

## ตัวอย่างข้อสอบชุดที่ 1

### ข้อ 1

- 1.1 จากประพจน์มีเงื่อนไขข้างล่างนี้  
 "You sleep late if it is Saturday."  
 a) จงเขียนประพจน์นี้ใหม่เป็นประโยคภาษาอังกฤษโดยที่ยังมีความหมายเหมือนเดิม  
 b) จงเขียนบทกลับ (converse) ของประพจน์ข้อ (a)  
 c) จงเขียนตัวผกผัน (inverse) ของประพจน์ข้อ (a)  
 d) จงเขียนประพจน์แย้งสลับที่ (contrapositive) ของประพจน์ข้อ (a)
- 1.2 กำหนดให้ประพจน์  $p$  และ  $q$  มีค่าความจริงเป็นเท็จทั้งคู่ จงหาค่าความจริงของ  
 $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$
- 1.3 จงตรวจสอบว่า ประพจน์มีเงื่อนไขต่อไปนี้ เป็นสัจนิรันดร์ (tautology) หรือไม่  
 $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$
- 1.4 จงตรวจสอบว่า ประพจน์ประกอบต่อไปนี้ เป็นสมมูลกันเชิงตรรกะ (logically equivalent) หรือไม่  
 $p \leftrightarrow q$  และ  $(p \wedge q) \vee (\neg p \vee \neg q)$

### ข้อ 2

- 2.1 สมมติว่า lcm ของเลขจำนวนเต็มสองตัวคือ 400 และ gcd ของตัวเลขสองตัวนี้ คือ 10 ถ้าเลขตัวหนึ่งคือ 50 จงคำนวณหาเลขจำนวนเต็มอีกหนึ่งตัว
- 2.2 จงหาตัวประกอบจำนวนเฉพาะ (prime factorization) ของ 510510
- 2.3 จงคำนวณหาจำนวนนับ (cardinality) ของเซต  $\{\emptyset, \{a, \emptyset\}, \{a\}\}$
- 2.4 ให้  $A = \{a, b, c\}$  และ  $B = \{b, \{c\}\}$  จงบอกว่ประโยคข้างล่างต่อไปนี้ เป็นจริงหรือเป็นเท็จ ถ้าเป็นเท็จให้อธิบาย

- $c \in B - A$  .....
- $|P(A \times B)| = 32$  .....
- $\emptyset \in A - B$  .....
- $B \subseteq A$  .....
- $\{c\} \subseteq B$  .....
- $\{a, b\} \in A \times A$  .....
- $\{\{c\}\} \subseteq P(B)$  .....
- $\emptyset \subseteq A \times A$  .....

- 2.5 ให้  $A = \{x, y\}$  ความสัมพันธ์บนเซต  $A$  จะมีทั้งหมดกี่ชุด จงเขียนรายการความสัมพันธ์ทุกชุด

**ข้อ 3**

- 3.1 a) การอธิบายการเติบโตของฟังก์ชัน  $f(x)$  ในเทอมของ  $g(x)$  ซึ่งมีขีดจำกัดเรื่องขอบเขตล่าง (lower bound) ใช้สัญกรณ์อะไรในการวัดประสิทธิภาพของอัลกอริทึมแต่ละชุด  
 b) การอธิบายการเติบโตของฟังก์ชัน  $f(x)$  ในเทอมของ  $g(x)$  ซึ่งมีขีดจำกัดเรื่องขอบเขตบน (upper bound) ใช้สัญกรณ์อะไรในการวัดประสิทธิภาพของอัลกอริทึมแต่ละชุด  
 c) สัญลักษณ์ "big oh" ดีที่สุดคืออะไรให้อธิบาย  
 d) สัญลักษณ์ "big oh" แย่ที่สุดคืออะไรให้อธิบาย
- 3.2 จงเขียนอัลกอริทึมคำนวณหาผลรวมข้างล่างนี้ จากนั้นให้คำนวณหาค่าเฉลี่ยและพิมพ์ผลลัพธ์

$$a_1 a_1 + a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_1 a_n +$$

$$a_2 a_1 + a_2 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_2 a_n +$$

$$a_3 a_1 + a_3 a_2 + a_3 a_3 + \dots + a_3 a_n +$$

...

