บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้น
(Introduction)

1.1 เซต (Sets)

1.2 การดำเนินการบนเซต (Set Operstions)

1.3 ลำดับและสายอักขระ (Sequences and Strings)

1.4 จำนวนเต็มและการหาร (The Integers and Division)

1.5 จำนวนเต็มและอัลกอริทึม (Integers and Algorithms)

แนวคิด เรื่องเซต เป็นพื้นฐาน ของวิชาคณิตศาสตร์ ทั้งหมด และงานประยุกต์ทางคณิตศาสตร์

1.1 เซต หมายถึง กลุ่มของสิ่งของ ซึ่งนิยามดีแล้ว สิ่งของนี้ เรียกว่า สมาชิกของเซต

(A set is any well-defined collection of objects called the elements or members of the, set.)

ตัวอย่างเช่น เซตของนักศึกษาทุกคนในชั้นเรียน CT 203, เซตของตัวสระในภาษาอังกฤษ, เซตของจำนวนจริงระหว่าง 0 ถึง 1

ถ้าเป็นเซตจำกัด (finite set) จะมีขนาดไม่ใหญ่มาก เราอธิบาย เซต โดยเขียน รายการสมาชิก อยู่ภายในเครื่องหมายวงเล็บปีกกา สมาชิกแต่ละตัว ให้คั่นด้วยเครื่องหมาย comma (,) ชื่อเซต ใช้อักษรตัวใหญ่ อยู่ทางซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับ สมาชิกแต่ละตัว ใช้อักษรตัวเล็ก ตัวอย่างเช่น ให้ V เป็นเซตของสระในภาษาอังกฤษ เขียนดังนี้

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

ให้ Z = เซตของจำนวนเต็ม ได้แก่ . . ., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, . . .

N = เซตของจำนวนธรรมชาติ หรือเซตของจำนวนเต็มบวก

R = เซตของจำนวนจริง (set or real numbers)

Q = เซตของจำนวนตรรกยะ (set of rational numbers)

ตัวอย่าง ให้ A เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก น้อยกว่า 5

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

หมายถึง เซต A มีสมาชิกสี่ตัว คือ 1, 2, 3 และ 4

สมาชิกในเซต จะเรียงลำดับอย่างไรก็ได้ ดังนั้น เซต A อาจจะเขียน ดังนี้

$A = \{1, 3, 4, 2\}$ หรือ $A = \{4,1, 3, 2\}$

มีความหมายเหมือนกัน

สมาชิกทั้งหมดในเซต ต้องแตกต่างกัน ดังนั้น สมาชิกซ้ำกัน จึงถือว่า มีเพียงหนึ่งตัว

จากตัวอย่างข้างต้น เซต A อาจเขียนดังนี้

$$A = \{1, 2, 2, 3, 4, 4\} \quad \text{หรือ} \quad A = \{4, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1\}$$

ถ้าเป็นเซต จำกัดขนาดใหญ่ หรือ เซตอนันต์ (infinite set) เราอธิบายเซต โดยเขียนคุณสมบัติ ที่จำเป็นสำหรับ การเป็นสมาชิก

ตัวอย่างเช่น

$$B = \{x \mid x \text{ is a positive, even integer}\}$$

หมายถึง เซต B มีสมาชิกเป็น จำนวนเต็มคู่ บวก ทั้งหมด

ดังนั้น เซตนี้ จึงประกอบด้วยจำนวนเต็ม 2, 4, 6, 8, . . .

The set of even integer is

$$E = \{n \mid n \in Z, 2 \text{ divides } n\}$$

จากตัวอย่างแรก เขียนดังนี้

$$A = \{x \mid x \text{ is a positive integer less than } 5\}$$

เครื่องหมาย vertical bar "|" *อ่านว่า such that สมการข้างต้นจึงอ่านว่า* "A เท่ากับเซต ของ x ทุกตัว โดยที่ x เป็นจำนวนเต็มบวก มีค่า น้อยกว่า 5" ในที่นี้ คุณสมบัติที่จำเป็นสำหรับการเป็นสมาชิก ของ เซต เรียกว่า ประพจน์ (*proposition*) เป็น *sentence* หรือ *statement* คือ จำนวนเต็มบวก น้อยกว่า 5 โปรดสังเกตว่า คุณสมบัติ จะปรากฏหลังเครื่องหมาย |

ให้ N *เป็นเซตของจำนวนเต็ม ไม่ใช่ลบ (set of nonnegative integer)*

ถ้า X เป็นเซตจำกัด มีสมาชิก n ตัว $n \in N$

เราให้

$|X|$ = จำนวนสมาชิก ในเซต X หรือเรียกว่า cardinality ของ เซต X

เพราะฉะนั้น $n = |X|$ ถ้า x อยู่ในเซต X หรือ x เป็นสมาชิกของ เซต X เขียนดังนี้ $x \in X$ ถ้า x ไม่อยู่ในเซต X หรือ x ไม่ใช่สมาชิกของเซต X เขียนดังนี้ $x \notin X$

จากตัวอย่างข้างต้น $|A| = 4$

$1 \in A$ แต่ $1 \notin B$

เซตที่ไม่มีสมาชิก เรียกว่า เซตว่าง (empty หรือ null หรือ void set) ใช้สัญลักษณ์ ϕ

เพราะฉะนั้น $\phi = \{\ \}$ และ $|\phi| = 0$

ตัวอย่าง เซตว่าง

$$A = \{x \mid x \in Z \text{ and } x^2 = 11\}$$

$$C = \{x \mid x \in R \text{ and } x^2 + 4 = 0\}$$

บทนิยาม เซตสองชุด จะเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ มีสมาชิกเหมือนกัน

(Two sets are **equal** if and only if they have the same elements.)

ตัวอย่าง ข้อใดเป็นคู่ของเซตที่เท่ากัน

1) $\{1, 1, 3\}, \{3, 3, 1\}$ 2) $\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 2\}$

3) $\{1, 2, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}$ 4) $\{1, 3\}, \{1, 1, 1, 3, 3, 3\}$

5) $\{2, 3, 5, 7\}, \{3, 5, 2, 7\}$

คำตอบ ถูกทุกข้อ

ตัวอย่าง ให้

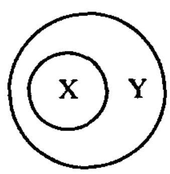
$$A = \{x \mid x^2 + x - 6 = 0\}\ ,\ B = \{2, -3\}$$

เพราะฉะนั้น $A = B$

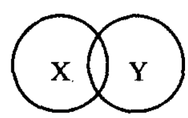
กำหนดให้ X และ Y เป็นเซตสองชุด ถ้าสมาชิกทุกตัวของเซต X เป็นสมาชิกของเซต Y เราพูดว่า X **เป็นเซตย่อย** (subset) ของ Y เขียนดังนี้ $X \subseteq Y$

ถ้า X ไม่ใช่เซตย่อยของ Y เขียนดังนี้ $X \not\subseteq Y$

ตัวอย่าง แผนภาพของเวนน์ (Venn diagram)



$X \subseteq Y$



$X \not\subseteq Y$

ตัวอย่าง ให้

$C = \{1, 3\}$, $A = \{1, 2, 3, 4)$

ดังนั้น C เป็นซตย่อย ของ A

เซตใดๆ ก็ตาม จะเป็นเซตย่อยของตัวมันเอง (every set is a subset of itself) เพราะว่าสมาชิกทุกตัว ของ X อยู่ในเซต X

ถ้า X เป็นเซตย่อยของ Y และ X ไม่เท่ากับ Y

เราพูดว่า X **เป็นเซตย่อยแท้** (proper subset) ของ Y ใช้สัญลักษณ์ $X \subset Y$

เซตว่าง จะเป็น เซตย่อย ของทุกเซต (The empty set is a subset of every set.)

บทนิยาม กำหนดให้ S เป็นเซตใดๆ เซตกำลังของ S หมายถึง เซตของเซตย่อยทั้งหมดของเซต s ใช้สัญลักษณ์ P(S)

(Given a set S, the **power set** of S is the set of all subsets of the set S and denoted by P(S).)

ทฤษฎีบท ถ้าเซต X มีสมาชิก n ตัว เซตกำลังของ X จะมีสมาชิก 2^n ตัว

If $|X| = n$, then $|P(X)| = 2^n$

ตัวอย่าง จงหาเซตกำลังของเซตว่าง

เนื่องจาก เซตว่าง คือเซตที่ไม่มีสมาชิกเลย $|\phi| = 0$ พราะฉะนั้น $n = 0$ และ $2^n = 2^0 = 1$

เซตว่าง จึงมี เซตย่อย เพียง ชุดเดียว คือ ตัวมันเอง

$$P(\phi) = \{\phi\}$$

ตัวอย่าง จงหาเซตกำลัง ของ $\{\phi\}$

เซต $\{\phi\}$ มีสมาชิกหนึ่งตัว คือ ϕ เพราะฉะนั้น เซต $\{\phi\}$ จะมีเซตย่อย $2^1 = 2$ ชุด คือ $\phi, \{\phi\}$

ดังนั้น $P(\{\phi\}) = \{\phi, \{\phi\}\}$

ตัวอย่าง ให้ $A = \{a, b, c\}$ จงหา $P(A)$

เซต A มีสมาชิก 3 ตัว เพราะฉะนั้น จะมีเซตย่อย = $2^3 = 8$ ชุด ได้แก่ $\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$

เพราะฉะนั้น

$$P(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, (a. c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

ตัวอย่าง จงหาเซตกำลัง ของ $\{1, 2\}$

เซตนี้ มีสมาชิกสองตัว เนื่องจาก $2^n = 2^2 = 4$, เซตนี้ มีเซตย่อย 4 ชุด

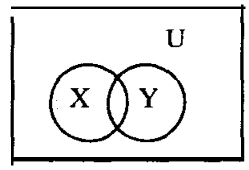
$$\therefore \quad P(\{1, 2\}) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

1.2 การดำเนินการบนเซต (Operations on Sets)

ให้ X และ Y เป็นเซตสองชุด มีหลายวิธี ในการรวม (combine) เซต X และ Y

ให้เป็นเซตใหม่ หนึ่งชุด ดังนี้

$X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ or } x \in Y\}$

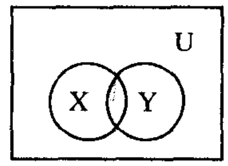


เรียกว่า ผลผนวก (union) ของเซต X และ Y หมายถึง เซต ซึ่งประกอบด้วย สมาชิกทั้งหมด ซึ่งอยู่ใน X หรืออยู่ใน Y หรืออยู่ในทั้งสองเซต

