บทที่ 9
ตรรกศาสตร์
(Logic)

9.1 ตรรกศาสตร์เชิงประพจน์
9.2 ความสมมูลเชิงประพจน์

9.1 ตรรกศาสตร์เชิงประพจน์ (Propositional Logic)

หลักเกณฑ์ของตรรกศาสตร์ให้ความหมายที่ถูกต้องกับข้อความคณิตศาสตร์

(The **rules** of logic give **precise** meaning to mathematical statements.)

หลักเกณฑ์เหล่านี้ใช้เพื่อแบ่งระหว่างการอ้างเหตุผลคณิตศาสตร์อย่างสมเหตุสมผลหรือไม่สมเหตุสมผลให้ชัดเจน

(These rules are used to distinguish between valid and invalid mathematical arguments.)

เป้าหมายของหนังสือเล่มนี้คือสอนให้ผู้อ่านว่าจะทำความเข้าใจและสร้างการอ้างเหตุผลคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องได้อย่างไร

(The goal of this book is to teach the reader how to understand and how to construct correct mathematical arguments.)

นอกเหนือจากการให้ความสำคัญของตรรกศาสตร์ในเรื่องการทำความเข้าใจการมีเหตุผลเชิงคณิตศาสตร์แล้ว ตรรกศาสตร์มีการนำไปประยุกต์ใช้มากมายในสาขาวิทยาการคอมพิวเตอร์

(In addition to its importance in understanding mathematical reasoning, logic has numerous applications in computer science.)

หลักเกณฑ์เหล่านี้ใช้ออกแบบวงจรคอมพิวเตอร์ สร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์ การทวนสอบความถูกต้องของโปรแกรม และในวิธีอื่น ๆ อีกจำนวนมาก

(These rules are used in the design of computer circuits, the construction of computer programs, the verification of the correctness of programs, and in many other ways.)

ประพจน์ (Propositions)

บล็อกโครงสร้างพื้นฐานของตรรกศาสตร์ คือประพจน์

(The basic building blocks of logic-propositions)

ประพจน์หมายถึงประโยคเชิงประกาศซึ่งอาจเป็นจริงหรือเป็นเท็จ แต่ไม่ใช่ทั้งคู่

(A proposition is a declarative sentence* that is either true or false, but not both.)

ตัวอย่าง 1 ประโยคเชิงประกาศข้างล่างนี้ทั้งหมดคือประพจน์

1. Washington, D.C., is the capital of the United States of America.
2. Bangkok is the capital of Canada.

---

*A declarative sentence is a sentence that declare a fact.
ประโยคเชิงประกาศ หมายถึง ประโยคซึ่งประกาศความจริง

3. $1 + 1 = 2$

4. $2 + 2 = 3$

ประพจน์ 1 และ 3 เป็นจริง, ส่วนประพจน์ 2 และ 4 เป็นเท็จ

ตัวอย่าง 2 จงพิจารณาประโยคต่อไปนี้

1. What time is it?
2. Read this carefully.
3. $x + 1 = 2$
4. $x + y = z$

ประโยค 1 และ 2 ไม่ใช่ประพจน์ เพราะว่าไม่ใช่ประโยคเชิงประกาศ

ประโยค 3 และ 4 ไม่ใช่ประพจน์ เพราะว่าไม่เป็นจริงและไม่เป็นเท็จ เนื่องจากไม่มีการกำหนดค่าให้กับตัวแปร (variable)

เราใช้ ตัวอักษร (letters) แทนประพจน์

เช่นเดียวกัน ตัวอักษร ใช้แทนตัวแปร (variables)

ตัวอย่างเช่น p, q, r, s, ...