...

$$a_n a_1 + a_n a_2 + a_n a_3 + \dots + a_n a_n$$

**ข้อ 4**

- 4.1 ให้  $S$  เป็นเซตของลำดับทั้งหมดซึ่งมีความยาวเท่ากับสิบ ของเลข 0, เลข 1 และเลข 2 ตัวอย่างเช่น ลำดับ 0211012201
- a) เซต  $S$  มีสมาชิกทั้งหมดกี่ตัว  
 b) ลำดับในเซต  $S$  ซึ่งมีเลข 0 ห้าตัวและเลข 1 ห้าตัวมีทั้งหมดกี่ชุด  
 c) ลำดับในเซต  $S$  ซึ่งมีเลข 0 สามตัว และเลข 1 เจ็ดตัวมีทั้งหมดกี่ชุด  
 d) ลำดับในเซต  $S$  ซึ่งมีเลข 0 สามตัวมีทั้งหมดกี่ชุด  
 e) ลำดับในเซต  $S$  ซึ่งมีเลข 0 สามตัว, เลข 1 สี่ตัวและเลข 2 สามตัวมีทั้งหมดกี่ชุด  
 f) ลำดับในเซต  $S$  ซึ่งไม่มีเลขตัวใดเลยเท่ากับ 1 มีทั้งหมดกี่ชุด  
 g) ลำดับในเซต  $S$  ซึ่งไม่มีเลขตัวใดเลยเท่ากับ 1 และ 2 มีทั้งหมดกี่ชุด  
 h) ลำดับในเซต  $S$  ซึ่งไม่มีเลขตัวใดเลยเท่ากับ 0, 1 หรือ 2 มีทั้งหมดกี่ชุด
- 4.2 สมมติว่า  $f(n)$  คือความสัมพันธ์แบบแบ่งแยกและเอาชนะ  $f(n) = 3 f(n/4) + n^2/8$  และ  $f(1) = 2$  จงหา  $f(4)$ ,  $f(16)$  และ  $f(64)$

ข้อ 5

5.1 สมมติว่าในปี ค.ศ. 2006 ประชากรในโลกมีทั้งหมด 6.2 พันล้านคน และอัตราการเติบโตของประชากรเท่ากับ 1.3% ต่อปี

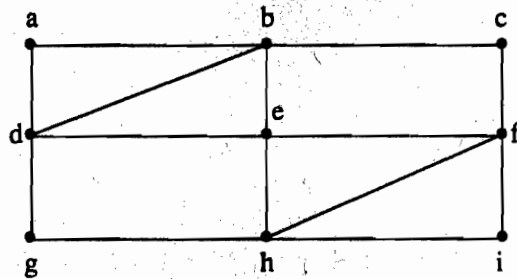
a) จงคำนวณหาความสัมพัทธ์เวียนเกิดของประชากรในโลกหลังจาก ค.ศ. 2006 ไปอีก  $n$  ปี และเงื่อนไขเริ่มต้น

b) จงคำนวณหาสำหรับสูตรชี้แจงของจำนวนประชากรในโลกหลังจาก ค.ศ. 2006 ไปอีก  $n$  ปี

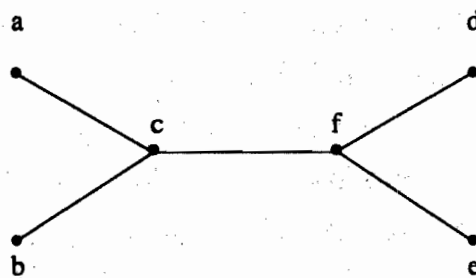
5.2 จงแก้ปัญหาคความสัมพัทธ์เวียนเกิด

$$a_{n+2} = -4a_{n+1} + 5a_n \quad \text{สำหรับ } n \geq 0 \text{ และ } a_0 = 2, a_1 = 8$$