ตัวอย่าง จงหาผลผนวกของเซต $\{1, 3, 5\}$ และ $\{1, 2, 3\}$

คำตอบ = $\{1, 2, 3, 5\}$

$X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ and } x \in Y\}$

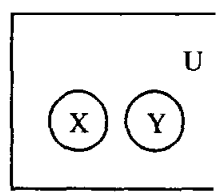


เรียกว่า **ผลตัด** (intersection) ของ X และ Y หมายถึง เซต ซึ่ง ประกอบด้วย สมาชิกทั้งหมด ซึ่งอยู่ในเซต X และอยู่ในเซต Y ทั้งคู่

ตัวอย่าง จงหาผลตัดของเซต $\{1, 3, 5\}$ และ $\{1, 2, 3\}$

คำตอบ = $\{3\}$

เซต X และ เซต Y จะเป็น**เซตต่างสมาชิก** (disjoint set) ถ้า $X \cap Y = \phi$



ตัวอย่าง ให้ $X = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $Y = \{2, 4, 6, 8\}$

เนื่องจาก $X \cap Y = \phi$ เพราะฉะนั้น X และ Y เป็นเซตต่างสมาชิก

เซต ของ เซต ให้ชื่อว่า $\mathcal{J}$ จะเรียกว่า **เซตต่างสมาชิกทีละคู่** เมื่อใดก็ตามที่ x และ Y เป็นเซตแตกต่างกัน ใน $\mathcal{J}$, X และ Y เป็นเซตต่างสมาชิกกัน

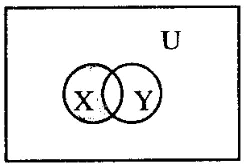
(A collection of sets $\mathcal{J}$ is said to be **pairwise disjoint** if whenever X and Y are distinct sets in $\mathcal{J}$, X and Y are disjoint.)

ตัวอย่าง เซตต่างสมาชิกทีละคู่

$\mathcal{J} = \{\{1, 4, 5\}, \{2, 6\}, \{3\}, \{7, 8\}\}$

$X - Y = \{X \mid x \in X \text{ and } x \notin Y\}$

$A \backslash B = \{x : x \in A \text{ and } x \notin B\}$



X - Y

เรียกว่า **เซตผลต่าง หรือ ส่วนเติมเต็มสัมพัทธ์** (difference (or relative complement))

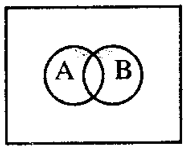
หมายถึง เซตผลต่าง X - Y ประกอบด้วย สมาชิกทั้งหมด ใน X แต่ ไม่อยู่ใน Y

The symmetric difference $A \oplus B$ of the set A and B is the set

$A \oplus B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B \text{butnotboth})$

หรือ

$A \oplus B = (A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$



$A \oplus B$

หมายถึง ผลต่างสมมาตร ของเซต A และ B ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ในเซต A หรือ สมาชิกที่อยู่ในเซต B แต่ต้องไม่อยู่ในทั้งสองเซต

ตัวอย่าง ให้ $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{4, 5, 6\}$

ดังนั้น

$A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$

$A \cap B = \{5\}$

$A - B = \{1, 3\}$

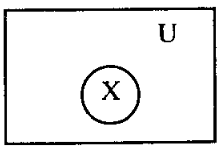
$B - A = \{4, 6\}$

$A \oplus B = \{1, 3, 4, 6\}$

บางครั้ง เราเกี่ยวข้องกับ เซต ซึ่งเป็นเซตย่อยทั้งหมด ของ U เซต U เรียกว่า **เอกภพสัมพัทธ์ หรือ เอกภาพสัมพัทธ์** (Universal set or a universe) เซต U ต้องกำหนดชัดแจ้ง หรือ อ้างเองจาก เนื้อหา (context)

กำหนดให้ U เป็นเอกภาพสัมพัทธ์ และ X เป็นเซตย่อยของ U

U - X เรียกว่า **ส่วนเติมเต็ม** (complement) ของ X ใช้สัญลักษณ์ $\overline{X}$



$\overline{X}$

$\overline{X} = \{x \mid x \notin X\}$

เอกภพสัมพัทธ์ U จะประกอบด้วยสิ่งของทั้งหมด ซึ่ง อยู่ภายใต้ การพิจารณา ใน แผนภาพเวนน์ (Venn diagram) U ถูกแทนที่ ด้วย รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ส่วนเซตอื่นๆ จะใช้ รูปวงกลม

ตัวอย่าง ให้

$A = \{1, 3, 5\}$, U เป็นเอกภพสัมพัทธ์

$u = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

ดังนั้น $\overline{A} = \{2, 4\}$

ในทางตรงกันข้าม ถ้ากำหนดให้ $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

ดังนั้น $\overline{A} = \{7, 9\}$

จะเห็นได้ชัดเจนว่า ส่วนเติมเต็ม ขึ้นอยู่กับ เอกภพสัมพัทธ์ ซึ่งเรากำลังทำงานด้วย

ทฤษฎีบท ให้ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และให้ A , B และ C เป็นเซตย่อย ของ U คุณสมบัติต่อไปนี้ เป็นจริง

(a) กฎการเปลี่ยนกลุ่ม **(Associative laws) :**

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(b) กฎการสลับที่ **(Commutative laws) :**

$A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$

(c) กฎการแจกแจง **(Distributive laws) :**

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(d) กฎเอกลักษณ์ **(Identity laws) :**

$A \cup \phi = A$, $A \cap \cup = A$

(e) กฎส่วนเติมเต็ม **(Complement laws) :**

$A \cup A = A$, $A \cap A = A$

(f) กฎค่าขอบเขต **(Bound laws) :**

$A \cup U = U$, $A \cap \phi = \phi$

(g) Absorption laws :

$A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$

(h) Involution laws :

$$\overline{\overline{A}} = A$$

(i) O/l laws :

$$\overline{\phi} = U \quad , \quad \overline{U} = \phi$$

(j) De Morgan's laws for sets :

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad , \quad \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

บทนิยาม ผลผนวก $\mathcal{J}$ ของเซต หมายถึง เซต ซึ่งประกอบด้วย สมาชิก ซึ่งอยู่ในอย่างน้อยที่สุด หนึ่งเซต ใน เซต $\mathcal{J}$

(The union of a collection of sets is the set that contains those elements that are members of at least one set in the collection.)

$$\cup \mathcal{J} = \{x \mid x \in X \text{ for some } X \in \mathcal{J}\}$$

ในทำนองเดียวกัน เรานิยาม ผลตัด ของ $\mathcal{J}$ ให้เป็นเซตซึ่ง ประกอบด้วยสมาชิก ซึ่งอยู่ใน ในทุกเซต ใน $\mathcal{J}$ เป็นทางการ ดังนี้

(The intersection of a collection of sets is the set that contains those elements that are members of all the sets in the collection.)

$$\cap \mathcal{J} = \{x \mid x \in X \text{ for all } X \in \mathcal{J}\}$$

ถ้า $\mathcal{J} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$

เราเขียน

$$\cup \mathcal{J} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad , \quad \cap \mathcal{J} = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

และถ้า

$$\mathcal{J} = \{A_1, A_2, \ldots\}$$

เราเขียน

$$\cup \mathcal{J} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad , \quad \cap \mathcal{J} = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

ตัวอย่าง ถ้า

$A_n = \{n, n+1, \ldots\}$

และ

$= \{A_1, A_{,}, \ldots\}$

จะได้

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup \mathcal{J} = \{1, 2, \ldots\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap \mathcal{J} = \phi$$

ผลแบ่งกั้น หรือ เซตผลหาร ของเซตไม่ว่าง s หมายถึง เซตของ เซตย่อย ไม่ว่าง ซึ่งเป็น เซตต่างสมาชิก และมีผลผนวก เป็น s

(A **partition or quotient** set of a nonempty set S is a collection of nonempty subsets which are disjoint and whose union is S.)

ตัวอย่าง ให้

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$X_1 = \{1, 4, 5\}, X_2 = \{2, 6\}, X_3 = \{3\}, X_4 = \{7, 8\}$

เนื่องจาก สมาชิกแต่ละตัวของ เซต X อยู่ในเซตใด เซตหนึ่ง ใน

$\mathcal{J} = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$

$= \{\{1, 4, 5\}, \{2, 6\}, \{3\}, \{7, 8\}\}$

และ $\bigcup \mathcal{J} = X$, เพราะฉะนั้น $\mathcal{J}$ เป็นผลแบ่งกั้น ของ X

ตอนเริ่มต้น ของ หัวข้อนี้ เราชี้ให้เห็นว่า เซต หมายถึง กลุ่ม ของ สมาชิก แบบ ไม่มีอันดับ นั่นคือ เซต บอกได้โดยสมาชิกของมัน ไม่ใช่ บอกได้โดย ลำดับของสมาชิกในรายการ บางครั้ง เราต้องการ ให้นำ อันดับ มาคิดด้วย

คู่อันดับ (ordered pair) ของสมาชิก เขียนดังนี้

(a, b) ซึ่งแตกต่างจากคู่อันดับ (b, a) เว้นเสียแต่ว่า a = b พูดอีกอย่างหนึ่งคือ (a, b) = (c, d) ก็ต่อเมื่อ a = c และ b = d

บทนิยาม ถ้า A และ B เป็น เซตไม่ว่างสองชุด เรานิยามเซต**ผลคูณ** หรือ **ผลคูณคาร์ทีเชียน** $A \times B$ ให้เป็นเซตของคู่อันดับ (a, b) ทั้งหมด โดยที่ $a \in A$ และ $b \in B$ ดังนั้น

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ and } b \in B\}$$

If A and B are two nonempty sets, we define the **product set** or **Cartesian product** A X B as the set of all ordered pairs (a, b) with $a \in A$ and $b \in B$. Thus

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ and } b \in B\}$$

ตัวอย่าง ถ้า X = {1, 2, 3} และ Y = {a, b}

จะได้

$X \times Y = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

$Y \times X = \{(a, 1), (b, 1), (a, 2), (b, 2), (a, 3), (b, 3)\}$

$X \times X = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

$Y \times Y = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$

จากตัวอย่างข้างต้นนี้ จะเห็นว่า โดยทั่วไปแล้ว $X \times Y \neq Y \times X$

โปรดสังเกตว่า

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$$

รายการแบบอันดับ ไม่ได้ถูกจำกัด ให้กับ *สมาชิกสองตัว*

n-ทูเปิล เขียนดังนี้ $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ มีการนำอันดับมาพิจารณา :