ค่าความจริง (truth value) ของประพจน์เป็นจริง ให้แทนด้วยตัว T ถ้ามันเป็นประพจน์ที่เป็นจริง และเป็นเท็จให้แทนด้วยตัว F ถ้ามันเป็นประพจน์เท็จ

ขอบเขตของตรรกศาสตร์ซึ่งเกี่ยวกับประพจน์ เรียกว่า **แคลคูลัสเชิงประพจน์** (propositional calculus) หรือ **ตรรกศาสตร์เชิงประพจน์** (propositional logic)

ข้อความคณิตศาสตร์มากมายซึ่งถูกสร้างโดยการรวมกัน ประพจน์หนึ่งประโยคหรือมากกว่าหนึ่งประโยค

(Many mathematical statement are constructed by combining one or more propositions.)

ประพจน์ชุดใหม่ เรียกว่า **ประพจน์ประกอบ** ซึ่งประกอบขึ้นจากประพจน์ซึ่งมีอยู่จริงโดยใช้ **ตัวดำเนินการตรรกะ**

(New propositions, called **compound propositions**, are formed from existing propositions using **logical operators.**)

บทนิยาม 1 ให้ p เป็นประพจน์, ข้อความ **"It is not the case that p"**

คือประพจน์อีกชุดหนึ่ง เรียกว่า **นิเสธ** (negation) ของ p

นิเสธของ p ให้แทนด้วย $\neg p$

ประพจน์ $\neg p$ อ่านว่า "not p"

ตัวอย่าง 3 จงหานิเสธของประพจน์

"Today is Friday."

และแสดงสิ่งนี้ด้วยภาษาอังกฤษอย่างง่าย

ผลเฉลย : นิเสธคือ

"**It is not the case that** today is Friday."

นิเสธนี้แสดงให้ง่ายขึ้นดังนี้

"Today is not Friday."

หรือ

"It is not Friday today."

ตารางค่าความจริง (truth table) แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างค่าความจริง (truth values) ของประพจน์ต่าง ๆ

ตารางค่าความจริงมีประโยชน์โดยเฉพาะในการกำหนดค่าความจริงของประพจน์ซึ่งสร้างจากประพจน์ที่ง่ายกว่า

TABLE 1 The Truth Table for the Negation of a Proposition

p	$\neg p$
T	F
F	T

บทนิยาม 2 ให้ p และ q เป็นประพจน์

ประพจน์ "p and q" ให้แทนด้วย $p \wedge q$ หมายถึง ประพจน์ซึ่งเป็นจริง เมื่อ p และ q เป็นจริงทั้งคู่, และเป็นเท็จ ในกรณีอื่น ๆ

ประพจน์ $p \wedge q$ เรียกว่า **ประพจน์เชื่อม** (conjunction) ของ p และ q

TABLE 2 The Truth Table for the Conjunction of Two Propositions		
p	q	p ∧ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ตัวอย่าง 4 จงหาประพจน์เชื่อมของประพจน์ p และ q

เมื่อ p คือประพจน์ "Today is Friday"

และ q คือประพจน์ "It is raining today."

ผลเฉลย : การเชื่อมของประพจน์เหล่านี้, p ∧ q คือประพจน์

"Today is Friday **and** it is raining today."

ประพจน์เป็นจริง บน raining Friday และ **ประพจน์เป็นเท็จ** บนวันใด ๆ ซึ่งไม่ใช่ Friday และวัน Fridays when it does not rain

บทนิยาม 3 ให้ p และ q เป็นประพจน์

ประพจน์ "p or q" ให้แทนด้วย p v q

หมายถึง ประพจน์ซึ่งเป็นเท็จ เมื่อ p และ q เป็นเท็จทั้งคู่ และเป็นจริงกรณีอื่น ๆ

ประพจน์ p v q เรียกว่า **ประพจน์เลือก** (disjunction) ของ p และ q

TABLE 3 The Turth Table for the Disjunction of Two Propositions		
p	q	p v q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

การใช้ตัวเชื่อม or ในประพจน์เลือกสมนัยกับหนึ่งในสองวิธีของการใช้ or ในภาษาอังกฤษ เรียกว่า inclusive way ประพจน์เลือกเป็นจริงเมื่อมีประพจน์อย่างน้อยหนึ่งชุดของสองประพจน์เป็นจริง ตัวอย่างเช่น การใช้ **และ/หรือ inclusive or** ในข้อความ

"Students who have taken calculus or computer science can take this class."