5.3 กราฟรูปข้างล่างนี้จงตรวจสอบว่ามีวงจรรอยเลอร์ (Euler circuit) หรือไม่ ถ้ามีจงเขียนรายการแสดงวงจรรนี้ ถ้าไม่มีให้ตรวจสอบว่ากราฟรูปนี้มีทางเดินรอยเลอร์ (Euler path) หรือไม่ ถ้ามีจงเขียนทางเดินนี้



5.4 กราฟรูปนี้มีวงจรแฮมิลตัน (Hamilton circuit) หรือไม่ ถ้ามีจงเขียนวงจรรนี้ ถ้าไม่มี จงอธิบายว่าทำไมกราฟรูปนี้จึงไม่มีวงจรแฮมิลตัน



## ตัวอย่างข้อสอบชุดที่ 2

### ข้อ 1

1.1 จากประพจน์มีเงื่อนไขข้างล่างนี้

“A positive integer is a prime only if it has no divisors other than 1 and itself.”

- จงเขียนประพจน์นี้ใหม่เป็นประโยคภาษาอังกฤษโดยที่ยังมีความหมายเหมือนเดิม
- จงเขียนตัวผกผัน (inverse) ของประพจน์ข้อ (a)
- จงเขียนบทกลับ (converse) ของประพจน์ข้อ (a)
- จงเขียนประพจน์แย้งสลับที่ (contrapositive) ของประพจน์ข้อ (a)

1.2 สมมติว่าประพจน์  $p$ ,  $q$  และ  $r$  มีค่าความจริงดังนี้  $p$  เป็นเท็จ,  $q$  เป็นจริง, และ  $r$  เป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของประพจน์ประกอบข้างล่างนี้

$\neg(p \vee q) \wedge \neg r$  คำตอบ.....

$(p \wedge q) \rightarrow (q \rightarrow r)$  คำตอบ.....

$(p \oplus q) \rightarrow (p \oplus \neg q)$  คำตอบ.....

$(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$  คำตอบ.....

1.3 จงแยกตัวประกอบจำนวนเฉพาะ (prime factorization) ของเลขจำนวนเต็มข้างล่างนี้

a) 726 .....

b) 909090 .....

1.4 จงหาค่าของ

a)  $\gcd(117, 213)$  .....

b)  $\gcd(12345, 54321)$ .....

### ข้อ 2

2.1 ให้  $R_1$  เป็นความสัมพันธ์ “less than” บนเซตของจำนวนจริง และ

$R_2$  เป็นความสัมพันธ์ “greater than” บนเซตของจำนวนจริง นั่นคือ

$$R_1 = \{(x, y) \mid x < y\} \text{ และ } R_2 = \{(x, y) \mid x > y\}$$

จงคำนวณหา

- a)  $R_1 \cup R_2$  .....
- b)  $R_1 \cap R_2$  .....
- c)  $R_1 - R_2$  .....
- d)  $R_2 \cap R_1$  .....
- e)  $R_1 \oplus R_2$  .....

- 2.2 จงอธิบายและบอกว่าคุณสมบัติความสัมพันธ์  $R$  บนเซตของประชากรทั้งหมดมีชุดใดบ้างเป็น สะท้อน, สมมาตร ปฏิสมมาตร และ/หรือถ่ายทอด เมื่อ  $(a, b) \in R$  if and only if
- a) a is taller than b
  - b) a and b were born on the same day.
  - c) a has the same first name as b.
  - d) a and b have a common grandparent.

**ข้อ 3**

- 3.1 มีเลขจำนวนเต็มอยู่สามตัวชื่อ a, b, และ c จงเขียนอัลกอริทึมเรียงลำดับเลขชุดนี้จาก น้อยไปหามาก (increasing order)
- 3.2 จงเขียนอัลกอริทึมแบบทำซ้ำ (iterative algorithm) เพื่อหาเทอมที่ n ของลำดับซึ่งนิยาม ดังนี้  $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3$  และ  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$  สำหรับ  $n = 3, 4, 5, \dots$