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

ก็ต่อเมื่อ

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$$

ผลคูณคาร์ทีเชียน ของเซต $X_1, X_2, \ldots, X_n$ นิยามให้เป็นเซตของ n-ทูเปิล ทั้งหมด $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เมื่อ $x_i \in X_i$ สำหรับ i = 1, 2, ..., n

ตัวอย่าง ถ้า

$$X = \{1, 2, 3\},\ Y = \{a, b\},\ Z = \{\alpha, \beta\}$$

จะได้

$$X \times Y \times Z = \{(1, a, \alpha), (1, a, \beta), (1, b, \alpha), (1, b, \beta), (2, a, \alpha), (2, a, \beta), (2, b, \alpha), (2, b, \beta)\}$$

โปรดสังเกตว่า ในตัวอย่างข้างต้นนี้ $|X \times Y \times Z| = |X| \cdot |Y| \cdot |Z|$

โดยทั่วไป $|X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \ldots \cdot |X_n|$

ตัวอย่าง ถ้า A เป็นเซตของอาหารว่าง , M เป็นเซตของอาหารหลัก และ D เป็นเซตของของหวาน

ผลคูณคาร์ทีเซียน $A \times M \times D$ คือ รายการอาหารค่ำ ที่เป็นไปได้ทั้งหมด ประกอบด้วย อาหารว่าง 1 อย่าง อาหารหลัก 1 อย่าง และของหวานอีก 1 อย่าง

แบบฝึกหัดเสริม

1. ให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และ $B = \{0, 3, 6\}$

   จงหา

   a) $A \cup B$ b) $A \cap B$

   c) $A - B$ d) $B - A$

2. ให้ $A = \{a, b, c, d, e\}$ และ $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

   จงหา

   a) $A \cup B$ b) $A \cap B$

   c) $A - B$ d) $B - A$

3. จงหา เซต A และ เซต B ถ้า

   $A - B = \{1, 5, 7, 8\}$

   $B - A = \{2, 10\}$

   และ $A \cap B = \{3, 6, 9\}$

4. ให้ $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$

   $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

และ $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

จงหา

a) $A \cap B \cap C$ b) $A \cup B \cup C$

c) $(A \cup B) \cap C$ d) $(A \cap B) \cup C$

5. จงวาดแผนภาพเวนน์ สำหรับ combinations แต่ละชุด ของเซต A, B และ C ต่อไปนี้

a) $A \cap (B \cup C)$

b) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

c) $(A - B) \cup (A - C) \cup (B - C)$

6. ถ้า สิ่งต่อไปนี้เป็นจริง เซต A และเซต B จะต้องมีคุณสมบัติอย่างไร?

a) $A \cup B = A$ b) $A \cap B = A$

c) $A - B = A$ d) $A \cap B = B \cap A$

e) $A - B = B - A$

7. จงหา ผลต่างสมมาตร ของเซต $\{1, 3, 5\}$ และ $\{1, 2, 3\}$

8. จงวาด แผนภาพเวนน์ ของ ผลต่างสมมาตร ของเซต A และ B

9. จงแสดงให้เห็นว่า ถ้า A เป็นเซตย่อย ของ เอกภพสัมพัทธ์ U

จะได้

a) $A \oplus A = \phi$ b) $A \oplus \phi = A$

c) $A \oplus U = \overline{A}$ d) $A \oplus \overline{A} = U$

10. ถ้า $A \oplus B = A$ จงบอกคุณสมบัติของเซต A และ B

12. ให้ $A_i = \{1, 2, 3, \ldots, i\}$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \ldots$

จงหา

a) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ b) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

13. ให้ $A_i = \{i, i+1, i+2, \ldots\}$

จงหา

a) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ b) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

แบบฝึกหัด 1.2

ตั้งแต่ข้อ 1-16 ให้เอกภพสัมพัทธ์ คือ เซต {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

ให้ A = {1, 4, ,7, 10), B = {1, 2, 3, 4, 5} และ C = {2, 4, 6, 8}

จงเขียนรายการสมาชิกของแต่ละเซต

1. $A \cup B$	2. $B \cap C$
3. $A - B$	4. $B - A$
5. $\overline{A}$	6. $U - C$
7. $\overline{U}$	8. $A \cup \phi$
9. $B \cap \phi$	10. $A \cup U$
11. $B \cap U$	12. $A \cap (B \cup C)$
13. $\underline{B \cap (C - A)}$	14. $(A \cap B) - C$
15. $\overline{A \cap B} \cup C$	15. $(A \cup B) - (C - B)$

ตั้งแต่ข้อ 17-20 ให้ X = {1, 2} และ Y = {a, b, c} จงเขียนรายการสมาชิกของแต่ละเซต

17. x x Y	18. Y x x
19. $x \times x$	19. $Y \times Y$

ตั้งแต่ข้อ 21-24 ให้ X = {1, 2}, Y = {a), Z = {α, β} จงเขียนรายการสมาชิกของแต่ละเซต

21. x x Y x z	22. x x Y x Y
23. $X \times X$ X X	24. YXXXYXZ

ตั้งแต่ข้อ 25-28 จงเขียนรายการผลแบ่งกั้นของเซต

25. {1}	26. {1, 2}
27. {a, b, c}	28. {a, b, c, d}

ตั้งแต่ข้อ 29-32 จงตอบคำถามว่าเป็นจริง หรือ เป็นเท็จ

29. $\{x\} \subseteq \{x\}$	30. $\{x\} \in \{x\}$
31. $\{x\} \in \{x, \{x\}\}$	32. $\{x\} \subseteq \{x, \{x\}\}$

ตั้งแต่ข้อ 33-37 จงบอกว่าแต่ละคู่ของเซตเท่ากันหรือไม่?

33. {1, 2, 3}, {1, 3, 2}

34. {1, 2, 2, 3}, {1, 2, 3}

35. {1, 1, 3}, {3, 3, 1}

36. $\{x \mid x^2 + x = 2\}$, $\{1, -2\}$

37. $\{x \mid x$ is a real number and $0 < x \leq 2\}$, $\{1, 2\}$

38. จงเขียนรายการสมาชิกของ $P(\{a, b\})$

ชุดไหนคือเซตย่อยแท้ของ $\{a, b\}$

39. จงเขียนรายการสมาชิกของ $P(\{a, b, c, d\})$

ชุดไหนคือเซตย่อยแท้ของ $\{a, b, c, d\}$

40. ถ้า X มีสมาชิกเท่ากับ 10 แล้ว P(X) จะมีจำนวนสมาชิกเท่าใด, เซตย่อยแท้ ของ X จะมีจำนวนเท่าใด

41. ถ้า X มีสมาชิกเท่ากับ n, X จะมีเซตย่อยแท้ จำนวนเท่าใด?

42. ถ้า X และ Y เป็นเซตไม่ว่างสองชุด และ $X \times Y = Y \times X$ เราสามารถสรุปอะไรได้บ้างเกี่ยวกับ X และ Y

ตั้งแต่ข้อ 43-62 ถ้าข้อความเป็นจริง ให้ตอบ จริง ถ้าข้อความเป็นเท็จ ให้ยกตัวอย่างประกอบ เซต X, Y และ Z เป็นเซตย่อยของ เอกภาพสัมพัทธ์ U สมมติว่า เอกภพสัมพัทธ์ของผลคูณคาร์ทีเชียน คือ U × U

43. สำหรับเซต X และ Y ใดๆ X อาจจะเป็นเซตย่อยของ Y หรือ Y อาจจะเป็นเซตย่อยของ X

44. $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$ สำหรับทุกเซต X และ Y

45. $X \cap (Y - Z) = (X \cap Y) - (X \cap Z)$ สำหรับทุกเซต X, Y และ Z

46. $X \cap Y = Y \cap X$ สำหรับทุกเซต X และ Y

47. $(X - Y) \cap (Y - X) = \phi$ สำหรับทุกเซต X และ Y

48. $\overline{X} = X$ สำหรับเซต X ใดๆ

49. $X - (Y \cup Z) = (X - Y) \cup Z$ สำหรับทุกเซต X, Y และ Z

50. $\overline{X - Y} = \overline{Y - X}$ สำหรับทุกเซต X และ Y

51. $X \cup \phi = X$ สำหรับเซต X ใดๆ

52. $\overline{U} = \phi$

53. $\overline{X \cap Y} \subseteq X$ สำหรับทุกเซต X และ Y

54. $X \cap \overline{X} = \phi$ สำหรับเซต X ใดๆ

55. $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$ สำหรับทุกเซต X และ Y

56. $(X \cap Y) \cup (Y - X) = X$ สำหรับทุกเซต X และ Y

57. $X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z)$ สำหรับทุกเซต X, Y และ Z

58. $\overline{X \times Y} = \overline{X} \times \overline{Y}$ สำหรับทุกเซต X และ Y

59. $X \times (Y - Z) = (X \times Y) - (X \times Z)$ สำหรับทุกเซต X, Y และ Z

60. $X - (Y \times Z) = (X - Y) \times (X - Z)$ สำหรับทุกเซต X, Y และ Z

61. $X \cap (Y \times Z) = (X \cap Y) \times (X \cap Z)$ สำหรับทุกเซต X, Y และ Z

62. $X \times \phi = \phi$ สำหรับเซต X ใดๆ

63. จงแสดงให้เห็นว่า สำหรับเซต X ใดๆ, $\phi \subseteq X$

สำหรับแต่ละเงื่อนไขในข้อ 64-67 ความสัมพันธ์อะไรต้องมีอยู่ ระหว่างเซต A และ B

64. $A \cap B = A$

65. $A \cup B = A$

66. $\overline{A} \cap U = \phi$

67. $\overline{A \cap B} = \overline{B}$

ผลต่างสมมาตร (symmetric difference) ของเซต A และ B หมายถึงเซต

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

หรือ

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

68. ถ้า $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{2, 3, 4, 5\}$ จงหา $A \Delta B$

