วิธี}$$

(d) พิจารณากิจกรรม ของการกำหนดให้ D, F และกรรมการอีกหนึ่งคนได้ตำแหน่ง

กระทำเป็นสามขั้นตอนสืบเนื่อง ดังนี้ : ให้ D ได้ตำแหน่ง, ให้ F ได้ตำแหน่ง กำหนดตำแหน่งที่เหลือโดยหลักของการคูณ จำนวนวิธีที่เป็นไปได้เท่ากับ

$$3 \cdot 2 \cdot 4 = 24 \text{ วิธี}$$

แบบฝึกหัด 4.1

จงคำนวณหา จำนวนของรายการอาหารมื้อค่ำ ของภัตตาคารหัวหมาก ตามเงื่อนไขที่กำหนด ของแบบฝึกหัดข้อ 1-3

1. อาหารว่างหนึ่งอย่าง และเครื่องดื่ม หนึ่งอย่าง
2. อาหารว่างหนึ่งอย่าง อาหารหลักหนึ่งอย่าง และอาจจะมีหรือไม่มี เครื่องดื่มอีกหนึ่งอย่าง
3. อาจจะมีหรือไม่มีของว่างหนึ่งอย่าง อาหารหลักหนึ่งอย่าง และอาจจะมีหรือไม่มี เครื่องดื่มอีกหนึ่งอย่าง
4. ชายผู้หนึ่งมีเสื้อเชิ้ต 8 ตัว กางเกง 4 ตัว และรองเท้า 5 คู่ จะมีกี่วิธีในการจัดเครื่องแต่งตัวที่แตกต่างกัน

แบบฝึกหัดข้อ 5-13 โยนลูกเต๋า สองลูกพร้อมกัน ลูกหนึ่งมีสีน้ำเงิน และอีกลูกหนึ่งมีสีแดง

5. จะมี outcomes ที่เป็นไปได้กี่วิธี ?
6. จะมีกี่วิธี ที่ให้ผลลัพธ์ ออกมารวมแล้วเป็น 4
7. จะมีกี่วิธี ที่ออกมาซ้ำกัน (ซ้ำกัน หมายถึง ลูกเต๋าทั้งคู่ มีเลขเหมือนกัน)
8. จะมีกี่วิธี ที่ให้ผลบวกเป็น 7 หรือผลบวกเป็น 11
9. จะมีกี่วิธี ที่ลูกเต๋า สีน้ำเงิน ออกเป็น 2
10. จะมีกี่วิธี ที่ลูกเต๋าเพียงหนึ่งลูกเท่านั้นที่เป็น 2
11. จะมีกี่วิธี ที่ลูกเต๋า อย่างน้อยที่สุด หนึ่งลูก เป็น 2
12. จะมีกี่วิธี ที่ไม่มีลูกเต๋า ออกมาเป็น 2
13. จะมีกี่วิธี ที่ผลบวกออกมาเป็นคู่

แบบฝึกหัดข้อ 14-16 สมมติว่า มีถนน 10 สาย จากกรุงเทพฯ ไปสระบุรี และมีถนน 5 สาย จากสระบุรี ไปขอนแก่น

14. จะมีกี่เส้นทาง จากกรุงเทพฯ ไปขอนแก่น โดยผ่านสระบุรี
15. จะมีเส้นทางไปกลับ (round-trips) จากกรุงเทพฯ-สระบุรี-ขอนแก่น-สระบุรี-กรุงเทพฯ กี่วิธี?

16. จะมีเส้นทางไปกลับ จากกรุงเทพฯ-สระบุรี-ขอนแก่น-สระบุรี-กรุงเทพ ซึ่งตอนเดินทางกลับ เราจะไม่ ย้อนกลับ เส้นทางเดิม จากกรุงเทพฯ ไปขอนแก่น กี่วิธี?
17. จะมีป้ายทะเบียนรถยนต์ ที่แตกต่างกันกี่แผ่น ถ้าเลขทะเบียน เป็น ตัวอักษรสามตัว และตามด้วยเลข สองตัว ถ้าอนุญาตให้ซ้ำกันได้ และถ้าไม่อนุญาตให้ซ้ำกัน
18. สายอักขระแปด-บิต ที่เริ่มต้นด้วย 1100 มีทั้งหมดกี่ชุด
19. สายอักขระแปด-บิต ที่เริ่มต้นด้วย 1 และจบด้วย 1 มีทั้งหมดกี่ชุด
20. สายอักขระแปด-บิต ซึ่งมีบิตที่สอง หรือบิตที่สี่ เป็น 1 หรือเป็น 1 ทั้งคู่ มีทั้งหมดกี่ชุด

    (How many eight-bit strings have either the second or the fourth bit 1 (or both)?
21. สายอักขระแปด-บิต ที่มีบิตเดียวเท่านั้น เป็น 1 มีกี่ชุด
22. สายอักขระแปด-บิต ที่มีสองบิตเท่านั้น เป็น 1 มีกี่ชุด
23. สายอักขระแปด-บิต ที่มีอย่างน้อยที่สุดหนึ่งบิต เป็น 1 มีกี่ชุด
24. สายอักขระแปด-บิต อ่านเหมือนกัน จากปลายด้านไหนก็ได้ (ตัวอย่าง สายอักขระแปด-บิต 01111110)

แบบฝึกหัดข้อ 25-31 คณะกรรมการ 6 คนซึ่งประกอบด้วย A, B, C, D, E และ F เพื่อเลือกประธาน, เลขานุการ และเหรัญญิก

25. จะเลือกได้กี่วิธี โดยไม่มี C
26. จะเลือกได้กี่วิธี โดยไม่มี B และไม่มี F
27. จะเลือกได้กี่วิธี ให้มี B และ F
28. จะเลือกได้กี่วิธี โดยไม่มี B หรือ F
29. จะเลือกได้กี่วิธี ให้มี B หรือ F
30. จะเลือกได้กี่วิธี ให้มี B และ F ทั้งคู่ หรือ ไม่ให้มี B และ F ทั้งคู่
31. จะเลือกได้กี่วิธี โดยให้ A เป็นประธาน หรือ A ไม่ได้รับตำแหน่งเลย

แบบฝึกหัดข้อ 32-39 ตัวอักษร ABCDE นำมาประกอบเป็น สายอักขระความยาวเท่ากับ 3

32. จะมีสายอักขระกี่ชุด ถ้าอนุญาต ให้ซ้ำกันได้
33. จะมีสายอักขระกี่ชุด ถ้าไม่ให้ซ้ำกัน
34. จะมีสายอักขระกี่ชุด ซึ่งเริ่มต้นด้วย A และให้ซ้ำกันได้
35. จะมีสายอักขระกี่ชุด ซึ่งเริ่มต้นด้วย A ถ้าไม่ให้ซ้ำกัน

36. จะมีสายอักขระกี่ชุด ซึ่งไม่มีตัวอักษร A อยู่ด้วย และให้ซ้ำกันได้
37. จะมีสายอักขระกี่ชุด ซึ่งไม่มีอักษร A ถ้าไม่ให้ซ้ำกัน
38. จะมีสายอักขระกี่ชุด ซึ่งประกอบด้วย A และให้ซ้ำกันได้
39. จะมีสายอักขระกี่ชุด ประกอบด้วย A ถ้าไม่ให้ซ้ำกัน

แบบฝึกหัดข้อ 40-50 อ้างถึงจำนวนเต็มจาก 5 ถึง 200 เท่านั้น

40. จะมีเลขกี่จำนวน
41. มีกี่จำนวน ที่เป็นเลขคู่
42. มีกี่จำนวน ที่เป็นเลขคี่
43. มีกี่จำนวน ที่หารด้วย 5 ลงตัว
44. มีกี่จำนวน ที่มีค่ามากกว่า 72
45. มีกี่จำนวน ที่ประกอบด้วยเลขแตกต่างกัน
46. มีกี่จำนวน ที่มีเลข 7
47. มีกี่จำนวน ที่ไม่มีเลข 0
48. มีกี่จำนวน ที่มีค่ามากกว่า 101 และไม่มีเลข 6
49. จะมีกี่จำนวน ที่มีเลขเรียงลำดับจากน้อยไปหามาก (ตัวอย่าง 13, 147, 8)
50. จะมีกี่วิธี ในการประกอบ xyz เมื่อ $0 = x < y$ และ $y > z$?
51. (a) จะมีกี่วิธี ซึ่งคน 5 คน มีเดือนเกิด ไม่ซ้ำกัน

    (b) จะมีกี่วิธี ที่เป็นไปได้ สำหรับเดือนเกิดของคน 5 คน

    (c) จะมีกี่วิธี ที่อย่างน้อยที่สุดคนสองคน จาก 5 คน มีเดือนเกิด เหมือนกัน

แบบฝึกหัดข้อ 52-57 อ้างถึงเซตของหนังสือคอมพิวเตอร์ ที่แตกต่างกัน 5 เล่ม, หนังสือคณิตศาสตร์ แตกต่างกัน 3 เล่ม และหนังสือศิลปะ แตกต่างกัน 2 เล่ม

52. จะมีกี่วิธี ในการจัดหนังสือเหล่านี้บนชั้น
53. จะมีกี่วิธี ในการจัดหนังสือเหล่านี้บนชั้น ถ้าจัดหนังสือคอมพิวเตอร์ ทั้ง 5 เล่มไว้บนชั้นซ้ายมือ และหนังสือคณิตศาสตร์และศิลปะทั้งคู่ อยู่บนชั้นขวามือ
54. จะมีกี่วิธี ในการจัดหนังสือเหล่านี้บนชั้น ถ้าหนังสือคอมพิวเตอร์ทั้งหมดอยู่บนชั้นซ้ายมือ
55. จะมีกี่วิธี ในการจัดหนังสือเหล่านี้บนชั้น ถ้าหนังสือทั้งหมด ที่มีเนื้อหาเหมือนกัน จัดกลุ่มเข้าด้วยกัน

56. จะมีกี่วิธี ในการจัดหนังสือเหล่านี้บนชั้น ถ้าหนังสือศิลปะสองเล่ม ไม่ถูกรวมกัน

57. จะมีกี่วิธี ในการเลือกหนังสือ 2 เล่ม จากชื่อเรื่องแตกต่างกัน

58. ในเวอร์ชันหนึ่ง ของภาษา BASIC ซึ่งตัวแปรที่ถูกต้อง ประกอบด้วยสายอักขระของ alphanumeric character หรือ เริ่มต้นด้วยตัวอักษรสองตัว (ยกเว้น FN, IF, ON, OR และ TO) อาจจะตามด้วยเครื่องหมายตัวใดตัวหนึ่งใน %, !, #, หรือ $ (alphanumeric character หมายถึงตัวใดตัวหนึ่งใน A ถึง Z หรือ 0 ถึง 9) จะมีชื่อตัวแปรที่ถูกต้อง ของภาษา BASIC ได้กี่ตัว?

59. ไอเดนติไฟเออร์ (identifier) ที่ถูกต้อง ของภาษา FORTRAN ประกอบด้วย สายอักขระ ของ 1 ถึง 6 ตัว (alphanumeric characters) เริ่มต้นด้วยตัวอักษร จะมี ไอเดนติไฟเออร์ ที่ถูกต้อง ของภาษา FORTRAN กี่ตัว?

60. ข้อกำหนดแฟ้มรหัสผ่าน (password - free file specificaton) ในระบบปฏิบัติการ TRSDOS ประกอบด้วย ชื่อ อาจจะตามด้วย ส่วนขยาย และ อาจจะตามด้วย ข้อกำหนดของ drive ชื่อเป็นสายอักขระ ของ alphanumeric characters มากที่สุด 8 ตัว เริ่มต้นด้วยตัวอักษร, ส่วนขยายจะมีเครื่องหมาย / ตามด้วย สายอักขระของ ตัวอักษรเลข (alphanumeric) อย่างมากที่สุด 3 ตัว เริ่มต้นด้วยตัวอักษร, ข้อกำหนด drive คือ :0, :1, :2, หรือ :3 ในกรณีที่ไม่มีข้อกำหนด drive และ :0 มีความหมายเหมือนกัน (ตัวอย่าง EXERCISE/CH1:1.) จะมีข้อกำหนดแฟ้มรหัสผ่าน ใน TRSDOS กี่ตัว

61. ถ้า X เป็นเซต มีสมาชิก n ตัว และ Y เป็นเซต มีสมาชิก m ตัว จะมีฟังก์ชันจำนวนกี่ชุดจาก X ไป Y ?

62. หนังสือเล่มหนึ่ง มีสำเนา 10 ชุด ส่วนอีก 10 เล่มอื่นๆ มีสำเนาเพียงเล่มละชุด จะมีกี่วิธีในการเลือกหนังสือ 10 เล่ม

63. จะมีกี่เทอม ในการกระจายของ

$(x + y)(a + b + c)(e + f + g)(h + i)$?

64. เซตซึ่งมีสมาชิก $(2n + 1)$ ตัว จะมีเซตย่อยกี่ชุด ซึ่งมีสมาชิก n ตัว หรือ น้อยกว่า n ตัว

4.2 วิธีเรียงสับเปลี่ยน และวิธีจัดหมู่

(Permutations and Combinations)

ตำแหน่งมีเพียงหนึ่งตำแหน่ง แต่ผู้สมัครเข้ารับการคัดเลือกมีสี่คน จะมีกี่วิธีในการพิมพ์รายชื่อผู้สมัครทุกคน ใน บัตรลงคะแนน

ใช้หลักการคูณ บัตรลงคะแนน สามารถสร้างได้ ในสี่ขั้นตอนสืบเนื่อง: คือเลือกชื่อที่หนึ่ง เลือกชื่อที่สอง เลือกชื่อที่สาม และเลือกชื่อที่สี่ จำนวนวิธีในการพิมพ์ชื่อผู้สมัครทั้งสี่คนในบัตรลงคะแนน เท่ากับ

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ วิธี}$$

การเรียงอันดับ ของสิ่งของ เช่น ชื่อต่างๆ ในบัตรลงคะแนน เรียกว่า วิธีเรียงสับเปลี่ยน

บทนิยาม

วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสมาชิกที่แตกต่างกัน n สิ่ง $x_1, x_2, \ldots, x_n$ หมายถึงการเรียงลำดับของ สมาชิก n สิ่ง $x_1, x_2, \ldots, x_n$

(A **permutation** of n distinct elements $x_1, x_2, \ldots, x_n$, is an ordering of the n elements $x_1, x_2, \ldots, x_n$.)[1]

ตัวอย่าง 1 มีสิ่งของอยู่สามสิ่ง คือ A, B, และ C จะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยนได้ หกวิธีดังนี้

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

ในการเรียงลำดับ ชื่อผู้สมัคร สี่คน ในบัตรเลือกตั้ง มี 24 วิธี ดังนั้น จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน ของสิ่งของ สี่ สิ่ง เท่ากับ 24 วิธี วิธีซึ่งเราใช้ นับ จำนวน บัตรเลือกตั้ง ที่แตกต่างกัน มีชื่อผู้สมัคร สี่คน อาจนำมาใช้เพื่อให้ได้มา ซึ่งสูตร สำหรับหา จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน ของสมาชิก n ตัว

ทฤษฎีบท

สมาชิก n ตัว จะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยน เท่ากับ n! วิธี

---

[1] Johnsonbaugh หน้า 203

(There are n! permutations of n elements.)