**ข้อ 4**

- 4.1 โยนเหรียญหนึ่งเหรียญ 10 ครั้ง ในการโยนเหรียญแต่ละครั้ง ผลลัพธ์อาจออกมาเป็น หัว (head) หรือเป็นก้อย (tail) จงคำนวณหาผลลัพธ์ที่เป็นไปได้
  - a) ทั้งหมดมีกี่ชุด
  - b) ออกหัวสองครั้งมีกี่ชุด
  - c) ออกก้อยอย่างมากที่สุดสามครั้งมีกี่ชุด
  - d) ออกหัวและออกก้อยจำนวนเท่ากันมีกี่ชุด
- 4.2 สมมติว่า  $f(n)$  คือความสัมพันธ์แบบแบ่งแยกและเอาชนะ  $f(n) = f(n/3) + 1$  เมื่อ  $n$  หาร ด้วย 3 ลงตัว และ  $f(1) = 1$  จงคำนวณหา  $f(3), f(27)$  และ  $f(729)$

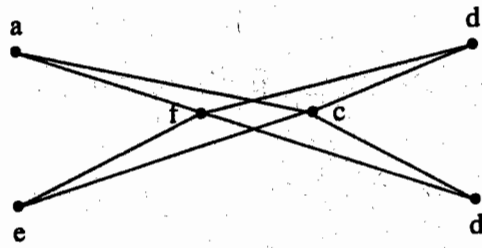
**ข้อ 5**

- 5.1 จงแก้ปัญหาความสัมพันธ์เวียนเกิด
 

$a_n = 7a_{n-2} + 6a_{n-3}$  สำหรับ  $n \geq 3$  กำหนดให้  $a_0 = 9, a_1 = 10$  และ  $a_2 = 32$
- 5.2 จงวาดกราฟประนูนทิศทางซึ่งแทนด้วยความสัมพันธ์
 

$\{(a, a), (a, b), (b, c), (c, b), (c, d), (d, a), (d, b)\}$

5.3 จงตรวจสอบและอธิบายว่ากราฟข้างล่างนี้เป็นกราฟสองส่วน (bipartite graph) หรือไม่



### ตัวอย่างข้อสอบชุดที่ 3

#### ข้อ 1

1.1 จงตรวจสอบว่าประพจน์ประกอบต่อไปนี้ เป็นสมมูลกันเชิงตรรกะ (logically equivalent) หรือไม่

$$\neg p \leftrightarrow q \text{ และ } p \leftrightarrow \neg q$$

$$\neg (p \oplus q) \text{ และ } p \leftrightarrow q$$

1.2 จงตรวจสอบว่าประพจน์มีเงื่อนไขต่อไปนี้ เป็นสัจนิรันดร์ (tautology) หรือไม่

$$(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$$

1.3 จงเขียนประพจน์แย้งสลับที่ (contrapositive), บทกลับ (converse) และตัวผกผัน (inverse) ของประพจน์มีเงื่อนไขข้างล่างนี้

When I stay up late, it is necessary that I sleep until noon.

1.4 จงหาตัวประกอบจำนวนเฉพาะ (prime factorization) ของ 8827

1.5 เซตแต่ละชุดข้างล่างนี้มี 2 เป็นสมาชิกในเซตนั้นหรือไม่ ถ้ามีให้ขีดเครื่องหมายถูก (✓) ถ้าไม่มีให้ขีดเครื่องหมายผิด (×)

(a) {2, {2}}

(b) {{2}, {{2}}}

(c) {{2}, 2, {{2}}}

(d) {{{2}, 2}}}

1.6 จากข้อ 1.5 จงบอกว่า {2} เป็นสมาชิกของเซตใดบ้าง

1.7 ให้  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{x, y\}$  และ  $C = \{1, 2\}$  จงคำนวณหา

(a)  $A \times B \times C$

(b)  $C \times A \times B$

(c)  $B \times B \times B$

#### ข้อ 2

2.1 ให้  $R$  เป็นความสัมพันธ์บนเซต  $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$  เมื่อ  $aRb$  หมายถึง  $a|b$  จงหาเมทริกซ์ซึ่งแทนความสัมพันธ์  $R$