69. จงอธิบายผลต่างสมมาตร ของเซต A และ B ด้วยคำพูด

70. กำหนดให้ U เป็นเอกภาพสัมพัทธ์ จงอธิบาย

$A \Delta A$, $A \Delta \overline{A}$, $U \Delta A$ และ $\phi \Delta A$

71. จงแสดงให้เห็นว่า

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

72. จงหาสูตรสำหรับ $|A \cup B \cup C|$ คล้ายกับสูตร ในแบบฝึกหัดข้อ 71 จงแสดงให้เห็นว่า สูตรของท่าน เป็นจริง สำหรับทุกเซต A, B และ C

73. ให้ C เป็นวงกลม หนึ่งวง และให้ $\mathcal{J}$ เป็นเซตของเส้นผ่าศูนย์กลางทั้งหมดของ C จงบอกความหมายของ $\cap \mathcal{J}$

74. ให้ P เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก มีค่ามากกว่า 1 สำหรับ $i \geq 2$

นิยาม $X_i = \{ik \mid k \geq 2, k \in P\}$

จงอธิบาย $P - \bigcup_{i=2}^{\infty} X_i$

1.3 ลำดับและสายอักขระ (Sequences and Strings)

ตาราง ข้างล่างนี้ คือ อัตราค่าโดยสาร รถแท็กซี่มิเตอร์ ในเมืองแห่งหนึ่ง จากระยะทาง 1 กิโลเมตร ถึง 10 กิโลเมตร (ระยะทางหนึ่งกิโลเมตรแรก \$1, ทุกหนึ่งกิโลเมตรถัดไป เพิ่มอีกกิโลเมตรละ 50 cents)

ระยะทาง (ก.ม.)	ค่าโดยสาร (\$)
1	1.00
2	1.50
3	2.00
4	2.50
5	3.00
6	3.50
7	4.00
8	4.50
9	5.00
10	5.50

ให้ C_n เป็นค่าโดยสาร ของระยะทาง n กิโลเมตร ซึ่งคำนวณค่าโดยสาร ดังนี้ 1.00 (ค่าโดยสารหนึ่งกิโลเมตรแรก) บวก 0.50 คูณด้วย (n - 1) ซึ่งเป็นระยะทางที่เพิ่ม จะได้ว่า

$$\boxed{C_n = 1 + 0.5(n - 1)}$$

ตัวอย่าง

$$C_1 = 1 + 0.5(1 - 1) = 1 + 0.5(0) = 1.0$$
$$C_2 = 1 + 0.5(2 - 1) = 1 + 0.5(1) = 1.5$$
$$C_5 = 1 + 0.5(5 - 1) = 1 + 0.5(4) = 3.0$$

ลำดับ หมายถึง รายการ ซึ่งมีอันดับเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย

(A **sequence** is a list in which order is taken into account.)

จากตัวอย่างข้างต้น รายการของค่าโดยสาร

1.00, 1.50, 2.00, 2.50, 3.00, . . .

หมายถึง ลำดับ โปรดสังเกตว่า อันดับ มีความสำคัญ ตัวอย่างเช่น ถ้า สมาชิกตัวที่ 1 และสมาชิกตัวที่ 5 สลับที่กัน แสดงว่า ค่าโดยสารระยะทาง 1 กิโลเมตร คือ \$3.00 ซึ่งแตกต่างจากค่าโดยสารระยะทาง 1 กิโลเมตร คือ \$1.00

ให้ s เป็นลำดับชุดหนึ่ง, สมาชิกตัวแรกของ ลำดับ เราใช้สัญลักษณ์ s_1, สมาชิกตัวที่สอง ใช้สัญลักษณ์ s_2 เช่นนี้เรื่อยไป โดยทั่วไปแล้ว s_n หมายถึง สมาชิกตัวที่ n ของลำดับ เราเรียก n ว่า **ดรรชนีของลำดับ (index** of the sequence)

ตัวอย่าง 1 รายการแบบอันดับ (ordered list)

$$2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots$$

หมายถึง ลำดับชุดหนึ่ง, สมาชิกตัวแรกของลำดับ เป็น 2, สมาชิกตัวที่สอง เป็น 4, ..., สมาชิกตัวที่ n เป็น 2n ถ้าเราให้ s แทนลำดับชุดนี้ จะได้ว่า

$$s_1 = 2, s_2 = 4, s_3 = 6, \ldots, s_n = 2n, \ldots$$

ตัวอย่าง 2 รายการแบบอันดับ

$$a, a, b, a, b$$

เป็นลำดับหนึ่งชุด สมาชิกตัวแรกของลำดับ คือ a, สมาชิกตัวที่สองคือ a, ตัวที่สามคือ b เช่นนี้ เรื่อยไป ถ้าเราให้ t แทนลำดับชุดนี้ จะได้

$$t_1 = a, t_2 = a, t_3 = b, t_4 = a, t_5 = b$$

จากตัวอย่างข้างต้นนี้ แสดงให้เห็นว่า ลำดับ (ไม่เหมือนกับเซต) อาจมี**การซ้ำกัน** (repetitions) ของสมาชิกได้

ลำดับ อาจมีสมาชิก จำนวนไม่จำกัด (infinite number) เช่นลำดับของ ตัวอย่างที่ 1 หรือ มีสมาชิก จำนวนจำกัด (finite number) เช่นลำดับของตัวอย่างที่ 2

สัญกรณ์ทางเลือก สำหรับ ลำดับคือ $\{s_n\}$ ในที่นี้ s หรือ $\{s_n\}$ หมายถึง ลำดับทั้งหมด (the entire sequence)

$$s_1, s_2, s_3, \ldots$$

เราใช้ สัญกรณ์ s_n แทน สมาชิกตัวที่ n ของลำดับ s

ตัวอย่าง 3 จงนิยามลำดับ $\{t_n\}$ โดยกฎ

$$t_n = n^2 - 1, \ n \geq 1$$

ห้าเทอมแรก ของลำดับนี้ คือ

$$0, 3, 8, 15, 24$$

เทอมที่ 55 คือ

$$t_{55} = 55^2 - 1 = 3024$$

ตัวอย่าง 4 จงนิยาม ลำดับ u โดยใช้กฎ u_n คือ ตัวอักษร ที่ n ในคำว่า digital จะได้

$$u_1 = d,\ u_2 = u_4 = i \text{ และ } u_7 = l$$

ลำดับนี้ เป็นลำดับจำกัด

ถึงแม้ว่า ในหนังสือเล่มนี้ บ่อยครั้ง เราแทนสัญลักษณ์ ตัวแรก ของลำดับ S ด้วย S_1 โดยทั่วไปแล้ว สมาชิกตัวแรก อาจมีดรรชนี เป็น จำนวนเต็มใดๆ ตัวอย่างเช่น ถ้า v คือ ลำดับ ซึ่งมี สมาชิกตัวแรก เป็น v_0 ลำดับชุดนี้คือ

$$v_0, v_1, v_2, \ldots$$

เมื่อเราต้องการกล่าว อย่างชัดแจ้ง ถึง ดรรชนีตัวแรก ของ ลำดับ อนันต์ S เขียนดังนี้

$$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$$

ลำดับอนันต์ v ซึ่งมีดรรชนีตัวแรก คือ 0 หมายถึง

$$\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$$

ลำดับจำกัด x ดรรชนีจาก -1 ถึง 4 หมายถึง

$$\{x_n\}_{n=-1}^{4}$$

ตัวอย่าง 5 ถ้า x คือลำดับ นิยามดังนี้

$$x_n = \frac{1}{2^n}, \quad -1 \leq n \leq 4$$

สมาชิกของ x คือ

$$2, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{16}$$

มีอยู่สองวิธีที่สำคัญ ในการสร้าง ลำดับ ใหม่ จาก ลำดับตัวเลข คือ การบวก และ การคูณ ของเทอมต่างๆ เข้าด้วยกัน

บทนิยาม 6

ถ้า $\{a_i\}_{i=m}^{n}$ คือ ลำดับชุดหนึ่ง, เรานิยาม

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n \qquad \text{(1)}$$

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n \qquad \text{(2)}$$

รูปแบบ $\sum_{i=m}^{n} a_i$ เรียกว่า **สัญกรณ์รวมยอด (sum or sigma notation)**

และ $\prod_{i=m}^{n} a_i$ เรียกว่า **สัญกรณ์คูณ (product notation)**

ในที่นี้ i **เรียกว่า ดรรชนี (index)**

m **เรียกว่า ขีดจำกัดล่าง** (lower limit)

n เรียกว่า ขีดจำกัดบน (upper limit)

ตัวอย่าง 7 ให้ a เป็นลำดับ นิยามโดย

$$a_n = 2n \ , \ n \geq 1$$

ดังนั้น

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = a_1 + a_2 + a_3 = 2 + 4 + 6 = 12$$

$$\prod_{i=1}^{3} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$$

ตัวอย่าง 8

ผลรวมยอดเรขาคณิต (geometric sum)

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n$$

สามารถเขียนให้ กระชับขึ้น โดยใช้ สัญกรณ์รวมยอด ดังนี้

$$\sum_{i=0}^{n} ar^i$$

ชื่อ ดรรชนี ในสมการ (1) และ (2) ไม่สำคัญ

ตัวอย่างเช่น

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

และ

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{x=1}^{n} a_x$$

บางครั้ง ไม่เพียงแต่ การเปลี่ยน ชื่อของดรรชนี จะเป็นประโยชน์เท่านั้น แต่การเปลี่ยนขีดจำกัด ของมัน มีประโยชน์ด้วยเช่นกัน

ตัวอย่าง 9 การเปลี่ยน ดรรชนี และขีดจำกัด ในการรวมยอด (Changing the Index and Limits in a Sum)

Rewrite the sum

$$\sum_{i=0}^{n} ir^{n-i}$$

replacing the index i by j, where $i = j - 1$

ผลเฉลย

เนื่องจาก $i = j - 1$ ดังนั้น เทอม ir^{n-i} เปลี่ยนเป็น

$$(j-1)r^{n-(j-1)} = (j-1)r^{n-j+1}$$

เนื่องจาก $j = i + 1$ เมื่อ $i = 0, j = 1$ ดังนั้น ขีดจำกัดล่าง สำหรับ j คือ 1 ในทำนองเดียวกัน เมื่อ $i = n, j = n + 1$ และขีดจำกัดบน สำหรับ j คือ $n + 1$

จะได้ว่า

$$\sum_{i=0}^{n} ir^{n-1} = \sum_{j=1}^{n+1} (j-1)r^{n-j+1}$$

ตัวอย่าง ให้ a เป็นลำดับนิยาม โดยกฎ $a_n = 2(-1)^n$, $n \geq 0$ จงหาสูตร สำหรับ ลำดับ S นิยามโดย