โดยหลักของการคูณ วิธีเรียงสับเปลี่ยน ของสมาชิก n ตัว สามารถสร้างได้ ใน n ขั้นตอนสืบเนื่อง : เลือกสมาชิกตัวที่หนึ่ง, เลือกสมาชิกตัวที่สอง, . . ., เลือกสมาชิกตัวสุดท้าย เนื่องจากสมาชิกตัวที่หนึ่ง เลือกได้ n วิธี หลังจากนั้น จึงเลือกสมาชิกตัวที่สอง เลือกได้ n-1 วิธี เช่นนี้เรื่อยไป ดังนั้น โดยหลักของการคูณ มี

$$n(n-1)(n-2) \ldots 2 \cdot 1 = n!$$

วิธีเรียงสับเปลี่ยน ของสมาชิก n ตัว

ตัวอย่าง 2

สมาชิก 10 ตัว จะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยน เท่ากับ

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$= 3{,}628{,}800 \quad \text{วิธี}$$

ตัวอย่าง 3 จะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยน ตัวอักษร ABCDEF ซึ่งประกอบด้วย สายอักขระย่อย DEF ได้กี่วิธี

(How many permutations of the letters ABCDEF contain the substring DEF?)

ในการประกันว่า รูปแบบ DEF อยู่ในสายอักขระย่อย อักษรสามตัวนี้ต้องอยู่ติดกัน ส่วนตัวอักษรที่เหลือ A, B, และ C จะเรียงลำดับอย่างไรก็ได้ ดูรูป 1

$\boxed{\text{DEF}} \quad \boxed{\text{A}} \quad \boxed{\text{B}} \quad \boxed{\text{C}}$

รูปที่ 1

จากทฤษฎีบท มีสิ่งของ สี่ สิ่ง จะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยน

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \quad \text{วิธี}$$

ตัวอย่าง 4 จะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยน ตัวอักษร ABCDEF ซึ่งประกอบด้วย ตัวอักษร DEF ติดกัน และเรียงลำดับอย่างไรก็ได้ กี่วิธี

(How many permutations of the letters ABCDEF contain the letters DEF together in any order?)

เราแก้ปัญหา โดยทำสองขั้นตอน : เลือกการเรียงอันดับของตัวอักษร DEF กระทำได้ $3! = 6$ วิธี

จากนั้นขั้นตอนที่สอง กระทำได้ 24 วิธี (ดูตัวอย่างที่แล้ว)

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของตัวอักษร ABCDEF ซึ่งประกอบด้วยตัวอักษร DEF ติดกันเรียงลำดับอย่างไรก็ได้ เท่ากับ

$$6 \cdot 24 = 144 \quad \text{วิธี}$$

บางครั้ง เราต้องการพิจารณา การเรียงลำดับ ของ สมาชิก r ตัวเลือกจากสมาชิกที่มีอยู่ n ตัว การเรียงลำดับเช่นนี้ เรียกว่า **วิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ r สิ่ง**

บทนิยาม วิธีเรียงสับเปลี่ยน สิ่งของ r สิ่ง ของ สมาชิกที่แตกต่างกัน จำนวน n ตัว $x_1, x_2, \ldots, x_n$ หมายถึงการเรียงลำดับของเซตย่อยที่มีสมาชิก r ตัว ของเซต $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ จำนวน ของวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ r สิ่ง ของเซตที่มีสมาชิกแตกต่างกัน n ตัว ใช้สัญลักษณ์ P(n,, r)

(An r-permutation of n (distinct) elements $x_1, x_2, \ldots, x_n$ is an ordering of an r-element subset of $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. The number of r-permutations of a set of n distinct elements is denoted P(n, r).)[2]

ถ้า $r = n$ จากบทนิยามข้างต้นนี้ จะได้การเรียงอันดับ ของ สมาชิกทั้งหมด n ตัว ซึ่งเรียกว่าวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่ง หรือเรียกง่ายๆ ว่า วิธีเรียงสับเปลี่ยน นั่นคือ

$$P(n, n) = n!$$

ทฤษฎีบท

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน สิ่งของ r สิ่ง ของเซตที่มีสมาชิกแตกต่างกัน n สิ่ง คือ

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1), \; r \leq n$$

(The number of r-permutations of a set of n distinct elements is

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1), \; r \leq n \;)$$

พิสูจน์ เรานับจำนวนวิธี ในการเรียงอันดับสิ่งของ r สิ่งเลือกจากเซตที่มีสมาชิก n ตัว กระทำดังนี้ : สมาชิกตัวที่หนึ่ง สามารถเลือกได้ n วิธี ขั้นตอนต่อไปเลือกสมาชิกตัวที่สอง มีวิธีเลือก

[2] Johnsonbaugh หน้า 205

$n - 1$ วิธี การเลือกดำเนินต่อไป จนกระทั่ง เลือกสมาชิกตัวที่ r-1 และเลือกสมาชิกตัวที่ r ซึ่งเป็นสมาชิกตัวสุดท้าย มีวิธีเลือก $n - r + 1$ วิธี จากหลักของการคูณ การเลือกเหล่านี้ กระทำได้ $n(n - 1)(n - 2) \ldots (n - r + 1)$ วิธี

ตัวอย่าง 5 จำนวนของ 2-permutation ของ $X = \{a, b, c\}$ หมายถึง

$$P(3, 2) = 3 \cdot 2 = 6$$

ได้แก่

ab, ac, ba, bc, ca, cb

ตัวอย่าง 6

จะมีกี่วิธีในการเลือก ประธาน รองประธาน เลขานุการ และเหรัญญิก ตำแหน่งละหนึ่งคน จากคณะกรรมการ ซึ่งมีอยู่ 10 คน

เราต้องการนับจำนวนของการเรียงลำดับของคน สี่คน เลือกจาก กลุ่มคน 10 คน เนื่องจาก การเรียงลำดับคือ หยิบประธาน (หยิบครั้งที่หนึ่ง) รองประธาน (หยิบครั้งที่สอง) เลขานุการ (หยิบครั้งที่สาม) และเหรัญญิก (หยิบครั้งที่สี่)

ผลเฉลย

$$P(10, 4) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040 \text{ วิธี}$$

เราอาจเขียน $P(n, r)$ ในเทอมของแฟกทอเรียล ดังนี้

$$\begin{aligned} P(n, r) &= n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1) \\ &= \frac{n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1)(n-r) \ldots 2 \cdot 1}{(n-r) \ldots 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 7 จากตัวอย่าง 6 เขียนใหม่ดังนี้

$$\begin{aligned} P(10, 4) &= \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \\ &= 5040 \text{ วิธี} \end{aligned}$$

บทนิยาม

ให้เซต $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ประกอบด้วยสมาชิกที่แตกต่างกัน n ตัว

(a) การจัดหมู่ สิ่งของ r สิ่ง ของ X หมายถึง การเลือกสมาชิก r สิ่ง แบบไม่มีอันดับของเซต X

(An r-combination of X is an unordered selection of r elements of X (i.e., an r-element subset of X).)

(b) จำนวน ของวิธีจัดหมู่ ของเซต ที่มีสมาชิกที่แตกต่างกัน n ตัว ใช้สัญลักษณ์ C(n, r) หรือ $\binom{n}{r}$

ตัวอย่าง 8 จะมีกี่วิธีในการเลือกตัวแทน นักศึกษา 3 คนจากคณะกรรมการซึ่งประกอบด้วยนักศึกษา 5 คน

ให้นักศึกษาทั้ง 5 คน มีหมายเลขกำกับเป็น 1, 2, 3, 4 และ 5 ตามลำดับ เลือกดังนี้ :

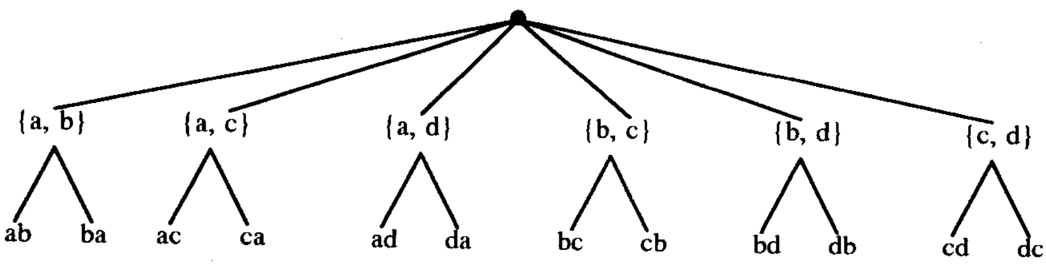
123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345

จัดได้ 10 กลุ่ม นั่นคือ

$C(5, 3) = 10$ วิธี

เราสามารถ สร้าง วิธีเรียงสับเปลี่ยน สิ่งของ r สิ่ง ของ เซตที่มีสมาชิก n ตัว ในสองขั้นตอนสืบเนื่อง ดังนี้ :

ขั้นแรก เลือก การจัดหมู่สิ่งของ r สิ่ง ของ X (เซตย่อยไม่มีอันดับของสิ่งของ r สิ่ง) จากนั้น จึงเรียงลำดับสมาชิกในเซตย่อย ตัวอย่างเช่น การสร้างวิธีเรียงสับเปลี่ยน สิ่งของ 2 สิ่งจากเซต {a, b, c, d} ขั้นแรก เลือก การจัดหมู่สิ่งของ 2 สิ่ง หลังจากนั้น จึงเรียงอันดับสมาชิก ในเซตย่อย ให้ดูรูปข้างล่างนี้



จากหลักของการคูณ จะเห็นว่า จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ r สิ่ง หมายถึง ผลคูณของ จำนวนวิธีจัดหมู่ สิ่งของ r สิ่ง กับ จำนวนของการเรียงอันดับ ของสมาชิก r ตัว

นั่นคือ

$$P(n, r) = C(n, r) \cdot r!$$

ทฤษฎีบท จำนวนวิธีจัดหมู่สิ่งของ r สิ่ง ของเซตที่มีสมาชิก n ตัว หมายถึง

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-r+1)}{r!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!r!} \qquad , \ r \leq n$$

ตัวอย่าง 9 จะมีกี่วิธี ในการเลือก กรรมการ 3 คน จากกลุ่ม ของคน 10 คน

(In how many ways can we select a committee of three from a group of 10 distinct persons?)

เพราะว่าคณะกรรมการ หมายถึง กลุ่มแบบไม่เรียงอันดับของคน

คำตอบคือ

$$C(10, 3) = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120 \text{ วิธี}$$

ตัวอย่าง 10 จะมีกี่วิธีในการเลือก กรรมการ ชุดหนึ่ง ให้เป็นผู้หญิง สองคน และผู้ชาย ห้าคน จากกลุ่มของ ผู้หญิง ห้าคน และผู้ชาย หกคน

(In how many ways can we select a committee of two women and three men form a group of five distinct women and six distinct men?)

เลือกผู้หญิงสองคน จาก ผู้หญิง ห้าคน มี

$$C(5, 2) = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = 10 \text{ วิธี}$$

เลือกผู้ชายสามคน จาก ผู้ชาย หกคน มี

$$C(6, 3) = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20 \text{ วิธี}$$

คณะกรรมการ สร้างขึ้น ใน สองขั้นตอนสืบเนื่อง : เลือกผู้หญิงแล้วเลือกผู้ชาย โดยหลักของการคูณ จะมีจำนวน กรรมการทั้งหมด

$$10 \cdot 20 = 200 \text{ ชุด}$$

ตัวอย่าง 11 สายบิตความยาว เท่ากับแปด มีเลข 1 สี่ตัว มีทั้งหมดกี่ชุด (How many eight-bit strings contain exactly four 1's?)

$$C(8, 4) = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} = 70 \text{ วิธี}$$

ตัวอย่าง 12 ไพ่สำรับหนึ่ง มีไพ่ 52 ใบ แบ่งออกเป็นสี่ชนิด (ดอกจิก, ข้าวหลามตัด, โพแดง, โพดำ) แต่ละชนิด มีไพ่ 13 ใบ (เอช, 2-10, แจ็ค, ควีน และคิง)

(a) จะมีกี่วิธี ในการแจกไพ่ ห้าใบ (ไม่เรียงอันดับ) ให้ผู้เล่นโปเกอร์ แต่ละคน เลือกจากไพ่หนึ่งสำรับ ที่มีไพ่ทั้งหมด 52 ใบ

(How many (unordered) five-card poker hands, selected from an ordinary 52-card deck, are there?)

(b) จะมีกี่วิธี ที่ไพ่บนมือผู้เล่นโปเกอร์ จะเป็นหน้าเดียวกันทั้งหมด

(How many poker hands contain cards all of the same suit?)

(c) จะมีกี่วิธี ซึ่งผู้เล่นโปเกอร์ จะมีไพ่สามใบเป็นชนิดเดียวกัน และอีกสองใบเป็นชนิดที่สอง

(How many poker hands contain three cards of one denomination and two cards of a second denomination?)