ในที่นี้ หมายความว่า นักศึกษาซึ่งได้ลงทะเบียนเรียนวิชา calculus และ computer science ทั้งสองวิชามาแล้ว สามารถลงทะเบียนวิชานี้ได้ เช่นเดียวกับนักศึกษาซึ่งลงทะเบียนเฉพาะวิชาใดวิชาหนึ่งในสองวิชานี้มาแล้วเพียงหนึ่งวิชา สามารถลงทะเบียนวิชานี้ได้เช่นกัน

ในทางตรงข้าม เรากำลังใช้ **exclusive or** เมื่อพูดว่า

"Students who have taken calculus or computer science, **but not both,** can enroll in this class."

ในที่นี้ หมายความว่า นักศึกษาซึ่งลงทะเบียนวิชา calculus และ computer science ทั้งคู่ไม่สามารถลงทะเบียนวิชานี้ เฉพาะนักศึกษาซึ่งลงทะเบียนเพียงหนึ่งวิชาเท่านั้นของวิชาดังกล่าวจึงจะลงทะเบียนวิชานี้ได้

ในทำนองเดียวกัน เมื่อเมนูของภัตตาคารแห่งหนึ่งเขียนว่า

"Soup or salad comes with an entree."

ปกติภัตตาคารส่วนใหญ่ให้หมายความว่า ลูกค้าจะได้ soup หรือ salad อย่างใดอย่างหนึ่งไม่ใช่ทั้งคู่ ดังนั้นสิ่งนี้คือ exclusive or ไม่ใช่ inclusive or

ตัวอย่าง 5 จงบอกประพจน์เลือกของประพจน์ p และ q เมื่อ p และ q คือประพจน์ เหมือนกับในตัวอย่าง 4

ผลเฉลย : ประพจน์เลือกของ p และ q, $p \vee q$ คือประพจน์

"Today is Friday or it is raining today."

ประพจน์นี้เป็นจริงบนวันใดก็ได้ซึ่งเป็นวันศุกร์หรือวันฝนตก (รวมทั้ง rainy Fridays) และเป็นเท็จเฉพาะวันอื่น ๆ ซึ่งไม่ใช่ Fridays และฝนไม่ตกด้วย

บทนิยาม 4 ให้ p และ q เป็นประพจน์

การเลือกอย่างใดอย่างหนึ่ง (exclusive) or ของ p และ q, ให้แทนด้วย $p \oplus q$, หมายถึงประพจน์ซึ่งเป็นจริง เมื่อเฉพาะหนึ่งประพจน์เท่านั้นของ p และ q เป็นจริง, และเป็นเท็จกรณีอื่น ๆ

TABLE 4 The Turth Table for the Exclusive or of Two Propositions		
p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ประพจน์มีเงื่อนไข (Implications)

บทนิยาม 5 ให้ p และ q เป็นประพจน์

ประพจน์มีเงื่อนไข $p \to q$ หมายถึง ประพจน์ซึ่งเป็นเท็จ เมื่อ p เป็นจริงและ q เป็นเท็จ, และเป็นจริงกรณีอื่น ๆ ("$p \to q$" อ่านว่า if p then q)

ในประพจน์มีเงื่อนไขนี้ p เรียกว่า**สมมติฐาน** (hypothesis) หรือ **ข้อนำ** (antecedent) หรือ **ข้อตั้ง** (premise)

และ q เรียกว่า **ข้อยุติ** (conclusion) หรือ **ข้อตาม** (consequence)

TABLE 5 The Turth Table for the Implication $p \to q$		
p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ประพจน์มีเงื่อนไข บางครั้งเรียกว่า **ข้อความมีเงื่อนไข** (An implication is sometimes called a **conditional statement.**)