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

ผลเฉลย

$$\begin{aligned} S_n &= 2(-1)^0 + 2(-1)^1 + 2(-1)^2 + \ldots + 2(-1)^n \\ &= 2 - 2 + 2 - \ldots \pm 2 \\ &= \begin{cases} 2 & \text{, if } n \text{ is even} \\ 0 & \text{, if } n \text{ is odd} \end{cases} \end{aligned}$$

บางครั้ง สัญกรณ์รวมยอด และ สัญกรณ์คูณ ถูกดัดแปร (modified) ให้แทน ผลรวม และ ผลคูณ เหนือเซตใดๆ ของจำนวนเต็ม พูดเป็นทางการคือ ถ้า S เป็นเซต ของจำนวนเต็ม และ a เป็นลำดับชุดหนึ่ง

$\sum_{i \in S} a_i$ หมายถึง ผลรวมของ สมาชิก $\{a_i \mid i \in S\}$

ในทำนองเดียวกัน

$\underset{i \in S}{\pi} a_i$ หมายถึง ผลคูณของ สมาชิก $\{a_i \mid i \in S\}$

ตัวอย่าง 11 ถ้า S เป็นเซตของจำนวนเฉพาะน้อยกว่า 20

$$\sum_{i \in S} {}^{1}/_{i} = {}^{1}/_{2} + {}^{1}/_{3} + {}^{1}/_{5} + {}^{1}/_{7} + {}^{1}/_{11} + {}^{1}/_{13} + {}^{1}/_{15} + {}^{1}/_{19}$$

$$= 1.455$$

ในตำราบางเล่ม เรียกลำดับจำกัดว่า **สายอักขระ**

(In certain contexts, a finite sequence is caled a **string.)**

บทนิยาม

สายอักขระเหนือ X หมายถึง ลำดับจำกัด ของ สมาชิก จาก X

(A **string over** X OS a finite sequence of elements from X.)

ตัวอย่าง 12 ให้ X = {a, b, c} ถ้าเราให้

$$\beta_1 = b, \beta_2 = a, \beta_3 = a, \beta_4 = c$$

จะได้อักขระเหนือ X เขียนดังนี้ baac

เพราะว่า สายอักขระ เป็นลำดับหนึ่งชุด เรื่อง อันดับ (order) จึงต้องนำมาคิดด้วย ตัวอย่างเช่น สาย baac จะแตกต่างจาก สาย acab

การซ้ำกันในสายอักขระหนึ่งชุด สามารถกำหนดได้ โดยดรรชนีบน (Repetitions in a string can be specified by superscripts.) ตัวอย่างเช่น สาย bbaaac อาจเขียนเป็น b^2a^3c สายอักขระ ซึ่ง ไม่มีสมาชิก เรียกว่า สายว่าง (null string) และใช้สัญลักษณ์ λ เราใช้ X^* แทนเซตของ สายอักขระทั้งหมด เหนือ X ซึ่งรวม สายอักขระว่างด้วย และเราให้ X^+ แทน เซตของสายอักขระไม่ว่างทั้งหมด เหนือ X (The string with no elements is called the **null string** and is denoted λ. We let X^* denote the set of all string over X, including the null string, and we let X^+ denote the set of all nonnull strings over X.)

ตัวอย่าง 13 ให้ $X = \{a, b\}$ สมาชิกบางตัว ใน X^* คือ

λ, a, b, abab, $b^{20}a^{5}ba$

ความยาว (length) ของสายอักขระ α หมายถึงจำนวนสมาชิกใน α สำหรับความยาวของสายอักขระ α ใช้สัญลักษณ์ $|\alpha|$

ตัวอย่าง 14 ถ้า α = aabab และ $\beta = a^3b^4a^{32}$

จะได้ $|\alpha| = 5$ และ $|\beta| = 39$

ถ้า α และ β เป็นสายอักขระ สองชุด สายอักขระ ซึ่งประกอบด้วย α ตามด้วย β เขียนดังนี้ $\alpha\beta$, เรียกว่า **การต่อกัน** (concatenation) ของ α และ β

ตัวอย่าง 15 ถ้า γ = aab และ θ = cabd

จะได้

$\gamma\theta$ = aabcabd

$\theta\gamma$ = cabdaab

$\gamma\lambda = \gamma$ = aab

$\lambda\gamma = \gamma$ = aab

แบบฝึกหัด 1.3

1. จงตอบคำถาม ข้อ (a) - (c) สำหรับ ลำดับ s นิยามดังนี้

   c, d, d, c, d, c

   a) จงหา s_1

   b) จงหา s_4

   c) จงเขียน สายอักขระ s

   คำตอบ (a) c (b) c (c) cddcdc

2. จงตอบคำถาม ข้อ (a) - (i) สำหรับลำดับ t นิยามดังนี้

   $t_n = 2n - 1 \ , \ n \geq 1$

   จงหา

(a) t_3

(b) t_7

(c) t_{100}

(d) t_{2077}

(e) $\sum_{i=3}^{3} t_i$

(f) $\sum_{i=3}^{7} t_i$

(g) $\prod_{i=3}^{3} t_i$

(h) $\prod_{i=3}^{6} t_i$

(i) จงหาสูตร ซึ่งแทนลำดับชุดนี้ ซึ่งเป็นลำดับ มีดรรชนีล่างเป็น 0

3. จงตอบคำถาม ข้อ (a) - (d) สำหรับ ลำดับ v นิยามดังนี้

$$v_n = n(n-1) \ldots 2 \cdot 1 + 2, \quad n \geq 1$$

จงหา

(a) v_3

(b) v_4

(c) $\sum_{i=1}^{4} v_i$

(d) $\sum_{i=3}^{3} v_i$

4. จงคำนวณ ปริมาณ ซึ่งกำหนดให้ โดยใช้ ลำดับ a นิยามดังนี้

$$a_n = n^2 - 3n + 3$$

(a) $\sum_{i=1}^{4} a_i$

(b) $\sum_{j=3}^{5} a_j$

(c) $\sum_{i=4}^{4} a_i$

(d) $\sum_{k=1}^{6} a_k$

(e) $\prod_{i=1}^{2} a_i$

(f) $\prod_{i=1}^{3} a_i$

(g) $\prod_{n=2}^{2} a_n$

(h) $\prod_{x=3}^{4} a_x$

5. จงตอบคำถาม ข้อ (a) - (d) สำหรับ ลำดับ b ซึ่งนิยามดังนี้

$$b_n = n(-1)^n$$

จงหา

(a) $\sum_{i=1}^{4} b_i$

(b) $\sum_{i=1}^{10} b_i$

(c) สูตรสำหรับ ลำดับ c นิยามดังนี้ $c_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$

(d) สูตรสำหรับ ลำดับ d นิยามดังนี้ $d_n = \pi_{i=1}^{n} b_i$

6. จงตอบคำถาม ข้อ (a) - (d) สำหรับลำดับ Ω นิยามดังนี้

$\Omega_n = 3$ สำหรับทุกค่า n

จงหา

(a) $\sum_{i=1}^{3} \Omega_i$

(b) $\sum_{i=1}^{10} \Omega_i$

(c) สูตรสำหรับ ลำดับ c นิยามดังนี้

$$c_n = \sum_{i=1}^{n} \Omega_i$$

(d) สูตรสำหรับ ลำดับ d นิยามดังนี้

$$d_n = \pi^{n} \Omega_i$$

7. จงตอบคำถาม ข้อ (a) - (c) สำหรับลำดับ x นิยามดังนี้

$$x_1 = 2, x_n = 3 + x_{n-1} \quad , \quad n \geq 2$$

จงหา

(a) $\sum_{i=1}^{3} x_i$

(b) $\sum_{i=1}^{10} x_i$

(c) สูตรสำหรับ ลำดับ c นิยามดังนี้

$$c_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

8. จงตอบคำถาม ข้อ (a) - (d) สำหรับ ลำดับ w นิยามดังนี้

$$w_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad , \quad n \geq 1$$

จงหา

(a) $\sum_{i=1}^{3} w_i$

(b) $\sum_{i=1}^{10} w_i$

(c) สูตรสำหรับ ลำดับ c นิยามดังนี้

$$c_n = \sum_{i=1}^{n} w_i$$

(d) สูตรสำหรับ ลำดับ d นิยามดังนี้

$$d_n = \prod_{i=1}^{n} w_i$$

9. ให้ u เป็นลำดับ นิยามดังนี้

$u_1 = 2, u_n = 3 + u_{n-1}$, $n \geq 2$

จงหา สูตรสำหรับ ลำดับ d นิยามดังนี้

$$d_n = \prod_{i=1}^{n} u_i$$

10. จงตอบคำถาม ข้อ (a) - (d) โดยใช้ลำดับ y และ z นิยามดังนี้

$y_n = 2^n - 1$, $z_n = n(n - 1)$

จงหา

(a) $(\sum_{i=1}^{3} y_i)(\sum_{i=1}^{3} z_i)$

(b) $(\sum_{i=1}^{5} y_i)(\sum_{i=1}^{4} z_i)$

(c) $\sum_{i=1}^{3} y_i z_i$

(d) $(\sum_{i=3}^{4} y_i)(\sum_{i=2}^{4} z_i)$

11. จงตอบคำถาม ข้อ (a) - (h) สำหรับ ลำดับ r นิยามดังนี้

$r_n = 3 \cdot 2^n - 4 \cdot 5^n$, $n \geq 0$

จงหา

(a) r_0

(b) r_1

(c) r_2

(d) r_3

(e) สูตรสำหรับ r_p

(f) สูตรสำหรับ r_{n-1}

(g) สูตรสำหรับ r_{n-2}

(h) จงแสดงให้เห็นว่า $\{r_n\}$ มีคุณสมบัติ

$$r_n = 7r_{n-1} - 10r_{n-2} \quad , \quad n \geq 2$$

12. จงตอบคำถาม ข้อ (a) - (h) สำหรับลำดับ z นิยามดังนี้

$$z_n = (2 + n)3^n \quad , \quad n \geq 0$$

(a) จงหา z_0

(b) จงหา z_1

(c) จงหา z_2

(d) จงหา z_3

(e) จงหาสูตร สำหรับ z_i

(f) จงหาสูตร สำหรับ z_{n-1}

(g) จงหาสูตร สำหรับ z_{n-2}

(h) จงแสดงให้เห็นว่า $\{z_n\}$ มีคุณสมบัติ

$$z_n = 6z_{n-1} - 9z_{n-2} \quad , \quad n \geq 2$$

1.4 จำนวนเต็มและการหาร

(The Integer and Division)

บทนิยาม จำนวนเต็มบวก p มีค่ามากกว่า 1 จะเรียกว่า **จำนวนเฉพาะ** ถ้าเลขตัวนี้ มีตัวประกอบบวก เป็น 1 และ p

(A positive integer p greater than 1 is called **prime** if the only positive factors of p are 1 and p.)[1]

จำนวนเต็ม บวก ซึ่งมีค่ามากกว่า 1 และไม่ใช่ จำนวนเฉพาะ เรียกว่า จำนวนประกอบ

(A positive integer that is greater than 1 and is not prime is called **composite**.)