ผลเฉลย

(a) $$C(52, 5) = \frac{52!}{47!5!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5!} = 2{,}598{,}960 \text{ วิธี}$$

(b) ผู้เล่นมีไพ่ทุกใบเป็นชนิดเดียวกัน สร้างในสองขั้นตอนสืบเนื่อง คือ เลือกชนิดก่อน แล้วจึงเลือกไพ่ห้าใบ จากชนิดที่เลือกไว้แล้ว ขั้นแรกกระทำได้ 4 วิธี ส่วนขั้นที่สองกระทำได้ C(13, 5) วิธี โดยหลักการคูณ คำตอบคือ

$$4 \cdot C(13, 5) = 5{,}148 \text{ วิธี}$$

(c) ผู้เล่นมีไพ่สามใบเป็นชนิดที่หนึ่งและมีไพ่อีกสองใบเป็นชนิดที่สอง กระทำได้สี่ขั้นตอนสืบเนื่องดังนี้ ขั้นแรกเลือกไพ่ชนิดที่หนึ่ง ต่อไป เลือกไพ่ชนิดที่สอง แล้วจึงเลือกไพ่สาม

ใบจากชนิดที่หนึ่ง และขั้นที่สี่ เลือกไพ่สองใบจากชนิดที่สอง

ชนิดที่หนึ่ง เลือกได้ 13 วิธี ชนิดที่สอง เลือกได้ 12 วิธี จากนั้นเลือกไพ่สามใบจาก ชนิดที่หนึ่ง มี C(4, 3) วิธี และเลือกไพ่สองใบ จาก ชนิดที่สอง มี C(4, 2) วิธี

จากหลักของการคูณ คำตอบ คือ

$$13 \cdot 12 \cdot C(4, 3) \cdot C(4, 2) = 3,744 \text{ วิธี}$$

แบบฝึกหัด 4.2

1. จะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยน กี่วิธีของ a, b, c, d?
2. จงเขียนรายการ วิธีเรียงสับเปลี่ยนของ a, b, c, d
3. จะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยน สิ่งของ 3 สิ่ง ของ a, b, c, d กี่วิธี
4. จงเขียน รายการวิธีเรียงสับเปลี่ยน สิ่งของ 3 สิ่งของ a, b, c, d
5. จะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยน สิ่งของ 11 สิ่งที่แตกต่างกัน กี่วิธี?
6. จะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยน สิ่งของ 5 สิ่งจาก สิ่งของแตกต่างกัน 11 สิ่ง กี่วิธี?
7. จะมีวิธี ในการเลือกประธาน รองประธาน และผู้จดรายงานการประชุม ตำแหน่งละ หนึ่งคน จาก คน 11 คน กี่วิธี?
8. จะมีวิธี ในการเลือกประธาน รองประธาน เลขานุการ และเหรัญญิก ตำแหน่งละ หนึ่งคน จาก คน 12 คน กี่วิธี?
9. จะมีกี่วิธีที่แตกต่างกัน ในการแข่งขันวิ่งม้า 12 ตัวเข้าเส้นชัยในลำดับ Win, Place และ Show?

ในแบบฝึกหัดข้อ 10-18 จะมีสายอักขระกี่ชุด ซึ่งประกอบขึ้นโดยการเรียงอันดับ ของตัวอักษร ABCDEF ตามเงื่อนไขที่กำหนดให้

10. ประกอบด้วย สายอักขระย่อย ACE
11. ประกอบด้วย ตัวอักษร ACE ติดกัน เรียงลำดับอย่างไรก็ได้
12. ประกอบด้วย สายอักขระย่อย DB และ AE
13. ประกอบด้วย สายอักขระย่อย AE หรือ สายอักขระย่อย EA
14. ให้ตัว A อยู่ก่อน ตัว D ตัวอย่างเช่น BCAED, BCADE
15. ไม่มีสายอักขระย่อย AB และ CD
16. ไม่มีสายอักขระย่อย AB และ BE
17. ตัว A อยู่ก่อน ตัว C และ ตัว C อยู่ก่อน ตัว E
18. ประกอบด้วย สายอักขระย่อย DB หรือ สายอักขระย่อย BE

ข้อ 19-21 ให้ X = {a, b, c, d}

19. จงคำนวณ จำนวนวิธีจัดหมู่ สิ่งของ 3 สิ่ง ของ X
20. จงเขียนรายการ วิธีจัดหมู่ สิ่งของ 3 สิ่ง ของ X
21. จงแสดงความสัมพันธ์ ระหว่าง วิธีเรียงสับเปลี่ยน สิ่งของ 3 สิ่ง และ วิธีจัดหมู่ สิ่งของ 3 สิ่ง ของ X โดยการวาดรูป
22. จะมีกี่วิธี ในการเลือก กรรมการหนึ่งชุด ประกอบด้วย สามคน จาก 11 คน
23. จะมีกี่วิธี ในการเลือก กรรมการหนึ่งชุด ประกอบด้วย สี่คน จาก 12 คน

ข้อ 24-28 ในสโมสรแห่งหนึ่ง ประกอบด้วย ผู้ชาย หกคน ผู้หญิง เจ็ดคน

24. จะมีกี่วิธี ในการเลือกรรมการหนึ่งชุด ที่มี 5 คน ?
25. จะมีกี่วิธี ในการเลือก กรรมการหนึ่งชุด ที่ประกอบด้วย ผู้ชาย สามคน และผู้หญิง สี่คน ?
26. จะมีกี่วิธี ในการเลือก กรรมการหนึ่งชุด มีสี่คน ให้มีผู้หญิงอย่างน้อยที่สุด หนึ่งคน ?
27. จะมีกี่วิธี ในการเลือก กรรมการหนึ่งชุด มีสี่คน ให้มีผู้ชาย อย่างมากที่สุด หนึ่งคน
28. จะมีกี่วิธี ในการเลือก กรรมการหนึ่งชุด มีสี่คน ให้มีทั้งผู้หญิงและผู้ชาย
29. จะมีสายบิต ความยาวเท่ากับแปด กี่ชุด ที่มี เลข 0 สามตัว ?

    (How many eight-bit strings contain exactly three 0's ?)
30. จะมีสายบิตความยาวเท่ากับแปด กี่ชุด ที่มี เลข 0 สามตัวติดกัน และเลข 1 ห้าตัวติดกัน ?

    (How many eight-bit strings contain three 0's in a row and five 1's ?)
31. จะมีสายบิตความยาวเท่ากับแปด กี่ชุด ที่ประกอบด้วย เลข 0' ติดกัน อย่างน้อยที่สุด สองตัว?

    (How many eight-bit strings contain at least two O's in a row ?)

ข้อ 32-36 โยนเหรียญหนึ่งเหรียญ 10 ครั้ง

32. จะมีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ ทั้งหมดกี่วิธี?

    (How many outcomes are possible?)
33. จะมีผลลัพธ์ ที่เป็นหัว สามครั้งกี่วิธี

    (How many outcomes have exactly three heads?)
34. จะมีผลลัพธ์ ที่เป็นหัว อย่างมากที่สุดสามครั้ง กีวิธี?

    (How many outcomes have at most three heads?)

35. จะมีผลลัพธ์กี่วิธี ที่เกิดหัว ในการโยนครั้งที่ห้า?

(How many outcomes have a head on the fifth toss?)

36. จะมีผลลัพธ์กี่วิธี ให้เกิดหัว และเกิดก้อย จำนวนเท่ากัน?

(How many outcomes have as many heads as tails?)

ข้อ 37-40 หมายถึง การส่งมอบไมโครโปรเซสเซอร์ 50 ตัว ซึ่งมีชำรุดอยู่ สี่ตัว

37. จะมีกี่วิธี ในการเลือก ไมโครโปรเซสเซอร์ สี่ตัว?

(In how many ways can we select a set of four microprocessors?)

38. จะมีกี่วิธี ในการเลือก ไมโครโปรเซสเซอร์ สี่ตัว ซึ่งไม่มีตัวใดชำรุด?

(In how many ways can we select a set of four nondefective microprocessors?)

39. จะมีกี่วิธี ในการเลือก ไมโครโปรเซสเซอร์ สี่ตัว ซึ่งมีชำรุด อยู่สองตัว?

(In how many ways can we select a set of four microprocessors containing exactly two defective microprocessors?)

40. จะมีกี่วิธี ในการเลือก ไมโครโปรเซสเซอร์ สี่ตัว ให้มีตัวชำรุดอย่างน้อยที่สุดหนึ่งตัว?

(In how many ways can we select a set of four microprocessors containing at least one defective microprocessor?)

แบบฝึกหัดเสริม

1. จงเขียนรายการ วิธีเรียงสับเปลี่ยน ของ {a, b, c}
2. จงนับ จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน ของเซต {a, b, c, d, e, f, g}
3. จงนับ จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน ของ {a, b, c, e, f, g} ให้ จบด้วย a
4. ให้ S = {1, 2, 3, 4, 5}

   a) จงเขียนรายการ วิธีเรียงสับเปลี่ยน สิ่งของ 3 สิ่งของ S

   b) จงเขียนรายการ วิธีจัดหมู่สิ่งของ 3 สิ่งของ S
5. จงหาค่าของ ปริมาณ แต่ละข้อข้างล่างนี้

   a) P(6, 3)   b) P(6, 5)   c) P(8, 1)

   d) P(8, 5)   e) P(8, 8)   f) P(10, 9)
6. จงหาค่าของปริมาณ แต่ละข้อข้างล่างนี้

   a) C(5, 1)   b) C(5, 3)   c) C(8, 4)

   d) C(8, 8)   e) C(8, 0)   f) C(12, 6)
7. จงหา จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน สิ่งของ 5 สิ่ง ของเซตที่มีสมาชิก เก้าตัว
8. จะมีกี่วิธี ในการเรียงอันดับ ผู้ชนะ 5 คน เมื่อจบการแข่งขัน
9. จะมีกี่วิธีที่เป็นไปได้ สำหรับ ตำแหน่งที่หนึ่ง, ที่สอง, และตำแหน่งที่สาม ในการแข่งม้า 12 ตัว ถ้า การเรียงอันดับทั้งหมด จบลง
10. มีผู้สมัคร 6 คนเข้ารับการแข่งขัน ชิงตำแหน่ง ผู้ว่าการรัฐ จะมีกี่วิธีในการเรียงอันดับ ชื่อของผู้สมัครลงใน บัตรลงคะแนน
11. จะมีกี่วิธี ในการเลือกตัวอักษร ห้าตัว เลือกจากตัวอักษรภาษาอังกฤษ
12. จะมีสายบิต ความยาวเท่ากับ 10 กี่ชุด ถ้า

    a) มี 0's สามตัว

    b) จำนวน 0's และ จำนวน 1's มีเท่ากัน

    c) มี 1s อย่างน้อยที่สุด เจ็ดตัว

    d) มี 1s อย่างน้อยที่สุด สามตัว

4.3 วิธีเรียงสับเปลี่ยน และวิธีจัดหมู่โดยทั่วไป

(Generalized Permutations and Combinations)

ในหัวข้อ 4.1 และ 4.2 เราเกี่ยวข้องกับการเรียงอันดับและการเลือก โดยไม่มีการทำซ้ำ ในหัวข้อนี้ เราจะพิจารณาการเรียงอันดับ ของ ลำดับ ซึ่งมีการทำซ้ำ และการเลือกแบบไม่เรียงอันดับ ซึ่งมีการทำซ้ำ

ตัวอย่าง 1 จะมีสายอักขระกี่ชุด ซึ่งสร้างขึ้นโดยใช้ ตัวอักษรต่อไปนี้ ?

MISSISSIPPI

เนื่องจากตัวอักษรมีซ้ำกัน คำตอบจึงไม่ใช่ 11! แต่เป็นตัวเลข น้อยกว่า 11! ปัญหาคือใส่ตัวอักษร ในที่ว่าง 11 ที่

\- - - - - - - - - - -

มี C(11, 2) วิธีในการเลือกตำแหน่ง ของ P สองตัว เมื่อเลือก P แล้ว

มี C(9, 4) วิธีในการเลือกตำแหน่ง ของ S สี่ตัว หลังจากเลือก S แล้ว

มี C(5, 4) วิธีในการเลือกตำแหน่ง ของ I สี่ตัว และอีกหนึ่งตำแหน่ง เหลือสำหรับใส่ M

จากหลักของการคูณ จำนวนวิธีของการเรียงอันดับตัวอักษร คือ

$$C(11, 2)\cdot C(9, 4)\cdot C(5,4) = \frac{11!}{2!\,9!}\cdot\frac{9!}{4!\,5!}\cdot\frac{5!}{4!\,1!}$$

$$= \frac{11!}{2!\,4!\,4!\,1!} = 34{,}650 \text{ วิธี}$$

ทฤษฎีบท สมมติว่า ลำดับ S ประกอบด้วย สิ่งของ n สิ่ง ชนิดที่ 1 มี n_1 สิ่งที่เหมือนกัน ชนิดที่ 2 มี n_2 สิ่งซึ่งเหมือนกัน, ... และ ชนิดที่ t มี n_t สิ่งซึ่งเหมือนกัน จำนวนวิธีของการเรียงอันดับ ของ S คือ

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\ldots\,n_t!}$$

(Suppose that a sequence S of n items has n_1 identical objects of type 1, n_2 identical objects of type 2, . . . , and n_t identical objects of type t. Then the number of orderings of S is

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_t!}$$

ตัวอย่าง 2 มีหนังสือที่แตกต่างกัน แปดเล่ม จะมีกี่วิธี ในการแบ่งหนังสือให้นักศึกษา สามคน ถ้าให้ เบญจวรรณ ได้หนังสือสี่เล่ม ส่วน สมชาย และ มาลินี ได้หนังสือคนละ สองเล่ม ?

จากทฤษฎีบท จำนวนวิธีของการแบ่งหนังสือคือ

$$\frac{8!}{4!\,2!\,2!} = 420 \text{ วิธี}$$

ตัวอย่าง 3 จงพิจารณาหนังสือ สามชื่อเรื่อง: คอมพิวเตอร์ ฟิสิกส์ และประวัติศาสตร์ สมมติว่า ในห้องสมุด หนังสือเหล่านี้ แต่ละชื่อเรื่อง มีสำเนาอยู่อย่างน้อยที่สุด หก เล่ม จะมีกี่วิธี ในการเลือกหนังสือ หกเล่ม ?