เนื่องจากประพจน์มีเงื่อนไข มีบทบาทสำคัญมากในการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ มีการใช้ถ้อยคำ (terminology) หลากหลายเพื่อแสดง $p \to q$ เราจะพบส่วนใหญ่ แต่ไม่ใช่ทั้งหมดของวิธีข้างล่างนี้ เพื่อแสดงประพจน์มีเงื่อนไขนี้ :

"if p, then q" "p implies q"
"if p, q" "p only if q"
"p is sufficient for q" "a sufficient condition for q is p"
"q if p" "q whenever p"
"q when p" "q is neccessary for p"
"a neccessary condition for p is q" "q follows from p"
"q unless $\neg p$"

ประพจน์มีเงื่อนไข $p \to q$ เป็นเท็จ เฉพาะในกรณีที่ p เป็นจริง แต่ q เป็นเท็จ

ประพจน์มีเงื่อนไข $p \to q$ เป็นจริง เมื่อ p และ q เป็นจริงทั้งคู่ และเมื่อ p เป็นเท็จ (ไม่ว่าค่าความจริงของ q จะเป็นอะไรก็ตาม)

วิธีที่เป็นประโยชน์เพื่อให้เข้าใจค่าความจริงของประพจน์มีเงื่อนไขคือให้นึกถึงข้อตกลง (obligation) หรือสัญญา (contract) ตัวอย่างเช่น คำปฏิญาณ (pledge) ที่นักการเมืองจำนวนมากให้ไว้ขณะหาเสียงคือ:

"If I am elected, then I will lower taxes."

"ถ้าฉันได้รับการเลือกตั้ง ฉันจะทำให้ภาษีลดลง"

- ถ้านักการเมืองได้รับการเลือกตั้ง ผู้ลงคะแนนเสียงคาดว่านักการเมืองคนนี้จะทำให้ภาษีลดลง

ยิ่งไปกว่านั้น

- ถ้านักการเมืองคนนี้ไม่ได้รับการเลือกตั้ง ผู้ลงคะแนนเสียงจะไม่คาดหวังแต่อย่างใดว่าบุคคลผู้นี้จะทำให้ภาษีลดลง แม้ว่าบุคคลนี้อาจมีอิทธิพลเพียงพอที่จะทำให้บุคคลอื่น ๆ ซึ่งมีอำนาจในการลดภาษี
- เฉพาะเมื่อนักการเมืองได้รับการเลือกตั้ง แต่ไม่ทำให้ภาษีลดลง ผู้ลงคะแนนเสียงสามารถพูดว่า นักการเมืองไม่ทำตามคำปฏิญาณที่ให้ไว้ตอนโฆษณาหาเสียง

บทพูดสุดท้ายนี้สมนัยกับกรณี เมื่อ p เป็นจริง แต่ q เป็นเท็จ ใน $p \to q$

ในทำนองเดียวกัน จงพิจารณาข้อความซึ่งอาจารย์ท่านหนึ่งกล่าวไว้ :

"If you get 100% on the final, then you will get an A."

"ถ้าผลสอบไล่นักศึกษาทำได้ 100% นักศึกษาจะได้เกรด A."

- ถ้าผลสอบไล่ นักศึกษาทำได้ 100% นักศึกษาอาจคาดหวังว่าจะได้เกรด A
- ถ้านักศึกษาทำไม่ได้ 100% นักศึกษาอาจจะได้หรืออาจจะไม่ได้เกรด A ขึ้นอยู่กับปัจจัยอื่น ๆ

• อย่างไรก็ตาม ถ้านักศึกษาทำได้ 100% แต่อาจารย์ไม่ให้เกรด A นักศึกษาจะรู้สึกว่าถูกโกง

หลายคนอาจสับสนว่า "p only if q" แสดงสิ่งเดียวกับ "if p then q" เพื่อให้จำสิ่งนี้ โปรดสังเกตว่า