จำนวน p มากกว่า 1 ในเซตของ จำนวนเต็มบวก จะเรียกว่า **จำนวนเฉพาะ** ถ้า จำนวนเต็มบวกเฉพาะ p และ 1 เท่านั้น ซึ่งหาร p ลงตัว

(A number $p > 1$ in Z^+ is called **prime** if the only positive integer that divide p are p and 1.)[2]

ตัวอย่าง จำนวนเฉพาะ

2, 3, 5, 7, 11, 13

ตัวอย่าง ไม่ใช่จำนวนเฉพาะ

4, 10, 16, 21

ทฤษฎีบท จำนวนเต็มบวกทุกตัว $n > 1$ สามารถเขียนในรูปแบบ หนึ่งอย่างเท่านั้น คือ

$$\boxed{n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s}}$$

ในที่นี้ $p_1 < p_2 < \ldots < p_s$ หมายถึงจำนวนเฉพาะ ไม่ซ้ำกัน ซึ่ง หาร n ลงตัว และ k's เป็น จำนวนเต็มบวก กำนดให้เป็น จำนวนครั้ง ของ จำนวนเฉพาะ ที่เกิดขึ้น และเป็นผลประกอบ ของ n

---

[1] Rosen หน้า 107

[2] Kolman หน้า 60

(Every positive integer n > 1 can be uniquely written as

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s}$$

where $p_1 < p_2 < \ldots < p_s$ are the distinct primes that divide n, and the k's are positive integers giving the number of times each prime occurs as a factor of n.)

ตัวอย่าง จงหา prime factorization ของ 100, 641, 999 และ 1024

ผลเฉลย

$$100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2$$

$641 = 641^1$ (เป็นจำนวนเฉพาะ)

$$1024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{10}$$

ตัวอย่าง

$$9 = 3 \cdot 3 = 3^2$$

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^1$$

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$

ทฤษฎีบท ถ้า n เป็นจำนวนเต็ม ผลประกอบ แล้ว n จะมี ตัวหาร ลงตัว เป็น จำนวนเฉพาะ มีค่าน้อยกว่า หรือเท่ากับ $\sqrt{n}$

(If n is a composite integer, then n has a prime divisor less than or equal to $\sqrt{n}$.)

จาก ทฤษฎีบท ข้างต้นนี้ จะได้ว่า จำนวนเต็ม จะเป็น จำนวนเฉพาะ ถ้ามันหารด้วย จำนวนเฉพาะใดๆ ซึ่งมีค่า น้อยกว่า หรือ เท่ากับ รากที่สอง ของมัน ไม่ลงตัว

(Fom this theorem, it follow that an integer is prime if it is not divisible by any prime less than or equal to its square root.)

ตัวอย่าง จงแสดงให้เห็นว่า 101 เป็นจำนวนเฉพาะ

ผลเฉลย จำนวนเฉพาะ ที่ไม่เกิน $\sqrt{101}$ ได้แก่ 2, 3, 5 และ 7

เนื่องจาก 101 หารด้วย 2, 3, 5 หรือ 7 ไม่ลงตัว (ผลหารของ 101 ด้วยตัวหารเหล่านี้ทุกตัวไม่ใช่ จำนวนเต็ม) แสดงว่า 101 เป็นจำนวนเฉพาะ

ตัวอย่าง จงหา prime factorization ของ 7007

ผลเฉลย จำนวนเฉพาะ 2, 3 และ 5 ไม่มีตัวใด หาร 7007 ลงตัว

(Every positive integer $n > 1$ can be uniquely written as

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s}$$

อย่างไรก็ตาม 7 หาร 7007 ลงตัว

$$7007/7 = 1001$$

ต่อไป $1001/7 = 143$, $143/7 = 13$

เนื่องจาก 13 เป็นจำนวนเฉพาะ กระบวนการนี้เสร็จสิ้น จะได้ว่า prime factorization ของ 7007 คือ

$$7 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 7^2 \cdot 11^1 \cdot 13^1$$

ตัวอย่าง จงหา ผลหาร (quotient) และเศษ (remainder) ของเลข 101 หารด้วย 11 (101 เป็นตัวตั้ง (dividend) 11 เป็นตัวหาร (divisor))

ผลเฉลย

$$101 = 11 \cdot 9 + 2$$

ดังนั้น ผลหาร คือ 11 และเศษ คือ 2

ตัวอย่าง จงหาผลหาร และเศษ ของเลข -11 หารด้วย 3

ผลเฉลย

$$-11 = 3(-4) + 1$$

ดังนั้น ผลหารคือ -4 เศษคือ 1

โปรดสังเกตว่า เศษ ต้องไม่ใช่ค่าลบ

(Note that the remainder cannot be negative.)

เศษ ไม่ใช่ -2 ถึงแม้ว่า

$$-11 = 3(-3) - 2$$

เพราะว่า $r = -2$ ไม่เป็นไปตามหลัก $0 \leq r < 3$

บทนิยาม ให้ a เป็น จำนวนเต็ม และ m เป็นจำนวนเต็มบวก เราใช้สัญลักษณ์ **a mod m** คือ เศษ เมื่อ a เป็นตัวตั้ง และ m เป็นตัวหาร

(Let a be an integer and m be a positive integer. We denoted by **a mod m** the remainder when a is divided by m.)

จากบทนิยาม ของเศษ จะได้ว่า a mod m คือ จำนวนเต็ม r โดยที่ $a = qm + r$ และ $0 \leq r < m$

ตัวอย่าง

$$17 \bmod 5 = 2$$
$$-133 \bmod 9 = 2$$
$$2001 \bmod 101 = 82$$

บทนิยาม ให้ a และ b เป็น จำนวนเต็ม ไม่ใช่ศูนย์ทั้งคู่ จำนวนเต็ม ใหญ่ที่สุด d โดยที่ d หาร a ลงตัว และ d หาร b ลงตัว เรียกว่า **ตัวหารร่วมมาก** ของ a และ b ตัวหารร่วมมาก ของ a และ b ใช้สัญลักษณ์ gcd (a, b)

(Let a and b be integers, not both zero. The largest integer d such that $d \mid a$ and $d \mid b$ is called the **greatest common divisor** of a and b. The greatest common divisor of a and b is denoted by gcd (a, b).)

ตัวอย่าง จงหา gcd ของ 24 และ 36

ผลเฉลย ตัวหารร่วม (common divisors) ของ 24 และ 36 ได้แก่ 1, 2, 3, 4, 6 และ 12

ดังนั้น gcd (24, 36) = 12

ตัวอย่าง gcd (12, 30) = 6

ตัวอย่าง จงหา gcd ของ 17 และ 22

ผลเฉลย จำนวนเต็ม 17 และ 22 มีตัวหารร่วม เป็น 1 เท่านั้น

ดังนั้น gcd (17, 22) = 1

Rosen หน้า 106

The notation $a \mid b$ denotes that a divides b. We write $a \nmid b$ when a does not divide b.

บทนิยาม จำนวนเต็ม a และ b จะเป็น **จำนวนเฉพาะต่อกัน** ถ้าเลข ทั้งสองตัวนี้ มี ตัวหารร่วมมาก เป็น 1

(The integers a and b are **relatively prime** if their greatest common divisor is 1.)

ตัวอย่าง จำนวนเต็ม 17 และ 22 เป็น จำนวนเฉพาะต่อกัน เพราะว่า gcd (17, 22) = 1

ตัวอย่าง gcd (17, 95) = 1

บทนิยาม จำนวนเต็ม $a_1, a_2, \ldots, a_n$ จะเป็น **จำนวนเฉพาะต่อกันทีละคู่** ถ้า gcd $(a_i, a_j) = 1$ เมื่อใดก็ตามที่ $1 \leq i < j \leq n$

(The integer $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are **pairwise relative prime** if gcd $(a_i, a_j) = 1$ whenever $1 \leq i < j \leq n$)

ตัวอย่าง จงบอกว่า จำนวนเต็ม 10, 17 และ 21 เป็นจำนวนเฉพาะต่อกันหรือไม่?

ผลเฉลย

gcd (10, 17) = 1

gcd (10, 21) = 1

gcd (17, 21) = 1

แสดงว่า 10, 17, 21 เป็นจำนวนเฉพาะต่อกันทีละคู่

ตัวอย่าง จำนวนเต็ม 10, 19 และ 24 เป็นจำนวนเฉพาะต่อกันทีละคู่ หรือไม่?

ผลเฉลย

gcd (10, 24) = 2 > 1

แสดงว่า 10, 19 และ 24 ไม่ใช่ จำนวนเฉพาะต่อกันทีละคู่

อีกวิธีหนึ่ง ในการหา ตัวหารร่วมมาก ของ จำนวนเต็มสองตัวคือ ใช้ prime factorization ของเลข สองตัวนี้

$$a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_n^{a_n} \quad , \quad b = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \ldots p_n^{b_n}$$

จะได้

$$\boxed{\gcd(a, b) = p_1^{\min(a_1, b_1)} p_2^{\min(a_2, b_2)} \cdots p_n^{\min(a_n, b_n)}}$$

ตัวอย่าง จงหา gcd ของ 10 และ 12

ผลเฉลย

$$10 = 2^1 \cdot 5^1 \quad , \quad 12 = 2^2 \cdot 3^1$$
$$\gcd(10, 12) = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0$$
$$= 2$$

ตัวอย่าง จงหา gcd (120, 500)

ผลเฉลย

$$120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \quad , \quad 500 = 2^2 \cdot 5^3$$
$$\gcd(120, 500) = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^1$$
$$= 20$$

บทนิยาม **ตัวคูณร่วมน้อย** ของ จำนวนเต็มบวก a และ b หมายถึง จำนวนเต็มบวกเล็กที่สุด ซึ่ง หารด้วย a ลงตัว และ หารด้วย b ลงตัว ตัวคูณร่วมน้อย ของ a และ b ใช้สัญลักษณ์ lcm (a, b)

(The **least common multiple** of the positive integers a and b is the smallest positive integer that is divisible by both a and b. The least common multiple of a and b is denoted by lcm (a, b).)