ปัญหาคือการเลือกแบบไม่มีอันดับ เลือกสมาชิก หก ตัว จากเซต {คอมพิวเตอร์, ฟิสิกส์, ประวัติศาสตร์} อนุญาต ให้ซ้ำกันได้ การเลือกบอกได้เป็นหนึ่งอย่างโดย จำนวนของหนังสือแต่ละชนิดซึ่งถูกเลือกขึ้นมา ให้ สัญลักษณ์ของการเลือกอย่างหนึ่ง คือ

CS		Physics		History
X X X	|	X X	|	X

ในที่นี้ การเลือก ประกอบด้วย หนังสือคอมพิวเตอร์ สามเล่ม หนังสือฟิสิกส์ สองเล่ม และหนังสือประวัติศาตร์ หนึ่งเล่ม

CS		Physics		History
	|	X X X X	|	X X

ซึ่งแทน การเลือก ประกอบด้วย ไม่มีหนังสือคอมพิวเตอร์ มีหนังสือฟิสิกส์ สี่เล่ม หนังสือประวัติศาสตร์ สองเล่ม

จะเห็นว่า การเรียงอันดับแต่ละชุด ของ X's หกตัว และ |'s สองตัว แทนการเลือกหนึ่งวิธี ดังนั้น ปัญหาของเราคือการนับ จำนวนของ การเรียงอันดับเช่นนี้ สิ่งนี้คือจำนวนวิธี

$$C(8, 2) = \frac{8!}{6!2!} = 8 \cdot 7 = 28$$

ของการเลือก สองตำแหน่ง สำหรับ |'s จากตำแหน่งที่เป็นไปได้ 8 ตำแหน่ง ดังนั้น มี 28 วิธี ในการเลือกหนังสือ หกเล่ม

> **ทฤษฎีบท** ถ้า X เป็นเซต มีสมาชิก t ตัว จำนวนของการเรียงแบบไม่มีอันดับ เลือกสมาชิก k ตัว จาก X อนุญาตให้ซ้ำได้ คือ
>
> $$C(k + t - 1, t - 1) = C(k + t - 1, k)$$

(If X is a set containing t elements, the number of unordered, k-element selections from X, repetition allowed, is

$$C(k + t - 1, t - 1) = C(k + t - 1, k) \;)$$

ตัวอย่าง 4 มีกล่องลูกบอลอยู่ สามกล่อง สีแดง, น้ำเงิน และสีเขียว แต่ละกล่อง มีลูกบอลอย่างน้อยที่สุด แปดลูก

(a) จะมีกี่วิธี ในการเลือกลูกบอล แปดลูก

(In how many ways can we select eigth balls?)

(b) จะมีกี่วิธี ในการเลือกลูกบอล แปดลูก ให้มีลูกบอลทุกสี อย่างน้อยสีละหนึ่งลูก

(In how many ways can we select eigth balls if we must have at least one ball of each color?)

ผลเฉลย

(a) จากทฤษฎีบท จำนวนวิธีของการเลือกลูกบอล แปดลูกคือ

$$C(8 + 3 - 1, 3 - 1) = C(10, 2) = \frac{10!}{8!2!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 5 \cdot 9 = 45 \text{ วิธี}$$

(b) เราสามารถใช้ทฤษฎีบท แก้ปัญหาดังนี้ สิ่งแรก เลือกลูกบอลหนึ่งลูก จากแต่ละสี หลังจากนั้น เลือกลูกบอลเพิ่มอีก ห้าลูก จะมีจำนวนวิธี เท่ากับ

$$C(5 + 3 - 1, 3 - 1) = C(7, 2) = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 7 \cdot 3 = 21 \text{ วิธี}$$

ตัวอย่าง 5 มีหนังสือคณิตศาสตร์ เหมือนกัน 12 เล่ม จะมีกี่วิธีในการแจกแจงให้กับกลุ่มนักศึกษาสี่คน คือ A, B, C และ D

จากทฤษฎีบท ต้องการคำนวณหา $C(12 + 4 - 1, 4 - 1) = C(15, 3) = \frac{15!}{12!3!} = 455$ วิธี

ตัวอย่างที่ 6

(a) จะมีผลเฉลยกี่วิธี ซึ่งเป็น จำนวนเต็มบวกไม่ใช่ค่าลบ ในสมการ

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 29 \ ?$$

(b) จะมีผลเฉลยกี่วิธี ซึ่งเป็น จำนวนเต็ม โดยที่ $x_1 > 0, x_2 > 1, x_3 > 2, x_4 \geq 0$?

วิธีทำ

(a) ผลเฉลยแต่ละวิธี มีความหมายเหมือนกับ การเลือก item 29 ตัว ของชนิด i, i = 1, 2, 3, 4 จากทฤษฎีบท จำนวนวิธีของการเลือก คือ

$$C(29 + 4 - 1) = C(32, 3) = 4,960 \text{ วิธี}$$

(b) ผลเฉลยแต่ละวิธีของสมการ โดยที่ เงื่อนไขซึ่งกำหนดให้ มีความหมายเหมือนกับ การเลือก item 29 ตัว ของชนิด i, i = 1, 2, 3, 4 นอกจากนี้แล้ว item ชนิดที่ 1 ต้องมีอย่างน้อยที่สุด หนึ่งตัว item ชนิดที่ 2 ต้องมีอย่างน้อยที่สุด สองตัว item ชนิดที่ 3 มีอย่างน้อยที่สุด สามตัว

ขั้นแรก เลือก หนึ่ง item จากชนิดที่ 1, สอง item จากชนิดที่สอง และสาม item จากชนิดที่ 3 หลังจากนั้น การเลือก 23 items ที่เหลือ โดยทฤษฎีบท กระทำได้

$$C(23 + 4 - 1, 4 - 1) = C(26, 3) = 2,600 \text{ วิธี}$$

แบบฝึกหัด 4.3

ข้อ 1-3 จงคำนวณหา จำนวนของสายอักขระ ซึ่งประกอบขึ้นจาก การเรียงอันดับของ ตัวอักษรที่กำหนดให้

1. GUIDE
2. SCHOOL
3. SALESPERSONS
4. จะมีกี่วิธี ในการแบ่งหนังสือที่แตกต่างกัน 10 เล่ม ให้นักศึกษา 3 คน ถ้านักศึกษาคนแรก ได้รับหนังสือ 5 เล่ม นักศึกษาคนที่สอง ได้หนังสือ 3 เล่ม และนักศึกษาคนที่สาม ได้หนังสือ 2 เล่ม

ข้อ 5-11 อ้างถึง กองลูกบอล สีแดง น้ำเงิน และสีเขียว โดยที่แต่ละกอง มีลูกบอลอย่างน้อยที่สุด 10 ลูก

5. จะมีกี่วิธี ในการเลือกลูกบอล 10 ลูก
6. จะมีกี่วิธี ในการเลือกลูกบอล 10 ลูก ถ้าเลือกลูกบอลสีแดงอย่างน้อยที่สุด หนึ่งลูก
7. จะมีกี่วิธี ในการเลือกลูกบอล 10 ลูก ถ้าเลือกลูกบอลสีแดงอย่างน้อยที่สุด หนึ่งลูก ลูกบอลสีน้ำเงินอย่างน้อยที่สุด สองลูก และลูกบอลสีเขียว อย่างน้อยที่สุด สามลูก

8. จะมีกี่วิธี ในการเลือกลูกบอล 10 ลูก ถ้าเลือกลูกบอลสีแดง หนึ่งลูกเท่านั้น

9. จะมีกี่วิธี ในการเลือกลูกบอล 10 ลูก ถ้าเลือกลูกบอลสีแดง หนึ่งลูก และ เลือกลูกบอลสีน้ำเงิน อย่างน้อยที่สุด หนึ่งลูก

10. จะมีกี่วิธี ในการเลือกลูกบอล 10 ลูก ถ้าเลือกลูกบอลสีแดงอย่างมากที่สุด หนึ่งลูก

11. จะมีกี่วิธี ในการเลือกลูกบอล 10 ลูก ถ้าเลือกลูกบอลสีแดง เป็นจำนวน สองเท่าของ ลูกบอลสีเขียว

ข้อ 12-17 จงหาจำนวน ผลเฉลยจำนวนเต็ม ของ

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดให้

12. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

13. $x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, x_3 \geq 1$

14. $x_1 = 1, \ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

15. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 = 1$

16. $0 \leq x_1 \leq 6, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

17. $0 \leq x_1 \leq 6, 1 \leq x_2, x_3 \geq 0$

18. จงหา จำนวนผลเฉลย ซึ่งเป็น จำนวนเต็ม ของ สมการ

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$$

โดยที่ $0 \leq x_1 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 5, 0 \leq x_3 \leq 8$ และ $0 \leq x_4 \leq 9$

19. จะมีจำนวนเต็ม กี่ตัว ระหว่าง 1 ถึง 1,000,000 ซึ่งผลรวมของทุกหลัก เท่ากับ 15

(How many integers between 1 and 1,000,000 have the sum of the digits equal to 157)

20. จะมีจำนวนเต็ม กี่ตัว ระหว่าง 1 ถึง 1,000,000 ซึ่งผลรวมของทุกหลัก เท่ากับ 20

ข้อ 21-27 อ้างถึงถุง ซึ่งบรรจุลูกบอล 20 ลูก มีสีแดง 6 ลูก สีเขียว 6 ลูก และสีม่วง 8 ลูก

21. จะมีกี่วิธี ในการเลือกลูกบอล 5 ลูก ถ้าลูกบอลแตกต่างกัน

22. จะมีกี่วิธี ในการเลือกลูกบอล 5 ลูก ถ้าลูกบอลสีเดียวกัน ถือว่าเหมือนกัน

23. จะมีกี่วิธี ในการ หยิบออก (draw) ลูกบอล สีแดง 2 ลูก, สีเขียว 3 ลูก และสีม่วง 2 ลูก ถ้าลูกบอลแตกต่างกัน

24. หยิบลูกบอลออก 5 ลูก จากนั้น ใส่กลับคืน (replace) ลูกบอลต่อไป หยิบออกเพิ่มอีก 5 ลูก จะมีกี่วิธี ในการทำสิ่งนี้ ถ้าลูกบอลแตกต่างกัน

25. หยิบลูกบอลออก 5 ลูกโดยไม่มีการ ใส่กลับคืน จากนั้น หยิบออก เพิ่มอีก 5 ลูก จะมีวิธี ในการทำสิ่งนี้ ถ้าลูกบอลแตกต่างกัน

26. หยิบลูกบอลออก 5 ลูก ให้เป็นสีแดงอย่างน้อยที่สุด 1 ลูก แล้ว ใส่กลับคืน จากนั้น หยิบลูกบอลออก 5 ลูก ให้เป็นสีเขียวอย่างมากที่สุดหนึ่งลูก จะมีกี่วิธี ในการทำสิ่งนี้ ถ้าลูกบอลแตกต่างกัน

27. หยิบลูกบอลออก 5 ลูก ให้เป็นสีแดงอย่างน้อยที่สุด 1 ลูก โดย<u>ไม่มี</u>การ ใส่กลับคืน จากนั้น หยิบออก อีก 5ลูก ให้เป็นสีเขียวอย่างมากที่สุด 1 ลูก จะมีกี่วิธีในการทำสิ่งนี้ ถ้าลูกบอลแตกต่างกัน

28. จะมีกี่วิธี ในการแจกแจง หนังสือคอมพิวเตอร์ เหมือนกัน 15 เล่ม ให้กับนักศึกษา 6 คน

29. จะมีกี่วิธี ในการแจกแจง หนังสือคณิตศาสตร์ เหมือนกัน 15 เล่ม และหนังสือจิตวิทยา เหมือนกัน 10 เล่ม ให้กับนักศึกษา 5 คน

30. จะมีกี่วิธี ในการใส่ลูกบอล เหมือนกัน 10 ลูก ในกล่อง 12 ใบ ถ้าแต่ละกล่องเก็บลูกบอลได้หนึ่งลูก

31. จะมีกี่วิธี ในการใส่ลูกบอล เหมือนกัน 10 ลูก ในกล่อง 12 ใบ ถ้าแต่ละกล่องเก็บลูกบอลได้ 10 ลูก

32. จงแสดงให้เห็นว่า $(kn)!$ หารด้วย $(n!)^k$ ลงตัว

33. จงพิจารณาโปรแกรม ข้างล่างนี้

```
FOR I1 := 1 TO N
   FOR I2 := 1 TO I1
      PRINT I1, I2
   NEXT I2
NEXT I1
```

และตัวอย่าง 7 สรุปได้ดังนี้

$$1 + 2 + \ldots + N = \frac{N(N+1)}{2}$$

34. **จงพิสูจน์ สูตร**

$$C(K-1, K-1) + C(K, K-1) + \ldots C(N+K-2, K-1) = C(K+N-1, K)$$

35. จงเขียนอัลกอริทึม ซึ่งบอกรายการ ผลเฉลยทั้งหมด เป็นจำนวนเต็ม ไม่ใช่ค่าลบ ของสมการ

$$x_1 + x_2 + x_3 = N$$

4.4 สัมประสิทธิทวินาม และเอกลักษณ์เชิงวิธีจัดหมู่

(Binomial Coefficients and Combinatorial Identities)

จำนวน C(n, r) เรียกว่า สัมประสิทธิทวินาม เพราะว่า มันปรากฏในการขยาย ของทวินาม a + b ที่มีการยกกำลัง (ดูทฤษฎีบท 1) สิ่งนี้เกี่ยวเนื่องระหว่าง จำนวนซึ่งเกิดขึ้น ในปัญหาการนับ และจำนวน ซึ่งปรากฏใน นิพจน์เชิงพีชคณิต มีความสำคัญโดยเหตุผล ตัวอย่างเช่น ในการวิเคราะห์ปัญหาเกี่ยวกับ การนับ เราอาจได้ ความสัมพันธ์เชิงพีชคณิตบางอย่าง จากนั้น แก้ปัญหาความสัมพันธ์ อย่างเชิงพีชคณิต แล้ว ให้ผลเฉลยของปัญหาเริ่มต้น เอกลักษณ์ซึ่งเป็นผลลัพธ์ จากวิธีการนับ เรียกว่า **เอกลักษณ์เชิงวิธีจัดหมู่** (combinatorial identity) และอาร์กิวเมนต์ ซึ่งนำไปสู่ การได้สูตร เรียกว่า **อาร์กิวเมนต์เชิงวิธีจัดหมู่** (combinatorial argument) ในหัวข้อนี้ เราจะได้กล่าวถึง ความคิดเหล่านี้ โดยสรุป