"p only if q" พูดว่า p ไม่สามารถเป็นจริง เมื่อ q ไม่เป็นจริง นั่นคือ ข้อความเป็นเท็จ ถ้า p เป็นจริง แต่ q เป็นเท็จ

เมื่อ p เป็นเท็จ, q อาจเป็นจริงหรือเป็นเท็จก็ได้ เพราะว่าข้อความไม่ได้พูดอะไรเลยเกี่ยวกับค่าความจริงของ q

ความผิดพลาดร่วมคือ ผู้คนมักคิดว่า "q only if p" คือวิธีของการแสดง $p \rightarrow q$

อย่างไรก็ตาม ข้อความเหล่านี้มีค่าความจริงแตกต่างกัน เมื่อ p และ q มีค่าความจริงแตกต่างกัน

คำว่า "unless" บ่อยครั้งนำมาใช้แสดงประโยคมีเงื่อนไข ตัวอย่างเช่น "q unless p" หมายความว่า ถ้า $\neg p$ เป็นเท็จ แล้ว q ต้องเป็นจริง นั่นคือ "q unless p" เป็นเท็จ เมื่อ p เป็นจริง และ q เป็นเท็จ แต่เป็นจริงกรณีอื่น ๆ ดังนั้น "q unless $\neg p$" และ $p \rightarrow q$ จึงมีค่าความจริงเหมือนกันเสมอ

วิธีที่เราให้นิยาม implications คือเป็นทั่วไปมากกว่าความหมายที่ผูกติดกับ implications ในภาษาอังกฤษ ตัวอย่างเช่น implication

"If it is sunny today, then we will go to the beach."

"ถ้าวันนี้แสงแดดดี เราจะไปชายหาด"

ตัวอย่าง 6 ให้ p คือประโยค "Amy learns discrete mathematics" และ q คือประโยค "Amy will find a good job." จงแสดงประโยคมีเงื่อนไข $p \rightarrow q$ ให้เป็นประโยคภาษาอังกฤษ

ผลเฉลย

"If Amy learns discrete mathematics, then she will find a good job."

มีอีกหลายวิธีในการแสดงประโยคมีเงื่อนไขนี้ในภาษาอังกฤษ เช่น

"Amy will find a good job when she learns discrete mathematics."

หรือ

"For Amy to get a good job, it is sufficient for her to learn discrete mathematics."

หรือ

"Amy will find a good job unless she does not learn discrete mathematics."

เป็น implication ที่ใช้ในภาษาธรรมชาติ เพราะว่ามีความสัมพันธ์กันระหว่างสมมติฐานกับข้อยุติ

นอกจากนี้แล้ว implication นี้ถือว่าสมเหตุสมผล (valid) ถ้ามันไม่เป็น sunny today แต่เราไม่ไปชายหาด

ในทางตรงกันข้าม, implication

"If today is Friday, then $2 + 3 = 5$."

เป็นจริงจากบทนิยามของ implication เพราะว่าข้อยุติเป็นจริง (ค่าความจริงของสมมติฐานไม่มีผลอะไร)

implication

"If today is Friday, then $2 + 3 = 6$."

เป็นจริงทุกวัน ยกเว้นวันศุกร์ อันเนื่องมาจาก $2 + 3 = 6$ เป็นเท็จ

เราจะไม่ใช้ implicaiton สองชุดสุดท้ายในภาษาธรรมชาติ (ยกเว้นการพูดจาถากถาง)

เนื่องจากว่า ไม่มีความสัมพันธ์กันระหว่างสมมติฐานกับข้อยุติใน implication แต่ละชุด

ในการมีเหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ เราพิจารณาว่า implication ของสิ่งที่เป็นทั่วไปมากกว่าที่เราใช้ในภาษาอังกฤษ

แนวคิดเชิงคณิตศาสตร์ของ implication คือการเป็นอิสระของความสัมพันธ์เหตุและผลระหว่างสมมติฐานกับข้อยุติ