ตัวอย่าง จงหา lcm ของ 12 และ 10

ผลเฉลย

$$\text{lcm}(10, 12) = 60$$

อีกวิธีหนึ่ง

$$\boxed{\text{lcm}(a, b) = p_1^{\max(a_1, b_1)} p_2^{\max(a_2, b_2)} \cdots p_n^{\max(a_n, b_n)}}$$

จากตัวอย่างข้างต้น

$$\text{lcm}\ (10, 12) = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 60$$

$$\text{lcm}\ (120, 500) = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^3 = 3000$$

ตัวอย่าง จงหา gcd และ lcm ของ 168 และ 450

ผลเฉลย

$$168 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 7^1 \quad , \quad 450 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

จะได้ $\text{gcd}\ (168, 450) = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0 = 6$

$$\text{lcm}\ (168, 450) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 12{,}600$$

ตัวอย่าง จงหา gcd และ lcm ของ 10 และ 25

ผลเฉลย

$$10 = 2^1 \cdot 5^1 \quad , \quad 25 = 5^2$$

$$\text{gcd}\ (10, 25) = 2^0 \cdot 5^1 = 4$$

$$\text{lcm}\ (10, 25) = 2^1 \cdot 5^2 = 50$$

ตัวอย่าง จงหาตัวคูณร่วมน้อย ของ $2^3\,3^5\,7^2$ และ $2^4\,3^3$

ผลเฉลย

$$\text{lcm}\ (2^3\,3^5\,7^2, 2^4\,3^3\,7^0) = 2^{\max(3,\,4)}\,3^{\max(5,\,3)}\,7^{\max(2,\,0)}$$

$$= 2^4\,3^5\,7^2$$

ทฤษฎีบท ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้

$$\boxed{ab = \text{gcd}\ (a, b) \cdot \text{lcm}\ (a, b)}$$

(Let a and b be positive integers,

then

$$ab = \text{gcd}\ (a, b) \cdot \text{lcm}\ (a, b)$$)

ตัวอย่าง ให้ $a = 540$, $b = 504$

ผลเฉลย

$$a = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \quad , \quad b = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$$

$$\gcd(540, 504) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^0 = 36$$

$$\text{lcm}(540, 504) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 7{,}560$$

$$a \cdot b = 540 \times 504$$

$$= 272{,}160$$

อัลกอริทึมของยุคลิด

(Euclidean algorithm)

$$\gcd(a, b) = \begin{cases} \gcd(b, a \bmod b) & \text{if } a > b \\ a & \text{if } b = 0 \end{cases}$$

ตัวอย่าง จงหา gcd ของ 108 และ 60

ผลเฉลย

$$\begin{aligned} \gcd(108, 60) &= \gcd(60, 108 \bmod 60) && \because 108 > 60 \\ &= \gcd(60, 48) \\ &= \gcd(48, 60 \bmod 48) && \because 60 > 48 \\ &= \gcd(48, 12) \\ &= \gcd(12, 48 \bmod 12) && \because 48 > 12 \\ &= \gcd(12, 0) \\ &= 12 && \because b = 0 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหา gcd (190, 34)

ผลเฉลย

$$\begin{aligned} \gcd(190, 34) &= \gcd(34, 20) \\ &= \gcd(20, 14) \end{aligned}$$

$$= \gcd(20, 14)$$
$$= \gcd(14, 6)$$
$$= \gcd(6, 2)$$
$$= \gcd(2, 0)$$
$$= 2$$

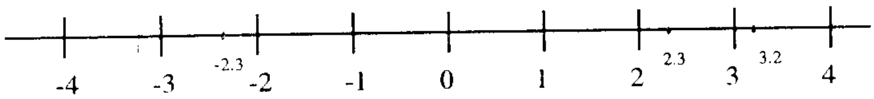
บทนิยาม ฟอร์ของ x ใช้สัญลักษณ์ $\lfloor x \rfloor$ หมายถึง จำนวนเต็มใหญ่ที่สุด ซึ่งมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ x

(The **floor** of x, denote $\lfloor x \rfloor$, is the greatest integer less than or equal to x.)[3]

ซิลลิง ของ x ใช้สัญลักษณ์ $\lceil x \rceil$ หมายถึง จำนวนเต็ม เล็กที่สุด ซึ่งมีค่า มากกว่าหรือเท่ากับ x

(The **ceiling** of x, denoted $\lceil x \rceil$, is the least integer greater than or equal to x.)[4]

ตัวอย่าง จงพิจารณา เส้น ของ จำนวน ข้างล่างนี้



แล้วคำนวณหา

$\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lceil 6 \rceil = 6$

$\lfloor -2.7 \rfloor = -3$, $\lceil 9.1 \rceil = 10$

$\lfloor -2.3 \rfloor = -3$, $\lceil -8 \rceil = -8$

$\lfloor 3.2 \rfloor = 3$, $\lceil 3.2 \rceil = 4$

$\lceil 2.3 \rceil = 3$

$\lceil -2.3 \rceil = -2$

---

[3] Johnsonbaugh หน้า 118

[4] Johnsonbaugh หน้า 118

แบบฝึกหัด 1.4

1. เลขตัวใด เป็นจำนวนเฉพาะ

   a) 19 b) 27 c) 93

   d) 101 e) 107 f) 113

2. ในแต่ละข้อย่อยข้างล่างนี้ ผลหาร คืออะไร เศษคืออะไร

   a) 19 หารด้วย 7

   b) -111 หารด้วย 11

   c) 789 หารด้วย 23

   d) 1001 หารด้วย 13

   e) 0 หารด้วย 19

   f) 3 หารด้วย 5

   g) -1 หารด้วย 3

   h) 4 หารด้วย 1

3. จงหา prime factorization ของเลขข้างล่างนี้

   a) 39 b) 81 c) 101

   d) 143 e) 289 f) 899

4. จงหา prime factorization ของ n!

5. เซต ของ จำนวนเต็ม ข้างล่างนี้ เป็น จำนวนเฉพาะต่อกัน หรือไม่

   a) (11, 15, 19) b) (14, 15, 21)

   c) (12, 17, 31, 37) d) (7, 8, 9, 11)

6. จงหา ตัวหารร่วมมาก ของ คู่ของ จำนวนเต็ม ข้างล่างนี้

   a) $2^2\cdot3^3\cdot5^5$, $2^5\cdot3^3\cdot5^2$

   b) $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13$, $2^{11}\cdot3^9\cdot11\cdot17^4$

   c) 17, 17^{17}

   d) $2^2\cdot7$, $5^5\cdot13$

   e) 0, 5

   f) $2\cdot3\cdot5\cdot7$, $2\cdot3\cdot5\cdot7$

7. จงหาคำตอบของปริมาณ ข้างล่างนี้

   a) 13 mod 3　　　　b) -97 mod 11

   c) 155 mod 19　　　　d) -221 mod 23

8. ถ้าผลคูณของจำนวนเต็ม สองตัวคือ $2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^2 \cdot 7^{11}$ และ ตัวหารร่วมมากคือ $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$ จงหาร่วมน้อย ของเลขสองตัวนี้

1.5 จำนวนเต็มและอัลกอริทึม (Integers and Algorithms)

มีอัลกอริทึมที่สำคัญ มากมาย ซึ่งเกี่ยวข้องกับ จำนวนเต็ม นอกเหนือจาก อัลกอริทึมที่ใช้ในทางคำนวณ เราจะเริ่มต้นอภิปราย หัวข้อนี้ ด้วย อัลกอริทึมของยุคลิด ซึ่งเป็น อัลกอริทึมที่มี ประโยชน์มากที่สุด ชุดหนึ่ง และเป็นอัลกอริทึม เก่าที่สุดในวิชาคณิตศาสตร์ จากนั้น จะอภิปรายอัลกอริทึม สำหรับการกระจาย ฐาน b ของจำนวนเต็มบวกสำหรับ เลขฐาน b ใดๆ (an algorithm for finding the base b expansion of a positive integer for any base b.)

อัลกอริทึมของยุคลิด (The Euclidean Algorithm)

อัลกอริทึมนี้ เป็นที่รู้จักกันตั้งแต่สมัยโบราณ ใช้ ในการหาตัวหารร่วมมาก ของจำนวนเต็มสองตัว และเป็นวิธีซึ่งมีประสิทธิภาพมากกว่า การใช้ prime factorization ที่ได้กล่าวมาแล้ว ยุคลิด เป็นนักคณิตศาสตร์ ชาวกรีก

ตัวอย่าง จงหา gcd (191, 287)

$$287 = 91 \cdot 3 + 14$$

$$91 = 14 \cdot 6 + 7$$

$$14 = 7 \cdot 2$$

เพราะว่า 7 หาร 14 ลงตัว เพราะฉะนั้น gcd (14, 7) = 7

สรุป $\gcd(287, 91) = \gcd(91, 14) = \gcd(14, 7) = 7$

โดยทั่วไปแล้ว อัลกอริทึมของยุคลิด ทำงานดังนี้ : ใช้การหารอย่างสืบเนื่อง เพื่อลด (reduce) ปัญหาการหาปัญหาตัวหารร่วมมาก ของจำนวนเต็มบวก สอง ตัว ให้เป็นปัญหาเดิม โดยที่ จำนวนเต็มคณิตศาสตร์ขนาดเล็กกว่า จนกระทั่ง จำนวนเต็มตัวหนึ่ง มีค่าเท่ากับ ศูนย์

ให้ $a = bq + r$ เมื่อ a, b, q และ r เป็นจำนวนเฉพาะจำนวนเต็ม

จะได้

$$\gcd(a, b) = \begin{cases} \gcd(b, r) & , \ a > b \\ a & , \ b = 0 \end{cases}$$