เริ่มต้นโดยการอภิปราย ทฤษฎีบททวินาม จากจุดของเชิงวิธีจัดหมู่ ทฤษฎีบทนี้ จะให้สูตร สำหรับ สัมประสิทธิในการกระจาย ของ $(a + b)^n$ เนื่องจาก

$$(a + b)^n = \underbrace{(a + b)\,(a + b)\ldots(a + b)}_{\text{n factors}} \qquad (1)$$

ผลลัพธ์ของการกระจาย จากการเลือก a หรือ b จากหนึ่งเทอม แต่ละชุด ของ n factors คูณการเลือกเข้าด้วยกัน แล้วบวก ผลคูณทั้งหมดที่ได้

ตัวอย่างเช่น ในการกระจาย $(a + b)^2$

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)\,(a + b) = aa + ab + ba + bb\\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

ในสมการ (1) เทอมของรูปแบบ $a^{n-k}b^k$ ได้มาจากการเลือก a จาก n - k factors และ b จาก k factors แต่สิ่งนี้ กระทำใน C(n, k) วิธี เพราะว่า C(n, k) นับจำนวนวิธี ของการเลือก สิ่งของ k สิ่งจากสิ่งของ n สิ่ง ดังนั้น $a^{n-k}b^k$ จะปรากฏ C(n, k) ครั้ง จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(a + b)^n = {} & C(n, 0)a^nb^0 + C(n, 1)a^{n-1}b^1 + C(n, 2)a^{n-2}b^2 + \ldots\\ & + C(n\,, n\text{-}1)a^1b^{n-1} + C(n, n)a^0b^n \qquad (2)\end{aligned}$$

ผลลัพธ์นี้ เรียกว่า ทฤษฎีบททวินาม

ทฤษฎีบท 1 ทฤษฎีบททวินาม ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n, k)a^{n-k}b^k$$

ตัวอย่าง 1 ให้ $n = 3$ จากทฤษฎีบท 1 จะได้

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= C(3,0)a^3b^0 + C(3,1)a^2b^1 + C(3,2)a^1b^2 + C(3,3)a^0b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2 จงกระจาย $(3x - 2y)^4$ โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม ถ้าเราให้ $a = 3x$, $b = -2y$ และ $n = 4$ จะได้

$$\begin{aligned}(3x-2y)^4 = (a+b)^4 &= C(4,0)a^4b^0 + C(4,1)a^3b^1 + C(4,2)a^2b^2 + C(4,3)a^1b^3 \\ &\quad + C(4,4)a^0b^4 \\ &= C(4,0)(3x)^4(-2y)^0 + C(4,1)(3x)^3(-2y)^1 + C(4,2)(3x)^2(-2y)^2 \\ &\quad + C(4,3)(3x)^1(-2y)^3 + C(4,4)(3x)^0(-2y)^4 \\ &= 81x^4 - 216x^3y + 216x^2y^2 - 96xy^3 + 16y^4\end{aligned}$$

ถ้าเรากำหนดให้ $a = b = 1$ จากทฤษฎีบท 1 จะได้เอกลักษณ์

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) \qquad \text{———— (3)}$$

สมการนี้ เราสามารถพิสูจน์ได้โดยการให้ อาร์กิวเมนต์เชิงวิธีจัดหมู่ กำหนดเซต X มีสมาชิก n ตัว C(n, k) นับจำนวนของเซตย่อย สมาชิก k ตัว ดังนั้นทางขวามือ ของสมการ (3) นับจำนวนเซตย่อย ของ X แต่ในทฤษฎีบท 5 แสดงให้เห็นว่า จำนวนเซตย่อย ของ X คือ 2^n เราได้มีการพิสูจน์ สมการ (3) แล้ว

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

รูป 4.4.1

เราเขียน สัมประสิทธิทวินาม ในรูปสามเหลี่ยม ซึ่งเรียกว่า **รูปสามเหลี่ยมของ Pascal** (Pascal's triangle) (ดูรูป 4.4.1) ส่วนที่เป็นขอบ ประกอบด้วย 1's และค่าภายใน เท่ากับ ผลบวกของสองจำนวน ที่เหนือมัน ความสัมพันธ์นี้ จะกล่าวอย่างเป็นทางการ ในทฤษฎีบทถัดไป

ทฤษฎีบท 2 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น

$$\sum_{k=0}^{n} C(n, k) = 2^n$$

พิสูจน์ เซตที่มีสมาชิก n ตัว จะมีเซตย่อยทั้งหมด 2^n ชุด เซตย่อยแต่ละชุด มีสมาชิก 0 ตัว หรือ, สมาชิก หนึ่งตัว, สมาชิก สองตัว, ..., หรือ สมาชิก n ตัว

เซตย่อยที่มีสมาชิก 0 ตัว มีจำนวน $C(n, 0)$ ชุด

เซตย่อยที่มีสมาชิก หนึ่งตัว มีจำนวน $C(n, 1)$ ชุด

เซตย่อยที่มีสมาชิก สองตัว มีจำนวน $C(n, 2)$ ชุด

และ เซตย่อยที่มีสมาชิก n ตัว มีจำนวน $C(n, n)$ ชุด

เพราะฉะนั้น

$$\sum_{k=0}^{n} C(n, k)$$

นับ จำนวนเซตย่อยทั้งหมด ของเซตที่มีสมาชิก n ตัว สิ่งนี้ แสดงว่า

$$\sum_{k=0}^{n} C(n, k) = 2^n$$

ทฤษฎีบท 3

$$C(n+1, k) = C(n, k-1) + C(n, k)$$

สำหรับ $1 \leq k \leq$

พิสูจน์ เราจะใช้การพิสูจน์เชิงวิธีจัดหมู่

ให้ X เป็นเซต มีสมาชิก n ตัว เลือก $a \notin X$ แล้ว $C(n + 1, k)$ หมายถึง จำนวนเซตย่อย สมาชิก k ตัว ของ $Y = X \cup \{a\}$ ขณะนี้ เซตย่อย k-สมาชิกของ Y แบ่งออกเป็นกลุ่มต่างสมาชิก (disjoint classes) สองกลุ่ม คือ

1. เซตย่อยของ Y ซึ่งไม่มี a
2. เซตย่อยของ Y ประกอบด้วย a

เซตย่อยของกลุ่มที่ หนึ่ง จะมีเพียงเซตย่อย k สมาชิกของ X และมีจำนวน $C(n, k)$ ส่วนเซตย่อยของกลุ่มที่ สอง ประกอบด้วยเซตย่อย $(k - 1)$ สมาชิกของ X รวมกับ a จะมีจำนวน $C(k - 1)$ ดังนั้น

$$C(n + 1, k) = C(n, k - 1) + C(n, k)$$

> **ทฤษฎีบทท 4**
>
> $$\sum_{i=k}^{n} C(i, k) = C(n + 1, k + 1)$$

พิสูจน์ เราใช้ทฤษฎีบท 3 ในรูปแบบ

$$C(i, k) = C(i + 1, k + 1) - C(i, k + 1)$$

จะได้

$$\begin{aligned} C(k, k) + C(k + 1, k) + C(k + 2, k) + \ldots + C(n, k) &= 1 + C(k + 2, k + 1) \\ &\quad - C(k + 1, k + 1) + C(k + 3, k + 1) - C(k + 2, k + 1) - C(k + 2, K + 1) \\ &\quad + \ldots + C(n + 1, k + 1) - C(n, k+1) \\ &= C(n + 1, k + 1) \end{aligned}$$

> **ทฤษฎีบท 5** ให้ n เป็น จำนวนเต็มบวก ดังนั้น
>
> $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C(n, k) = 0$$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบททวินาม จะได้ว่า

$$0 = ((-1) + 1)^2 = \sum_{k=0}^{n} C(n, k)(-1)^k 1^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C(n, k)(-1)^k$$

แบบฝึกหัด 4.4

1. จงกระจาย $(x + y)^4$ โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม
2. จงกระจาย $(2c - 3d)^5$ โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม
3. จงหาเทอมที่แปด ในการกระจายของ $(x + y)^{11}$
4. จงหาเทอมที่เจ็ด ในการกระจายของ $(2s - t)^{12}$

ในแบบฝึกหัดข้อ 5 - 9 จงหาสัมประสิทธิ์ของแต่ละเทอม เมื่อกระจายนิพจน์ที่กำหนดให้

5. $x^2y^3z^5$; $(x + y + z)^{10}$
6. $w^2x^3y^2z^5$; $(2w + x + 3y + z)^{12}$
7. a^2x^3 ; $(a + x + c)^2(a + x + d)^3$
8. a^3x^3 ; $(a + ax + x)(a + x)^4$
9. a^3x^4 ; $(a + ax + x)^2$; $(a + x)^5$

ในแบบฝึกหัดข้อ 10 - 12 จงหาจำนวนเทอม ในการกระจายนิพจน์แต่ละชุด

10. $(x + y + z)^{10}$
11. $(w + x + y + z)^{12}$
12. $(x + y + z)^{10}(w + x + y + z)^2$
13. จงหา แถวที่แปด ของ รูปสามเหลี่ยมของ Pascal จาก แถวที่เจ็ด

1 7 21 35 35 21 7 1

14. (a) จงแสดงให้เห็นว่า $C(n, k) < C(n, k + 1)$ ก็ต่อเมื่อ $k < (n - 1)/2$

(b) จงใช้ข้อ (a) เพื่อสรุปว่า จำนวนมากที่สุด ของ $C(n, k)$ สำหรับ $k = 0, 1, \ldots, n$ คือ $C^*n, (n - 1)/2)$ ถ้า n เป็นจำนวนคี่

15. จงแสดงให้เห็นว่า

$$0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C(n, k)$$

16. จงใช้ การอุปนัย (induction) บน n เพื่อพิสูจน์ ทฤษฎีบททวินาม

17. จงพิสูจน์ ทฤษฎีบท 3 โดยใช้ทฤษฎีบท 7 (หัวข้อ 2.2)

18. จงใช้ อาร์กิวเมนต์เชิงวิธีจัดหมู่ เพื่อแสดงให้เห็นว่า

$$C(n, k) = C(n, n - k)$$

19. จงพิสูจน์ ทฤษฎีบท 4 โดยให้ อาร์กิวเมนต์เชิงวิธีจัดหมู่

20. จงหาผลบวก

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (n - 1)n$$

21. จงใช้ทฤษฎีบท 4 เพื่อให้ได้สูตร สำหรับ

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$$

22. จงใช้ทฤษฎีบททวินาม แสดงให้เห็นว่า

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k C(n, k) = 3^n$$

23. สมมติว่า n เป็นจำนวนคู่ จงพิสูจน์ว่า

$$\sum_{k=0}^{n/2} C(n, 2k) = 2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n/2} C(n, 2k - 1)$$

24. จงพิสูจน์ว่า

$$(a + b + c)^n = \sum_{0 \le i + j \le n} \frac{n!}{i!\, j!\, (n - i - j)!} a^i b^i c^{n-i-j}$$

25. จงใช้แบบฝึกหัดข้อ 24 เขียนการกระจายของ

$$(x + y + z)^3$$

26. จงพิสูจน์ว่า

$$3^n = \sum_{0 \le i+j \le n} \frac{n!}{i!\, j!\, (n-i-j)!}$$

27. จงให้ อาร์กิวเมนต์เชิงวิธีจัดหมู่ เพื่อพิสูจน์ว่า

$$\sum_{k=0}^{n} C(n, k)^2 = C(2n, n)$$

แบบฝึกหัดเสริม

1. จงหาการกระจาย ของ $(x + y)^5$
2. จงหาสัมประสิทธิ ของ x^5y^8 ใน $(x + y)^{13}$
3. จะมีกี่เทอม ใน การกระจาย ของ $(x + y)^{100}$
4. จงหาสัมประสิทธิ ของ x^7 ใน $(1 + x)^{11}$
5. จงหาสัมประสิทธิ ของ x^9 ใน $(2 - x)^{19}$
6. จงหาสัมประสิทธิ ของ x^8y^9 ใน การกระจาย ของ $(3x + 2y)^{17}$
7. จงหาสัมประสิทธิ ของ $x^{101}y^{99}$ ใน การกระจาย ของ $(2x - 3y)^{200}$

4.5 การนับเข้า-การตัดออก (Inclusion - Exclusion)

ในชั้นเรียนวิชาโครงสร้างไม่ต่อเนื่อง มี นักศึกษาหญิง 30 คน และนักศึกษาชั้นปีที่สอง 50 คน จงคำนวณหา จำนวนนักศึกษา หญิง หรือ นักศึกษาชั้นปีที่สอง ในชั้นเรียนนี้ คำถามนี้ไม่สามารถตอบได้ จนกว่า จะมีสารสนเทศ มากกว่านี้ การบวกจำนวนนักศึกษาหญิง ในชั้นเรียน กับ จำนวนนักศึกษาชั้นปีที่สอง คำตอบ ไม่น่าถูกต้อง เพราะว่า นักศึกษาหญิง ชั้นปีที่สอง อาจถูกนับสองครั้ง ข้อสังเกตนี้แสดงว่า จำนวนนักศึกษา ในชั้นเรียน ซึ่งเป็นนักศึกษาชั้นปีที่สอง หรือ นักศึกษาหญิง หมายถึง ผลบวก ของ จำนวนนักศึกษาหญิง กับ จำนวนนักศึกษาชั้นปีที่สอง ในชั้นเรียน ลบด้วย จำนวนนักศึกษาหญิง ชั้นปีที่สอง ($|A \cap B|$)

หลักของการนับเข้าและการตัดออก

(The principle of inclusion-exclusion)

ในผลผนวกของเซตจำกัดสองชุด มี จำนวนสมาชิกกี่ตัว? ในบทที่ 1 แสดงให้เห็นแล้วว่า จำนวนสมาชิกในผลผนวกของ เซต A และเซต B หมายถึง ผลบวกของจำนวนสมาชิกในเซต ลบด้วย จำนวนสมาชิก ในผลตัดของสองเซตนี้