2.2 ให้  $f(x) = x^2 + 1$  for  $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \sqrt{x} \quad \text{for } x \in [0, \alpha]$$

$$h(x) = x + 3 \quad \text{for } x \in \mathbb{R}$$

และ  $k(x) = x^5$  for  $x \in \mathbb{R}$

จงคำนวณหา  $k \circ h \circ g \circ f$

2.3 ให้  $f(x) = x^4$  for  $x \in [0, \alpha]$   
 $g(x) = \sqrt{x+2}$  for  $x \in [0, \alpha]$   
 และ  $h(x) = x^2 + 1$  for  $x \in \mathbb{R}$

จงคำนวณหา

- (a)  $h \circ g \circ f$
- (b)  $f \circ g \circ h$
- (c)  $f \circ h \circ g$

**ข้อ 3**

กำหนดให้ข้อมูลเป็นแถวลำดับหนึ่งมิติของเลขจำนวนเต็ม มีทั้งหมด  $n$  ตัว จงเขียนอัลกอริทึมคำนวณหาค่าสูงสุด (maximum), ค่าต่ำสุด (minimum) และค่าเฉลี่ย (mean) ของข้อมูลชุดนี้

**ข้อ 4**

4.1

- a) สายบิดความยาวเท่ากับสิบที่มีเลข 0 อย่างน้อยที่สุดหนึ่งตัวมีทั้งหมดกี่ชุด
- b) สายบิดความยาวเท่ากับสิบที่มีเลข 1 อย่างน้อยที่สุดแปดตัวมีทั้งหมดกี่ชุด
- c) จะมีการเรียงสับเปลี่ยนของตัวอักษร A, B, C, D, E, F, G ทั้งหมดกี่วิธี
- d) จะมีการเรียงสับเปลี่ยนของตัวอักษร A, B, C, D, E, F, G ทั้งหมดกี่วิธี โดยให้ E อยู่ตำแหน่งแรก
- e) จะมีการเรียงสับเปลี่ยนของตัวอักษร A, B, C, D, E, F, G ทั้งหมดกี่วิธี โดยให้ E อยู่ในหนึ่งตำแหน่งของสองตำแหน่งแรก
- f) จะมีการเรียงสับเปลี่ยนของตัวอักษร A, B, C, D, E, F, G ทั้งหมดกี่วิธี โดยไม่ให้มีตัวสระอยู่ท้ายสุด
- g) จะมีการเรียงสับเปลี่ยนของตัวอักษร A, B, C, D, E, F, G ทั้งหมดกี่วิธี โดยให้มีตัวสระสองตัวอยู่หน้าพยัญชนะห้าตัว
- h) จะมีการเรียงสับเปลี่ยนของตัวอักษร A, B, C, D, E, F, G ทั้งหมดกี่วิธี ไม่ให้ขึ้นต้นด้วย A และไม่ให้ลงท้ายด้วย A

4.2 สมมติว่า  $f(n) = 4f(n/2) + n + 2$ , และ  $f(1) = 2$  จงหา  $f(8)$

**ข้อ 5**

5.1 จงแก้ปัญหาค่าความสัมพันธ์เวียนเกิด

$a_n = 5a_{n-1} - 4a_{n-2}$  สำหรับ  $n \geq 2$  และ  $a_0 = 1, a_1 = 0$



- 5.2 a) จงวาดรูปกราฟ  $G$  ซึ่งมีจุด  $a, b, c, d, e, f$  และเมทริกซ์ประชิดข้างล่างนี้ จากนั้น  
จงหา

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- b) จำนวนจุด ใน  $G$   
c) จำนวนด้าน ใน  $G$   
d) ระดับชั้น (degree) ของทุกจุดใน  $G$   
e) จำนวนวงวน (loop) ใน  $G$   
f) ทางเดินออยเลอร์ (Euler path) ใน  $G$   
g) จำนวนส่วนประกอบ (component) ใน  $G$   
h) ระยะทางระหว่างจุด  $a$  และจุด  $C$