ตัวอย่าง จงหาตัวหารร่วมมาก ของ 414 และ 662 โดยใช้อัลกอริทึม ของ ยุคลิด

ผลเฉลย

$$662 = 414 \cdot 1 + 248$$

$$414 = 248 \cdot 1 + 166$$

$$248 = 166 \cdot 1 + 82$$

$$166 = 82 \cdot 2 + 2$$

$$82 = 2 \cdot 41$$

ดังนั้น

gcd (414, 62) = 2 เพราะว่า 2 เป็นเศษตัวสุดท้าย ซึ่ง ไม่เท่ากับศูนย์

Algorithm 1 The Euclidean Algorithm

```
procedure gcd (a, b : positive integers)
    x := a
    y := b
    while y ≠ 0
    begin
        r := x mod y
        x := y
        y := r
    end {gcd (a, b) is x}
```

การแทนที่ของจำนวนเต็ม (Representations of Integers)

ในชีวิตประจำวัน เราใช้สัญกรณ์ฐานสิบ เพื่อแสดง จำนวนเต็ม ตัวอย่างเช่น 965 ใช้แทน $9 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 5$ อย่างไรก็ตาม บ่อยครั้ง จะสะดวกเมื่อใช้เลขฐานอื่น แทนเลขฐานสิบ โดยเฉพาะเครื่องคอมพิวเตอร์ ใช้สัญกรณ์ฐานสอง (binary notation) เมื่อคำนวณ และสัญกรณ์ฐานแปด หรือ สัญกรณ์ฐานสิบหก เมื่อแสดงถึงตัวอักขระ เช่น ตัวอักษร หรือ เลขโดด จริงๆ แล้ว เราสามารถใช้เลข จำนวนบวกใดๆ ซึ่งมากกว่า 1 เป็นฐาน เมื่อแสดงถึง จำนวนเต็ม

ทฤษฎีบท ให้ b เป็น เลขจำนวนเต็มบวก มีค่ามากกว่า 1 จะได้ว่า ถ้า n เป็น จำนวนเต็มบวก เราสามารถ แสดง ให้อยู่ในรูปแบบเพียงหนึ่ง ดังนี้

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \ldots + a_1 b + a_0$$

เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก ไม่ใช่ลบ ,

$a_1, a_2, \ldots, a_k$ เป็น จำนวนเต็มบวก ไม่ใช่ลบ มีค่าน้อยกว่า b และ $a_k \neq 0$

การกระจายของ n ด้วยฐาน b ใช้สัญลักษณ์ $(a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0)_b$

(The base b expansion of n is denoted by

$$(a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0) \qquad)$$

ตัวอย่างเช่น $(245)_8$ แทน $2 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 + 5 = 165$

ถ้าเลือก 2 เป็นฐาน เรียกว่า **การกระจายฐานสอง** (binary expansion) ของ จำนวนเต็ม ในสัญกรณ์ เลขฐานสอง เลขโดดแต่ละตัว อาจจะเป็น 0 หรือ 1 พูดอีกอย่างหนึ่งคือ การกระจายฐานสอง ใช้ในคอมพิวเตอร์ ใช้แทนและทำการคำนวณ กับ จำนวนเต็ม

ตัวอย่าง จงหา การกระจายฐานสิบ ของ จำนวนเต็ม ซึ่งมี การกระจายฐานสองเป็น $(101011111)_2$

ผลเฉลย

$$\begin{aligned}(101011111)_2 &= 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 \\ &= 351\end{aligned}$$

ฐานสิบหก เป็น เลขฐานอีกชนิดหนึ่ง ใช้ในคอมพิวเตอร์ การกระจายฐานสิบหก ของ จำนวนเต็ม เรียกว่า hexadecimal expansion

โดยปกติ เลขฐานสิบหก มีเลขให้ใช้ 16 ตัว ดังนี้ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E และ F เมื่อตัวอักษร A ถึง F แทน เลขโดด 10 ถึง 15 (ในสัญกรณ์ฐานสิบ)

ตัวอย่าง จงหา การกระจายฐานสิบ ของ การกระจายฐานสิบหก $(2AE0B)_{16}$

ผลเฉลย

$$(2AE0B)_{16} = 2\cdot 16^4 + 10\cdot 16^3 + 14\cdot 16^2 + 0\cdot 16 + 11$$
$$= (175627)_{10}$$

เพราะว่า การแทนที่ เลขฐานสิบหก หนึ่งตัว ใช้ เลขฐานสอง 4 บิต (bits) ส่วนคำว่า **ไบต์** (byte) หมายถึง สายบิต (bit string) ของความยาวเท่ากับแปด ซึ่งแทนด้วยเลขฐานสิบหก 2 ตัว

ตัวอย่างเช่น

$$(11100101)_2 = (E5)_{16}$$

เพราะว่า $(1110)_2 = (E)_{16}$ และ $(0101)_2 = (5)_{16}$

ตัวอย่าง จงหา การกระจายฐานแปด ของ $(12345)_{10}$

ผลเฉลย ขั้นแรก หาร 12345 ด้วย 8 จะได้

$$12345 = 8\cdot 1543 + 1$$

หาร ผลหาร ต่อไปอย่างสืบเนื่อง ด้วย 8 จะได้ว่า

$$1543 = 8\cdot 192 + 7$$
$$192 = 8\cdot 24 + 0$$
$$24 = 8\cdot 3 + 0$$
$$3 = 8\cdot 0 + 3$$

เนื่องจาก เศษ คือ เลขโคด ของ การกระจายฐานแปด ของ 12345

เพราะฉะนั้น

$$(12345)_{10} = (30071)_8$$

รหัสเทียม ซึ่งกำหนดใน อัลกอริทึม ข้างล่างนี้ หา การกระจายฐาน b $(a_{k-1} \ldots a_1 a_0)_n$ ของจำนวนเต็ม n

Algorithm 2 Constructing Base b Expansions

```
procedure base b expansion (n : positive integer)
    q := n
    k := 0
    while q ≠ 0
    begin
        a_k := q mod b
        q := ⌊q/b⌋
        k := k + 1
    end {the base b expansion of n is (a_{k-1} . . . a_1 a_0)_b}
```

ในอัลกอริทึมนี้ q แทน ผลหาร ได้มาจากการหารสืบเนื่อง ด้วย b เริ่มต้น ให้ $q = n$ เลขโดด ใน การกระจายฐาน b คือ เศษของการหาร และกำหนดโดย q **mod** b อัลกอริทึมจะจบ เมื่อ ผลหาร $q = 0$

แบบฝึกหัด 1.5

1. จงใช้ อัลกอริทึมของยุคลิด หา

   a) gcd (12, 18) b) gcd (111, 201)

   c) gcd (1001, 1331) d) gcd (12345, 54321)

2. จงใช้ อัลกอริทึมของยุคลิด หา

   a) gcd (1, 5) b) gcd (100, 101)

   c) gcd (123, 277) d) gcd (1529, 14039)

   e) gcd (1529, 14038) f) gcd (11111, 111111)

3. ในการหา gcd (21, 34) โดยใช้ อัลกอริทึมของยุคลิด จะมีการหารกี่ครั้ง
4. ในการหา gcd (34, 55) โดยใช้ อัลกอริทึมของยุคลิด จะมีการหารกี่ครั้ง
5. จงแปลงผัน (convert) จำนวนเต็มต่อไปนี้ จากสัญกรณ์ฐานสิบ ไปเป็น สัญกรณ์ฐานสอง

   a) 231 b) 4532 c) 97644

6. จงแปลงผัน จำนวนเต็มต่อไปนี้ จากสัญกรณ์ฐานสิบ ไปเป็น สัญกรณ์ฐานสอง

   a) 321 b) 1023 c) 100632

7. จงแปลงผัน จำนวนเต็มต่อไปนี้ จากสัญกรณ์ฐานสอง ให้เป็น สัญกรณ์ฐานสิบ

   a) 11111 b) 10000 00001

   c) 10101 0101 d) 11010 01000 10000

8. จงแปลงผัน จำนวนเต็มต่อไปนี้ จากสัญกรณ์ฐานสอง ให้เป็น สัญกรณ์ฐานสิบ

   a) 11011 b) 10101 10100

   c) 11101 11110 d) 11111 00000 11111

9. จงแปลงผัน จำนวนเต็ม ต่อไปนี้ จากสัญกรณ์ฐานสิบหก ให้เป็น สัญกรณ์ฐานสอง

   a) 80E

   b) 135AB

   c) ABBA

   d) DEFACEF

10. จงแปลงผัน จำนวนเต็ม ต่อไปนี้ จากสัญกรณ์ฐานสอง ให้เป็น สัญกรณ์ฐานสิบหก

    a) 111 10111

    b) 10 10101 01010

    c) 11101 11011 10111

ส่วนเติมเต็มของหนึ่ง (One's complement)

หมายถึง การแทนที่ จำนวนเต็ม ซึ่งใช้ เพื่อทำให้การคำนวณของคอมพิวเตอร์ ง่ายขึ้น การแทนที่ จำนวนเต็มบวก และ จำนวนเต็มลบ ด้วย ค่าสัมบูรณ์ น้อยกว่า 2^n จะใช้ จำนวนบิต ทั้งหมด n + 1 บิต บิตซ้ายมือสุด ใช้ แทนเครื่องหมาย ถ้าตำแหน่งนี้ เป็นบิต 0 แสดงว่า เป็น จำนวนเต็มบวก และ ถ้าตำแหน่งนี้ เป็นบิต 1 แสดงว่า เป็น จำนวนเต็มลบ

สำหรับ จำนวนเต็มบวก บิตที่เหลือ เหมือนกับ การกระจายเลขฐานสอง ของ จำนวนเต็ม สำหรับ จำนวนเต็มลบ บิตที่เหลือ ได้มาจาก ครั้งแรก หา การกระจายฐานสอง ของ ค่าสัมบูรณ์ ของ จำนวนเต็ม จากนั้น หา ส่วนเติมเต็ม ของ แต่ละบิต ซึ่ง ส่วนเติมเต็ม ของ 1 คือ 0 และ ส่วนเติมเต็ม ของ 0 คือ 1

11. จงหา การแทนที่ ส่วนเติมเต็ม ของ หนึ่ง โดยใช้ สายบิตความยาวเท่ากับหก ของ จำนวนเต็มต่อไปนี้

    a) 22 b) 31 c) -7 d) -19

12. จงหา จำนวนเต็ม ของ การแทนที่ ส่วนเติมเต็ม ของ หนึ่ง ความยาวเท่ากับห้า ข้างล่างนี้

    a) 11001 b) 01101 c) 10001 d) 11111