นั่นคือ

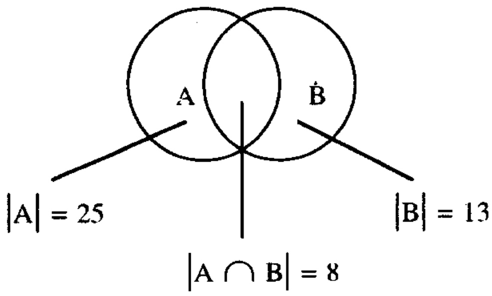
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

ตัวอย่าง 1 ในชั้นเรียนวิชาโครงสร้างไม่ต่อเนื่อง มี นักศึกษาสาขาคอมพิวเตอร์ 25 คน, สาขาคณิตศาสตร์ 13 คน และวิชาเอกร่วมทั้งสองสาขา 8 คน จงคำนวณหาจำนวนนักศึกษาทั้งหมด ซึ่งมีวิชาเอกเป็นคณิตศาสตร์, คอมพิวเตอร์ หรือ ทั้งวิชาคณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์

ผลเฉลย ให้ A เป็นเซตของนักศึกษาในชั้นเรียนนี้ ซึ่งมีวิชาเอกเป็นคอมพิวเตอร์ และ B เป็นเซตของนักศึกษาในชั้นเรียนนี้ มีวิชาเอกเป็นคณิตศาสตร์ ดังนั้น $A \cap B$ หมายถึง เซตของนักศึกษาในชั้นเรียน ซึ่ง มีวิชาเอกร่วม คณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์ เพราะว่านักศึกษาทุกคนมีวิชาเอกเป็นคอมพิวเตอร์ หรือ คณิตศาสตร์ (หรือ ทั้งคู่) แสดงว่า จำนวนนักศึกษาในชั้นเรียนคือ $|A \cup B|$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= 25 + 13 - 8 \\ &= 30 \end{aligned}$$



รูปที่ 1 เซตของนักศึกษา ในชั้นเรียนโครงสร้างไม่ต่อเนื่อง

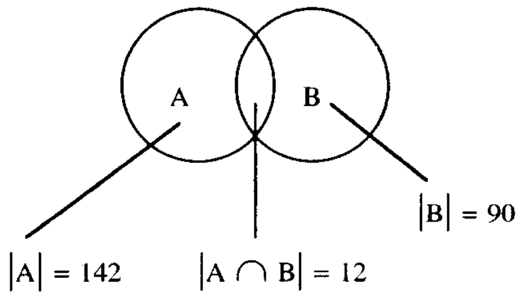
คำตอบ ในชั้นเรียน มีนักศึกษา 30 คน

ตัวอย่างที่ 2 จำนวนเต็มบวก ไม่เกิน 1000 มีอยู่กี่ตัวที่หารด้วย 7 หรือ 11 ลงตัว (How many positive integers not exceeding 1000 are divisible by 7 or 11?)

ผลเฉลย ให้ A เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก ไม่เกิน 1000 ซึ่งหารด้วย 7 ลงตัว และให้ B เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก ไม่เกิน 1000 ซึ่งหารด้วย 11 ลงตัว ดังนั้น $A \cup B$ หมายถึงเซตของจำนวนเต็มบวก ไม่เกิน 1000 ซึ่งหารด้วย 7 หรือ 11 ลงตัว และ $A \cap B$ หมายถึงเซตของจำนวนเต็มบวก ไม่เกิน 1000 ซึ่งหารด้วย 7 และ 11 ลงตัวทั้งคู่ จากบทที่ 2 เราทราบว่า ระหว่างจำนวนเต็มบวกไม่เกิน 100 มีจำนวนเต็ม เท่ากับ $\lfloor 1000/7 \rfloor$ ตัว ซึ่งหารด้วย 7 ลงตัว และมีจำนวนเต็ม เท่ากับ $\lfloor 1000/11 \rfloor$ ตัว ซึ่งหารด้วย 11 ลงตัว เนื่องจาก 7 และ 11 เป็นจำนวนเฉพาะ เพราะฉะนั้น จำนวนเต็ม ซึ่งหารด้วย 7 และ 11 ลงตัวทั้งคู่ คือหารด้วย $7 \cdot 11$ ลงตัว จะได้ว่า จำนวนเต็มบวก ไม่เกิน 1000 ซึ่งหารด้วย 7 และ 11 ลงตัวทั้งคู่ มีเท่ากับ $\lfloor 1000/7 \cdot 11 \rfloor$ ตัว เพราะฉะนั้น

$$
\begin{aligned}
|A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\
&= \lfloor 1000/7 \rfloor + \lfloor 1000/11 \rfloor - \lfloor 1000/7 \cdot 11 \rfloor \\
&= 142 + 90 - 12 \\
&= 220
\end{aligned}
$$

คำตอบ จำนวนเต็มบวก ไม่เกิน 1000 ซึ่งหารด้วย 7 หรือ 11 ลงตัว มี 220 ตัว (ดูรูป 2)



รูปที่ 2

ตัวอย่างต่อไปจะแสดงให้เห็นการหาจำนวนสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์จำกัด (a finite universal set) ซึ่งอยู่นอกผลผนวกของ สองเซต

ตัวอย่าง 3 สมมติว่า ในวิทยาลัยแห่งหนึ่ง มี นักศึกษาชั้นปีที่ 1 จำนวน 1807 คน ในจำนวนนี้ 453 คน ลงทะเบียนวิชาคอมพิวเตอร์, 567 คน ลงทะเบียนวิชาคณิตศาสตร์, 299 คน ลงทะเบียนทั้งวิชาคอมพิวเตอร์และวิชาคณิตศาสตร์ จงคำนวณหา จำนวนนักศึกษาชั้นปีที่ 1 ซึ่งไม่ได้ลงทะเบียนวิชาคอมพิวเตอร์ หรือ วิชาคณิตศาสตร์

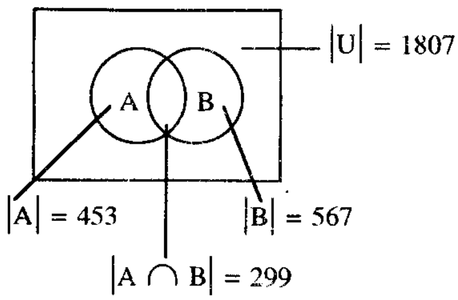
ผลเฉลย การหาจำนวนนักศึกษาชั้นปีที่ 1 ซึ่ง ไม่ได้ลงทะเบียนวิชาคณิตศาสตร์ หรือวิชาคอมพิวเตอร์ คือ การลบ จำนวนนักศึกษา ซึ่งลงทะเบียน หนึ่งวิชา ในวิชาเหล่านี้ ออกจาก จำนวนทั้งหมดของนักศึกษาชั้นปีที่หนึ่ง

ให้ A เป็นเซตของนักศึกษาปีที่หนึ่งทั้งหมด ซึ่งลงทะเบียนวิชาคอมพิวเตอร์, ให้ B เป็นเซตของนักศึกษาชั้นปีที่หนึ่งทั้งหมด ซึ่งลงทะเบียนวิชาคณิตศาสตร์ นั่นคือ $|A| = 453$, $|B| = 567$ และ $|A \cap B| = 299$

จำนวนนักศึกษาชั้นปีที่หนึ่ง ซึ่งลงทะเบียนวิชาคอมพิวเตอร์ หรือวิชาคณิตศาสตร์ คือ

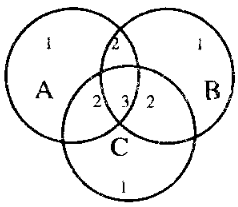
$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= 453 + 567 - 299 \\ &= 721 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น จำนวนนักศึกษาชั้นปีที่หนึ่ง ซึ่งไม่ได้ลงทะเบียนวิชาคอมพิวเตอร์ หรือวิชาคณิตศาสตร์ มีจำนวน 1807 - 721 = 1086 คน (ดูรูปที่ 3)



รูปที่ 8

ต่อไป ในหัวข้อนี้ จะแสดงให้เห็นว่า จำนวนของสมาชิกในผลผนวกของเซตจำกัดจำนวนหนึ่ง จะหาได้อย่างไร ผลลัพธ์ ซึ่งจะได้พัฒนานี้ เรียกว่า หลักของการนับเข้า-ตัดออก (principle of inclusion-exclusion) ก่อนที่จะพิจารณาผลผนวกของ n เซต เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ ให้หาสูตร สำหรับ จำนวนของสมาชิก ใน ผลผนวกของ สามเซต A, B และ C ในการสร้างสูตรนี้ โปรดสังเกตว่า $|A| + |B| + |C|$ นับสมาชิกทุกตัว ซึ่งอยู่ใน หนึ่งเซตแน่นอน ของ สามเซตนี้ เพียงครั้งเดียว, สมาชิกซึ่งอยู่ในสองเซตแน่นอน ของเซตสองครั้ง และสมาชิก ใน สามเซตทั้งหมด สามครั้ง สิ่งนี้คือภาพแรก ดังนี้

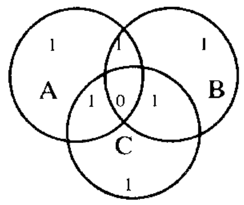


(a) count of elements by $|A| + |B| + |C|$

เพื่อตัด จำนวนสมาชิกซึ่งนับเกิน มากกว่าหนึ่งครั้งของเซตออกไป ให้ลบ จำนวนสมาชิกในผลตัดของ ทุกคู่ ของ สามเซต จะได้

$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$

นิพจน์นี้ ยังคงนับ จำนวนสมาชิก ซึ่งเกิด ในหนึ่ง เซตเพียงครั้งเดียวเท่านั้น สมาชิกซึ่งเกิด ใน สองเซต ยังคงนับหนึ่งครั้ง เพราะว่า ครั้งละสอง อย่างไรก็ตาม สมาชิกเหล่านั้น อยู่ในสามเซตทั้งหมด จะถูกนับ ศูนย์ครั้ง โดยนิพจน์นี้ เพราะว่า มันเกิดใน สามผลตัด ของเซตทั้งหมด ครั้งละสอง สิ่งนี้ คือภาพที่สอง ดังนี้

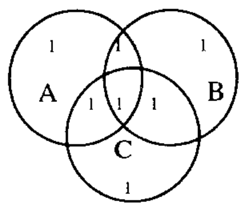


(b) count of elements by $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$

เพื่อทำให้ถูกต้อง ให้บวก จำนวนสมาชิก ใน ผลตัดของทั้งสามเซต นิพจน์สุดท้าย นับสมาชิกแต่ละตัวเพียงครั้งเดียว ไม่ว่ามันจะอยู่ ใน หนึ่งเซต หรือ สองเซต หรือ สามเซต ดังนั้น

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

สูตรนี้ แสดงให้เห็น ในภาพที่สาม ดังนั้น



(b) count of elements by

$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

ตัวอย่าง 4 ในจำนวนนักศึกษาทั้งหมด มีนักศึกษา 1232 คน ลงทะเบียนวิชาภาษาสเปน, 879 คน ลงทะเบียนภาษาฝรั่งเศส, 114 คน ลงทะเบียนภาษารัสเซีย, 103 คน ลงทะเบียนทั้งภาษาสเปนและภาษาฝรั่งเศสทั้งคู่, 23 คน ลงทะเบียนทั้งภาษาสเปนและภาษารัสเซีย และ 14 คน ลงทะเบียนทั้งภาษาฝรั่งเศสและภาษารัสเซีย ถ้ามีนักศึกษา 2092 คน ลงทะเบียนอย่างน้อยที่สุดหนึ่งภาษาคือ สเปน, ฝรั่งเศส และรัสเซีย จงคำนวณหา จำนวนนักศึกษา ซึ่งลงทะเบียนทั้งสามวิชา

ผลเฉลย ให้ S เป็นเซตของนักศึกษา ซึ่งลงทะเบียนภาษาสเปน, F เป็นเซตของนักศึกษาซึ่งลงทะเบียนภาษาฝรั่งเศส และ R เป็นเซตของนักศึกษา ซึ่งลงทะเบียนภาษารัสเซีย
ดังนั้น

$|S| = 1232$, $|F| = 879$, $|R| = 114$, $|S \cap F| = 103$, $|S \cap R| = 23$, $|F \cap R| = 14$

และ $|S \cup F \cup R| = 2092$

ใส่ตัวเลขเหล่านี้ ในสูตร

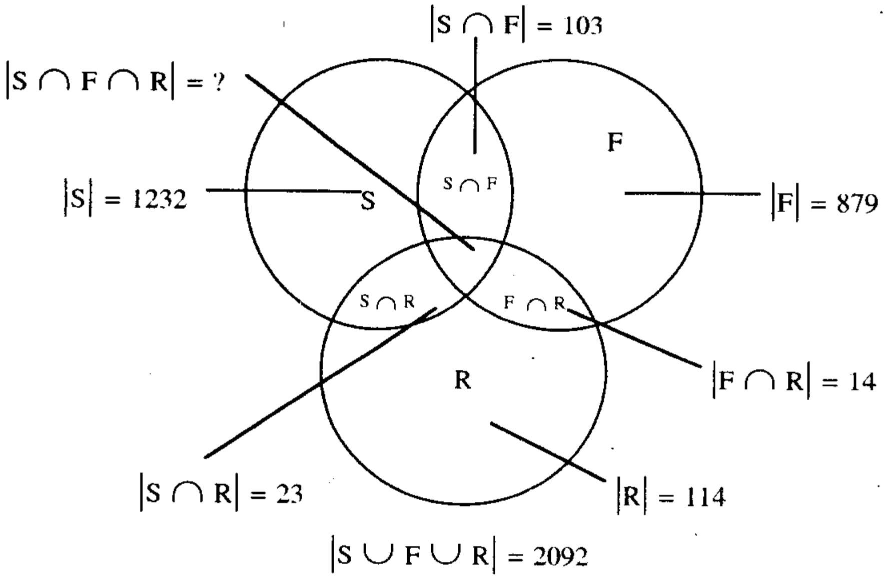
$$|S \cup F \cup R| = |S| + |F| + |R| + |S \cap F| + |S \cap R| + |F \cap R| + |S \cap F \cap R|$$