บทนิยามของ implication กำหนดค่าความจริงของมันไม่ใช่ขึ้นอยู่กับการใช้ภาษาอังกฤษ

บทสร้าง if-then ที่ใช้ในภาษาโปรแกรมจำนวนมากแตกต่างจากที่ใช้ในตรรกศาสตร์

ภาษาโปรแกรมส่วนใหญ่ประกอบด้วยข้อความเช่น

if p then S, เมื่อ p คือประพจน์ และ S เป็นส่วนของโปรแกรม (หนึ่งหรือมากกว่าหนึ่งข้อความที่จะถูกกระทำการ) เมื่อการกระทำการของโปรแกรมพบข้อความเช่นนี้ S จะถูกกระทำการ ถ้า p เป็นจริง แต่ S จะไม่ถูกกระทำการ ถ้า p เป็นเท็จ

ตัวอย่าง 7 จงหาค่าของตัวแปร x หลังจากข้อความ if $2 + 2 = 4$ then $x := x + 1$

ถ้า $x = 0$ ก่อนพบข้อความนี้

สัญลักษณ์ := แทนการกำหนดค่า (assignment)

ข้อความ $x := x + 1$ หมายถึง การกำหนดค่าของค่า $x + 1$ ให้กับ x

ผลเฉลย : เนื่องจาก $2 + 2 = 4$ เป็นจริง

ข้อความสั่งกำหนดค่า $x := x + 1$ ถูกกระทำการ

ดังนั้น x มีค่า $0 + 1 = 1$ หลังจากข้อความนี้ถูกพบ

บทกลับ, ประพจน์แย้งสลับที่ และตัวผกผัน (Converse, Contrapositive, and Inverse)

เราสามารถสร้างประพจน์มีเงื่อนไขชุดใหม่โดยเริ่มต้นจาก $p \rightarrow q$

มี implications สามชุด เกี่ยวข้องบางอย่างซึ่งประกอบขึ้นจาก $p \rightarrow q$

ชุดที่ 1 ประพจน์ $q \rightarrow p$ เรียกว่า**บทกลับ** (converse) ของ $p \rightarrow q$

ชุดที่ 2 ประพจน์แย้งสลับที่ (contrapositive) ของ $p \rightarrow q$ คือประพจน์ $\neg q \rightarrow \neg p$

ชุดที่ 3 ประพจน์ $\neg p \rightarrow \neg q$ เรียกว่า**ตัวผกผัน** (inverse) ของ $p \rightarrow q$

จะเห็นว่าประพจน์แย้งสลับที่, $\neg q \rightarrow \neg p$, ของ implication $p \rightarrow q$ มีค่าความจริงเหมือนกับ $p \rightarrow q$ เสมอ

โปรดสังเกตว่า ประพจน์แย้งสลับที่เป็นเท็จ เฉพาะเมื่อ $\neg p$ เป็นเท็จ และ $\neg q$ เป็นจริง นั่นคือ เฉพาะเมื่อ p เป็นจริง และ q เป็นเท็จ

ในทางตรงกันข้าม ไม่ใช่บทกลับ, $p \rightarrow q$, และไม่ใช่ตัวผกผัน, $\neg p \rightarrow \neg q$, ซึ่งมีค่าความจริงเหมือนกับ $p \rightarrow q$ สำหรับค่าความจริงที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ p และ q

implication $\boxed{p \rightarrow q}$

1. **converse** (บทกลับ) ของ implication $p \rightarrow q$

   $q \rightarrow p$

2. **contrapositive** (ประพจน์แย้งสลับที่) ของ $p \rightarrow q$

   $\neg q \rightarrow \neg p$

3. **Inverse** (ตัวผกผัน) ของ implication $p \rightarrow q$

   $\neg p \rightarrow \neg q$

โปรดสังเกตว่า เมื่อ p เป็นจริงและ q เป็นเท็จ implication เดิมเป็นเท็จ แต่บทกลับและตัวผกผันเป็นจริงทั้งคู่