จะได้

$$2092 = 1232 + 879 + 114 - 103 - 23 - 14 + |S \cap F \cap R|$$

$$|S \cap F \cap R| = 7$$

คำตอบ มีนักศึกษา 7 คน ซึ่งลงทะเบียนทั้งสามวิชาคือ ภาษาสเปน ฝรั่งเศส และรัสเซีย (ดูรูปที่ 5)



รูปที่ 5

ทฤษฎีบท 1 หลักของการนับเข้าและตัดออก

(The principle of inclusion-exclusion)

ให้ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นเซตจำกัด ดังนั้น

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

ตัวอย่าง 5 จงให้สูตร ในการหา จำนวนสมาชิกในผลผนวกของสี่เซต

ผลเฉลย จากหลักการนับเข้าและตัดออก แสดงให้เห็นว่า

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = {} & |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| \\ & - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ & - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|\end{aligned}$$

โปรดสังเกตว่า สูตรนี้ ประกอบด้วย 15 ทอมที่แตกต่างกัน แต่ละเทอมเป็นเซตย่อย ไม่ว่างของ $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$

แบบฝึกหัด 4.5

1. จงคำนวณหาจำนวนสมาชิก ใน $A_1 \cup A_2$ ถ้าในเซต A_1 มีสมาชิก 12 ตัว, ในเซต A_2 มีสมาชิก 18 ตัว และ
   a) $A_1 \cap A_2 = \phi$
   b) $|A_1 \cap A_2| = 1$
   c) $|A_1 \cap A_2| = 6$
   d) $A_1 \subseteq A_2$
2. ในวิทยาลัยแห่งหนึ่ง มีนักศึกษา 345 คน ลงทะเบียนวิชาแคลคูลัส, 212 คน ลงทะเบียนวิชาคณิตศาสตร์ไม่ต่อเนื่อง และ 188 คน ลงทะเบียนแคลคูลัสและคณิตศาสตร์ไม่ต่อเนื่องทั้งสองวิชา จงคำนวณหา จำนวนนักศึกษาซึ่งลงทะเบียนวิชา แคลคูลัส หรือ วิชาคณิตศาสตร์ไม่ต่อเนื่อง
3. จากการสำรวจครัวเรือน ใน สหรัฐอเมริกา พบว่า 96% มีชุดโทรทัศน์ อย่างน้อยที่สุด หนึ่งชุด, 98% มีบริการโทรศัพท์, และ 95% มีบริการโทรศัพท์ และชุดโทรทัศน์ อย่างน้อยที่สุดหนึ่งชุด จงคำนวณหา เปอร์เซนต์ของครัวเรือน ใน สหรัฐอเมริกา ซึ่ง ไม่มี บริการโทรศัพท์ และไม่มีชุดโทรศัพท์
4. จากรายงานการตลาดเกี่ยวกับเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล กล่าวว่า เจ้าของเครื่อง 650,000 คน จะซื้อ โมเด็ม หนึ่งตัว (a modem) สำหรับเครื่องของตน ในปีหน้า และ เจ้าของเครื่อง 1,250,000 คน จะซื้อ ชุดสำเร็จซอฟต์แวร์ อย่างน้อยที่สุด หนึ่งชุด (at least one software package) ถ้ารายงานกล่าวว่า เจ้าของเครื่อง 1,450,000 คน จะซื้อ โมเด็ม หนึ่งตัว หรือชุดซอฟต์แวร์ อย่างน้อยที่สุดหนึ่งชุด จงคำนวณหา จำนวนเจ้าของเครื่อง ซึ่งจะซื้อโมเด็มหนึ่ง

ตัวและชุดสำเร็จซอฟต์แวร์ อย่างน้อยที่สุด หนึ่งชุด ทั้งคู่

5. จงคำนวณหา จำนวนสมาชิก ใน $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ ถ้าในแต่ละเซต มีสมาชิก 100 ตัว และถ้า
   a) เซตเหล่านี้ เป็น เซตต่างสมาชิกทีละคู่
   b) ในแต่ละคู่ ของเซต มีสมาชิกร่วม 50 ตัว และไม่มีสมาชิกร่วมใดๆ ในทั้งสามเซต
   c) ในแต่ละคู่ ของเซต มีสมาชิกร่วม 50 ตัว และมี สมาชิก 25 ตัว ในทั้งสามเซต
   d) ทุกเซต มีจำนวนสมาชิกเท่ากัน
6. จงคำนวณหา จำนวนสมาชิก ใน เซต $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ ถ้า ใน A_1 มี สมาชิก 100 ตัว, ใน A_2 มี สมาชิก 1,000 ตัว และใน A_3 มี สมาชิก 10,000 ตัว ถ้า
   a) $A_1 \subseteq A_2$ และ $A_2 \subseteq A_3$
   b) เซตเหล่านี้ เป็น เซตต่างสมาชิกทีละคู่
   c) ในแต่ละคู่ของเซต มีสมาชิกร่วม 2 ตัว และในทั้งสามเซต มี สมาชิกร่วม 1 ตัว
7. ในโรงเรียนแห่งหนึ่ง มีนักเรียนสาขาคอมพิวเตอร์ 2504 คน ในจำนวนเหล่านี้, 1876 คน ลงทะเบียนภาษา Pascal, 999 คน ลงทะเบียนภาษา Fortran, 345 คน ลงทะเบียนภาษา C, 876 คน ลงทะเบียนทั้งภาษา Pascal และภาษา Fortran, 231 คน ลงทะเบียนทั้งภาษา Fortran และภาษา C, 290 คน ลงทะเบียนทั้งภาษา Pascal และภาษา C ถ้านักเรียน 189 คนในนักเรียนเหล่านี้ ลงทะเบียนทั้ง 3 วิชา คือภาษา Fortran, Pascal และ C จงคำนวณหา จำนวนนักเรียน ใน 2504 คน นี้ ซึ่งไม่ได้ลงทะเบียน ในภาษาโปรแกรมใดๆ เลย ในสามภาษานี้
8. ในการสำรวจนักศึกษาในวิทยาลัยแห่งหนึ่ง จำนวน 270 คน พบว่า 64 คน ชอบหัวผักกาด, 94 คน ชอบบล็อกคอลี, 58 คน ชอบกระหล่ำดอก, 26 คน ชอบทั้งหัวผักกาดและบล็อกคอลี, 28 คน ชอบทั้งหัวผักกาดและกระหล่ำดอก, 22 คน ชอบบล็อกคอลีและกระหล่ำดอก, 14 คน ชอบผักทั้งสามชนิด ในจำนวนนักศึกษา 270 คน มีอยู่กี่คนที่ไม่ชอบรับประทานผักเหล่านี้
9. จงคำนวณหา จำนวนนักศึกษาในวิทยาลัยแห่งหนึ่ง ซึ่ง ลงทะเบียนวิชาใดวิชาหนึ่ง ในวิชาเหล่านี้ แคลคูลัส, คณิตศาสตร์ไม่ต่อเนื่อง, โครงสร้างข้อมูล หรือภาษาโปรแกรม ถ้ามีนักศึกษาจำนวน 507, 292, 312 และ 344 คน ลงทะเบียน ในวิชาเหล่านี้ตามลำดับ, 14 คน ลงทะเบียนทั้งแคลคูลัสและโครงสร้างข้อมูล, 213 คน ลงทะเบียนทั้งแคลคูลัสและภาษาโปรแกรม, 211 คน ลงทะเบียนทั้งคณิตศาสตร์ไม่ต่อเนื่องและโครงสร้างข้อมูล, 43 คน ลงทะเบียนทั้งคณิตศาสตร์ไม่ต่อเนื่องและภาษาโปรแกรม และไม่มีนักศึกษาคนใด ลงทะเบียนทั้งแคลคูลัสและคณิตศาสตร์ไม่ต่อเนื่อง หรือโครงสร้างข้อมูลและภาษาโปรแกรม ตามลำดับ
10. จำนวนเต็มบวก ไม่เกิน 100 ซึ่งหารด้วย 5 หรือ 7 ไม่ลงตัว มีกี่ตัว

11. **จำนวนเต็มบวก** ไม่เกิน 100 **ซึ่งเป็นเลขคี่** หรือ **กำลังสองของจำนวนเต็ม** มีกี่ตัว

(Find the number of positive integers not exceeding 100 that are either odd or the square of an integer.)

12. **จำนวนเต็มบวก ไม่เกิน 1000 ซึ่ง**เป็นกำลังสอง หรือ กำลังสาม ของเลขจำนวนเต็ม มีกี่ตัว

(Find the number of positive integer not exceeding 1000 that are either the square or the cube of an integer.)

13. จำนวนสายบิต ความยาว 8 **ซึ่งไม่มี 0s ติดกัน หกตัว** มีกี่ตัว

(How many bit strings of length eight do not contain six consecutive 0s?)

14. จงคำนวณหา จำนวนสมาชิก ใน ผลผนวกของ สี่เซต ถ้า แต่ละเซต มีสมาชิก 100 ตัว, แต่ละคู่ ของเซต มีสมาชิกร่วม 50 ตัว แต่ละสามเซต มีสมาชิกร่วม 25 ตัว และในสี่เซต มีสมาชิกร่วม 5 ตัว

15. จงคำนวณหา จำนวนสมาชิก ใน ผลผนวกของ สี่เซต ถ้าจำนวนสมาชิกในเซต เป็นดังนี้ 50, 60, 70, 80 ตัว ตามลำดับ แต่ละคู่ ของเซต มีสมาชิก 5 ตัวร่วมกัน แต่ละสามเซต มีสมาชิกร่วมกัน 1 ตัว และไม่มีสมาชิกร่วมใดๆ ใน สี่เซต

4.6 การประยุกต์ ของ การนับเข้าและตัดออก

(Application of Inclusion - Exclusion)

ปัญหาการนับจำนวนมาก สามารถแก้ไขได้ โดยใช้หลักของการนับเข้าและตัดออก ตัวอย่างเช่น เราใช้หลักการนี้ เพื่อหา จำนวนของ จำนวนเฉพาะ ซึ่งน้อยกว่า จำนวนเต็มบวก ปัญหาหลายอย่าง สามารถแก้ไขได้ โดยการนับ จำนวน ฟังก์ชันไปทั่วถึง (onto function) จาก เซตจำกัดชุดหนึ่ง ไปยังเซตอีกชุดหนึ่ง หลักของการนับเข้าและตัดออกถูกนำมาใช้เพื่อหา จำนวนฟังก์ชันเช่นนั้น

รูปแบบเลือกของการนับเข้าและตัดออก

(An alternate form of Inclusion - Exclusion)

มีรูปแบบเลือก ของ หลักการนับเข้าและตัดออก ซึ่งเป็นประโยชน์ ในปัญหาของการนับ โดยเฉพาะ รูปแบบนี้ สามารถนำไปใช้แก้ปัญหา ซึ่งถามเกี่ยวกับ จำนวนสมาชิก ในเซต ซึ่งไม่มี คุณสมบัติใดๆ n สิ่ง $P_1, P_2, \ldots, P_n$

ให้ A_i เป็นเซตย่อย ประกอบด้วย สมาชิกซึ่งมีคุณสมบัติ P_i จำนวนสมาชิกที่มีคุณ สมบัติ $P_{i1}, P_{i2}, \ldots, P_{ik}$ ครบทั้งหมด จะใช้สัญลักษณ์ $N(P_{i1}, P_{i2}, \ldots, P_{ik})$

การเขียนปริมาณเหล่านี้ ในเทอมของเซต เป็นดังนี้

$$|A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots \cap A_{ik}| = N(P_{i1}, P_{i2}, \ldots, P_{ik})$$

ถ้าจำนวนของสมาชิก ซึ่งไม่มีคุณสมบัติใดๆ $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ใช้สัญลักษณ์ $N(\overline{P}_1 \overline{P}_2 \ldots \overline{P}_n)$ และจำนวนของสมาชิกในเซต เท่ากับ N จะได้ว่า

$$N(\overline{P}_1 \overline{P}_2 \ldots \overline{P}_n) = N - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$$

จากหลักของการนับเข้าและตัดออก จะเห็นว่า

$$N(\overline{P}_1 \overline{P}_2 \ldots \overline{P}_n) = N - \sum_{1 \le i \le n} N(P_i) + \sum_{1 \le i < j \le n} N(P_i P_j)$$

$$- \sum_{1 \le i < j < k \le n} N(P_i P_j P_k) + \ldots + (-1)^n N(P_1 P_2 \ldots P_n)$$

จากตัวอย่างข้างล่างนี้ จะแสดงให้เห็นว่า จะใช้ หลักของการนับเข้าและตัดออกอย่างไร เพื่อหา จำนวนผลเฉลย ในจำนวนเต็ม ของสมการที่มีข้อจำกัด (to determine the number of solutions in integers of an equation with constraints.)

ตัวอย่าง 1 สมการข้างล่างนี้ มี ผลเฉลยกี่ชุด

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

เมื่อ x_1, x_2 และ x_3 เป็นจำนวนเต็ม ไม่ใช่ค่าลบ โดยที่ $x_1 \leq 3$, $x_2 \leq 4$ และ $x_3 \leq 6$

ผลเฉลย การประยุกต์หลักของการนับเข้าและตัดออก ให้ ผลเฉลยที่ i มีคุณสมบัติ P_1 คือ $x_1 > 3$, คุณสมบัติ P_2 คือ $x_2 > 4$ และคุณสมบัติ P_3 คือ $x_3 > 6$

จำนวนผลเฉลย ที่ตรงกับ อสมการ $x_1 \leq 3$, $x_2 \leq 4$ และ $x_3 \leq 6$ คือ

$$N(\overline{P_1}\,\overline{P_2}\,\overline{P_3}) = N - N(P_1) - N(P_2) - N(P_3) + N(P_1P_2) + N(P_1P_3) + N(P_2P_3) - N(P_1P_2P_3)$$

จากการใช้เทคนิค ในหัวข้อ probability theory จะได้ว่า

N = จำนวนผลเฉลยทั้งหมด $= C(3+11-1, 11) = 78$

$N(P_1)$ = จำนวนผลเฉลย ที่มี $x_1 \geq 4 = C(3+7-1, 7) = C(9, 7) = 36$

$N(P_2)$ = จำนวนผลเฉลย ที่มี $x_2 \geq 5 = C(3+6-1, 6) = C(8, 6) = 26$

$N(P_3)$ = จำนวนผลเฉลย ที่มี $x_3 \geq 7 = C(3+4-1, 4) = C(6, 4) = 15$

$N(P_1P_2)$ = จำนวนผลเฉลย ที่มี $x_1 \geq 4$ และ $x_2 \geq 5 = C(3+2-1, 2) = C(4, 2) = 6$

$N(P_1P_3)$ = จำนวนผลเฉลย ที่มี $x_1 \geq 4$ และ $x_3 \geq 7 = C(3+0-1, 0) = 1$

$N(P_2P_3)$ = จำนวนผลเฉลย ที่มี $x_1 \geq 5$ และ $x_3 \geq 7 = 0$

$N(P_1P_2P_3)$ = จำนวนผลเฉลย ที่มี $x_1 \geq 4$, $x_2 \geq 5$ และ $x_3 \geq 7 = 0$

ใส่ปริมาณเหล่านี้ ใน สูตร คำนวณหา $N(\overline{P_1}\,\overline{P_2}\,\overline{P_3})$ ซึ่งแสดงจำนวนผลเฉลยที่มี $x_1 \leq 3$, $x_2 \leq 4$ และ $x_3 \leq 6$ เท่ากับ $N(\overline{P_1}\,\overline{P_2}\,\overline{P_3}) = 78 - 36 - 28 - 15 + 6 + 1 + 0 - 0$

$$= 6$$

การเลือกเฟ้นของอีราทอสเทนัส

(The sieve of Eratosthenes)

หลักของการนับเข้าและตัดออก สามารถนำไปใช้เพื่อหา จำนวนของ จำนวนเฉพาะ ไม่เกิน จำนวนเต็มที่กำหนดให้ (to find the number of primes not exceeding a specified positive integer.) โปรดจำว่า จำนวนเต็มประกอบ ซึ่งหารด้วย จำนวนเฉพาะ ลงตัว ตัวหารจะมีค่า ไม่เกินรากที่สองของจำนวนเต็มนั้น (Recall that a **composite integer** is divisibly by a prime not exceeding its square root.) ดังนั้น การหา จำนวนของ จำนวนเฉพาะ ซึ่งไม่เกิน 100 สิ่งแรก ตั้งข้อสังเกตว่า จำนวนเต็มประกอบ ไม่เกิน 100 ต้องมีตัวประกอบจำนวนเฉพาะ (prime factor) มีค่าไม่เกิน 10 เนื่องจาก จำนวนเฉพาะ ไม่เกิน 10 คือ จำนวนเฉพาะสี่ตัวนี้ และจำนวนเต็ม

บวก มากกว่า 1 และไม่เกิน 100 ซึ่งหารด้วย 2, 3, 5 หรือ 7 ไม่ลงตัว

ในการประยุกต์หลักการนับเข้าและตัดออก ให้ P_1 เป็นคุณสมบัติที่ว่า จำนวนเต็ม หารด้วย 2 ลงตัว, P_2 เป็นคุณสมบัติที่ว่า จำนวนเต็ม หารด้วย 3 ลงตัว, P_3 เป็นคุณสมบัติที่ว่า จำนวนเต็ม หารด้วย 5 ลงตัว, และ P_4 เป็นคุณสมบัติที่ว่า จำนวนเต็ม หารด้วย 7 ลงตัว ดังนั้น จำนวน ของ จำนวนเฉพาะ ซึ่งไม่เกิน 100 คือ $4 + N(\overline{P}_1 \overline{P}_2 \overline{P}_3 \overline{P}_4)$ เนื่องจาก มี จำนวนเต็มบวก 99 ตัว มากกว่า 1 และไม่เกิน 100 หลักของการนับเข้าและตัดออก แสดงให้เห็นว่า

$$\begin{aligned} N(\overline{P}_1 \overline{P}_2 \overline{P}_3 \overline{P}_4) = 99 &- N(P_1) - N(P_2) - N(P_3) - N(P_4) + N(P_1P_2) + N(P_1P_3) + N(P_1P_4) \\ &+ N(P_2P_3) + N(P_2P_4) + N(P_3P_4) - N(P_1P_2P_3) - N(P_1P_2P_4) \\ &- N(P_1P_3P_4) + N(P_1P_2P_3P_4) \end{aligned}$$

จำนวน ของ จำนวนเต็ม ไม่เกิน 100 (และมากกว่า 1) ซึ่งหารด้วย จำนวนเฉพาะทั้งหมด ใน เซตย่อย {2, 3, 5, 7} ลงตัว คือ $\lfloor 100/N \rfloor$, เมื่อ N คือ ผลคูณของ จำนวนเฉพาะ ในเซตย่อยนี้, ที่เป็นเช่นนี้เพราะว่า จำนวนเฉพาะสองตัวใดๆ เหล่านี้ ไม่มีตัวประกอบร่วม (This follows since any two of these primes have no common factor.)

$$\begin{aligned} N(\overline{P}_1 \overline{P}_2 \overline{P}_3 \overline{P}_4) &= 99 - \lfloor 100/2 \rfloor - \lfloor 100/3 \rfloor - \lfloor 100/5 \rfloor - \lfloor 100/7 \rfloor \\ &\quad + \lfloor 100/(2\cdot 3) \rfloor + \lfloor 100/(2\cdot 5) \rfloor + \lfloor 100/(2\cdot 7) \rfloor + \lfloor 100/(3\cdot 5) \rfloor \\ &\quad + \lfloor 100/(3\cdot 7) \rfloor + \lfloor 100/(5\cdot 7) \rfloor - \lfloor 100/(2\cdot 3\cdot 5) \rfloor - \lfloor 100/(2\cdot 3\cdot 7) \rfloor \\ &\quad - \lfloor 100/(2\cdot 5\cdot 7) \rfloor - \lfloor 100/(3\cdot 5\cdot 7) \rfloor + \lfloor 100/(2\cdot 3\cdot 5\cdot 7) \rfloor \\ &= 99 - 50 - 33 - 20 - 14 + 16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2 - 3 - 2 - 1 - 0 - 0 \\ &= 21 \end{aligned}$$

คำตอบ จำนวนเฉพาะ ซึ่งไม่เกิน 100 = 4 + 21 = 25 ตัว

การเลือกเฟ้นของ Eratosthenes นำมาใช้เพื่อคำนวณหา จำนวนเฉพาะทั้งหมด ไม่เกิน จำนวนเต็มบวกที่กำหนดให้ ตัวอย่างเช่น กระบวนงาน ซึ่งใช้หา จำนวนเฉพาะ ไม่เกิน 100 ขั้นแรก จำนวนเต็มที่หารด้วย 2 ลงตัว แต่ไม่ใช่ 2 ถูกลบออก เพราะว่า 3 เป็นจำนวนเต็มตัวแรกที่มากกว่า 2, จำนวนเต็มเหล่านั้นทั้งหมด หารด้วย 3 ลงตัว แต่ไม่ใช่ 3 ถูกลบออก เพราะว่า 5 เป็นจำนวนเต็มถัดไปที่เหลือ หลังจาก 3 จำนวนเต็มเหล่านั้น หารด้วย 5 ลงตัว แต่ไม่ใช่ 5, 5 ถูกลบออก จำนวนเต็มถัดไป ที่เหลือ คือ 7 ดังนั้น จำนวนเต็มเหล่านั้น ซึ่งหารด้วย 7 ลงตัว แต่ไม่ใช่ 7 ถูกลบออก เพราะว่า จำนวนเต็มประกอบทั้งหมด ไม่เกิน 100 หารด้วย 2, 3, 5, หรือ 7 ลงตัว, ดังนั้น จำนวนเต็มทั้งหมดที่เหลือ ยกเว้น 1 เป็นจำนวนเฉพาะ ในตารางที่ 1 เป็น

บัญชีชื่อ แสดงจำนวนเต็มเหล่านี้ ซึ่งลบออกในแต่ละขั้น เมื่อจำนวนเต็มแต่ละตัว หารด้วย 2 ลงตัว แต่ไม่ใช่ 2 ถูกขีดเส้นใต้ ใน บัญชีรายชื่อที่ 1

จำนวนเต็ม ซึ่งหารด้วย 3 ลงตัว แต่ไม่ใช่ 3 ถูกขีดเส้นใต้ ใน บัญชีรายชื่อที่สอง

จำนวนเต็ม ซึ่งหารด้วย 5 ลงตัว แต่ไม่ใช่ 5 ถูกขีดเส้นใต้ ใน บัญชีรายชื่อที่สาม

จำนวนเต็ม ซึ่งหารด้วย 7 ลงตัว แต่ไม่ใช่ 7 ถูกขีดเส้นใต้ ใน บัญชีรายชื่อที่สี่

จะได้ว่า จำนวนเต็ม ไม่ได้ถูกขีดเส้นใต้ คือ จำนวนเฉพาะทั้งหมด ไม่เกิน 100

TABLE 1 The Sieve of Eratosthenes.

Integers Divisible by 2 Other than 2 Receive an Underline

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Integers Divisible by 3 Other than 3 Receive an Underline

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Integers Divisible by 5 Other than 5 Receive an Underline

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Integers Divisible by 7 Other than 7 Receive an Underline; Integers in Color Are Prime

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

ตัวอย่าง 2 จำนวน 2, 3, 5, 7, 11, และ 13 เป็นจำนวนเฉพาะ ในขณะที่ 4, 10, 16, และ 21 ไม่ใช่จำนวนเฉพาะ เป็นการง่ายที่จะเขียน อัลกอริทึม ตรวจสอบว่า จำนวนเต็มบวก $n > 1$ เป็นจำนวนเฉพาะ หรือไม่ สิ่งแรก ตรวจสอบว่า $n = 2$ หรือไม่ ถ้า $n > 2$ เราเอาเลขตัวนี้ตั้งหารด้วย จำนวนเต็มทุกตัว ตั้งแต่ 2 จนถึง n-1 ถ้าไม่มีเลขใดๆ เลยในตัวหารเหล่านี้ หาร n ลงตัว แสดงว่า n เป็นจำนวนเฉพาะ ในการทำให้กรรมวิธีนี้ มีประสิทธิภาพมากขึ้น โปรดสังเกตว่า ถ้า $mk = n$ แล้ว m หรือ k จะมีค่าน้อยกว่า หรือเท่ากับ $\sqrt{n}$ สิ่งนี้ หมายความว่า ถ้า n ไม่ใช่จำนวนเฉพาะ มันจะมีตัวหาร k ซึ่งมีคุณสมบัติของ อสมการ $1 \leq k \leq \sqrt{n}$ เราจำเป็นเพียงทดสอบเฉพาะตัวหาร ซึ่งมีค่าในพิสัยนี้ เท่านั้น และถ้า n มีจำนวนคู่ใดๆ เป็นตัวหาร, n จะต้องมี 2 เป็นตัวหารด้วย ดังนั้น หลังจากการตรวจสอบสำหรับ การหารด้วย 2 แล้ว เราอาจจะข้ามตัวหารซึ่งเป็นจำนวนเต็มคู่ ทั้งหมด

```
SUBROUTINE PRIME(N)
1. IF (N = 2) THEN
   a. PRINT('PRIME')
   b. RETURN
2. ELSE
   a. IF (N/2 - INT(N/2)) THEN {หรือ IF (MOD(N, 2)) = 0 THEN)
      1. PRINT ('NOT PRIME')
      2. RETURN
   b. ELSE
      1. FOR D = 3 THRU SQR(N) BY 2
         a. IF (N/D = INT(N/D)) THEN {หรือ
            IF (MOD(N, D) = 0) THEN)
            1. PRINT ('NOT PRIME')
            2. RETURN
      2. PRINT (PRIME')
      3. RETURN
END OF SUBROUTINE PRIME
```

ตัวอย่าง 3 สายบิต ความยาวเท่ากับ 8 ซึ่งเริ่มต้นด้วยบิต 1 หรือจบด้วยสองบิต 00 มีกี่ชุด?

(How many bit strings of length eight either start with a 1 bit or end with the two bits 00?)

ผลเฉลย (ใช้หลักการนับเข้าและตัดออก)

งานแรก, สร้างสายบิตความยาวเท่ากับแปด ซึ่งจบด้วย บิต 1 มี $2^7 = 128$ วิธี

1 - - - - - - -

งานที่สอง, สร้างสายบิตความยาวเท่ากับแปด ซึ่งจบด้วยสองบิต 00 มี $2^6 = 64$ วิธี

- - - - - - 0 0

ทั้งสองงาน สร้างสายบิตความยาวเท่ากับแปด ซึ่งเริ่มต้นด้วย 1 และจบด้วย 00 กระทำได้

$2^5 = 32$ วิธี

1 - - - - - 0 0

สูตร $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

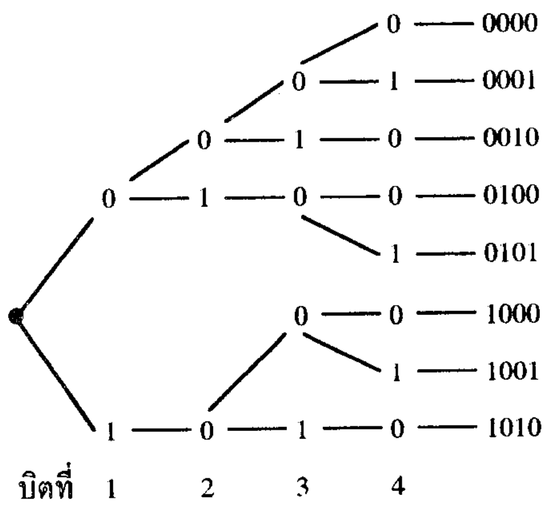
เพราะฉะนั้น สายบิตความยาวเท่ากับแปด ซึ่งเริ่มต้นด้วย 1 หรือ จบด้วย 00 มีจำนวน

$= 128 + 64 - 32 = 160$ ชุด

ตัวอย่าง 4 สายบิตความยาวเท่ากับสี่ ไม่มีบิต 1 ติดกัน มีกี่ชุด

(How many bit strings of length four do not have consecutive 1s?)

ผลเฉลย (ใช้แผนภาพรูปต้นไม้)



คำตอบ 8 วิธี