เมื่อประพจน์ประกอบ (compound propositions) สองชุดมีค่าความจริงเหมือนกันเสมอ เราเรียกว่ามัน **สมมูล** (equivalent) กัน

ดังนั้น implication และ contrapositive ของมันจึงเป็นสมมูลกัน

บทกลับและตัวผกผันของ implication เป็นสมมูลกันด้วยเช่นกัน

ความผิดพลาด (error) ร่วมที่พบมากที่สุดคือการสมมติว่าบทกลับและตัวผกผันของ implication เป็นสมมูลกับ implication นี้

ตัวอย่าง 8 จงหาประพจน์แย้งสลับที่, บทกลับ และตัวผกผันของประพจน์มีเงื่อนไข

"The home team wins whenever if is raining"

ผลเฉลย : เพราะว่า "q whenever p" เป็นหนึ่งในวิธีแสดง implication $p \to q$ ข้อความเดิมอาจเขียนใหม่ดังนี้

"If it is raining, then the home team wins."

ดังนั้น ประพจน์แย้งสลับที่ $\neg q \to \neg p$ ของ implication นี้คือ

"If the home team does not win, then it is not raining."

บทกลับคือ $q \to p$

"If the home team wins, then it if raining."

ตัวผกผันคือ $\neg p \to \neg q$

"If it is not raining, then the home team does not win."

เฉพาะประพจน์แย้งสลับที่เท่านั้นที่สมมูล (equivalent to) กับข้อความเดิม

บทนิยาม 6 ให้ p และ q เป็นประพจน์

ประพจน์เงื่อนไขสองทาง (biconditional) $p \leftrightarrow q$ หมายถึง ประพจน์ซึ่งเป็นจริง เมื่อ p และ q มีค่าความจริงเหมือนกัน และเป็นเท็จกรณีอื่น ๆ

TABLE 6 The Turth Table for the Biconditional $p \leftrightarrow q$

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

โปรดสังเกตว่า ประพจน์เงื่อนไขสองทาง $p \leftrightarrow q$ เป็นจริงแน่นอน เมื่อ implications $p \to q$ และ $q \to p$ เป็นจริงทั้งคู่ และเป็นเท็จกรณีอื่น ๆ

ด้วยเหตุนี้ terminology

"p if and only if q"

จึงนำมาใช้สำหรับประพจน์เงื่อนไขสองทาง

มีวิธีอื่น ๆ เพื่อแสดง $p \leftrightarrow q$:

"p is necessary and sufficient for q"

"if p then q, and conversely"

"p iff q"

วิธีสุดท้ายของการแสดงประพจน์เงื่อนไขสองทาง โดยใช้คำย่อ "iff" สำหรับ "if and only if"

โปรดสังเกตว่า $p \leftrightarrow q$ มีค่าความจริง (truth value) เหมือนกับ $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

ตัวอย่าง 9 ให้ p คือข้อความ "You can take the flight." และให้ q คือข้อความ "You buy a ticket."

ดังนั้น $p \rightarrow q$ คือข้อความ

"You can take the flight if and only if you buy a ticket."

ข้อความนี้เป็นจริงถ้า p และ q เป็นจริงทั้งคู่ หรือเป็นเท็จทั้งคู่

นั่นคือ if you buy a ticket and can take the flight or if you do not buy a ticket and you cannot take the flight.

ข้อความนี้เป็นเท็จ เมื่อ p และ q มีค่าความจริงตรงกันข้ามกัน นั่นคือ when you do not buy a ticket, but you can take the flight (such as when you get a free trip) และ when you buy a ticket and cannot take the flight (such as the airline bumps you.)

ตัวสร้าง "if and only if" ซึ่งใช้ในประพจน์เงื่อนไขสองทางนั้น ไม่ค่อยนำมาใช้ในภาษาธรรมชาติ

ตัวอย่างเช่น จงพิจารณาข้อความในภาษาอังกฤษ

1. "If you finish your meal, then you can have dessert."
   ความหมายที่แท้จริงของข้อความคืออะไร
2. "You can have dessert if and only if you finish you meal."
   ข้อความหลังสุดนี้ คือ สมมูลเชิงตรรกะกับสองข้อความ
3. "If you finish your meal, then you can have dessert."
   และ
4. "You can have dessert, only if you finish you meal."

เนื่องจาก imprecision นี้ในภาษาธรรมชาติ เราจำเป็นต้องทำข้อสมมติ ไม่ว่าข้อความมีเงื่อนไขในภาษาธรรมชาติโดยปริยาย คือบทกลับของมันก็ตาม

เนื่องจากความเที่ยง (precision) มีความสำคัญในวิชาคณิตศาสตร์และในวิชาตรรกศาสตร์ เราจึงจะแยกความแตกต่างระหว่างข้อความมีเงื่อนไข $p \rightarrow q$ และข้อความเงื่อนไขสองทาง $p \leftrightarrow q$ เสมอ

การทำก่อนของตัวดำเนินการตรรกะ (Precedence of Logical Operators)

เราสามารถสร้างประพจน์ประกอบโดยใช้ตัวดำเนินการนิเสธ และตัวดำเนินการตรรกะซึ่งได้ให้นิยามมาแล้ว โดยทั่วไปเราจะใช้วงเล็บเพื่อระบุอันดับซึ่งตัวดำเนินการตรรกะในประพจน์ประกอบจะถูกประยุกต์ใช้

ตัวอย่างเช่น $(p \vee q) \wedge (\neg r)$ หมายถึงประพจน์เชื่อมของ $(p \wedge q)$ และ $\neg r$

อย่างไรก็ตาม เพื่อลดจำนวนวงเล็บ เรากำหนดว่า ตัวดำเนินการนิเสธจะถูกประยุกต์ใช้ก่อนตัวดำเนินการตรรกะอื่น ๆ ทั้งหมด สิ่งนี้หมายความว่า $\neg p \wedge q$ คือประพจน์เชื่อมของ $\neg p$ และ q กล่าวคือ $(\neg p) \wedge q$ ไม่ใช่นิเสธของประพจน์เชื่อมของ p และ q กล่าวคือ $\neg(p \wedge q)$

กฎโดยทั่วไปอีกข้อหนึ่งของการทำก่อนคือ ตัวดำเนินการเชื่อม (conjunction operator) มีการทำก่อนสูงกว่าตัวดำเนินการเลือก (disjunction operator)

ดังนั้น $p \wedge q \vee r$ หมายถึง $(p \wedge q) \vee r$ ไม่ใช่ $p \wedge (q \vee r)$

เนื่องจากว่ากฎนี้อาจจะจำยาก เราจึงจะใช้วงเล็บต่อไป เพื่อให้อันดับของตัวดำเนินการเลือกและตัวดำเนินการเชื่อมชัดเจน

สุดท้าย กฎ ซึ่งยอมรับว่าตัวดำเนินการมีเงื่อนไข $(\rightarrow)$ และตัวดำเนินการเงื่อนไขสองทาง $(\leftrightarrow)$ มีการทำก่อนต่ำกว่าตัวดำเนินการเชื่อม $(\wedge)$ และตัวดำเนินการเลือก $(\vee)$

ดังนั้น $p \vee q \rightarrow r$ จึงเหมือนกับ $(p \vee q) \rightarrow r$

เราจะใช้วงเล็บเมื่ออันดับของตัวดำเนินการมีเงื่อนไข และตัวดำเนินการเงื่อนไขสองทางคือประเด็นที่ศึกษา ถึงแม้ว่าตัวดำเนินการมีเงื่อนไข จะมีการทำก่อนสูงกว่าตัวดำเนินการเงื่อนไขสองทางก็ตาม

การทำก่อน

TABLE 7 Precedence of Logical Operators

Operator	Precedence	
$\neg$	1	← highest priority
$\wedge$	2	
$\vee$	3	
$\rightarrow$	4	
$\leftrightarrow$	5	← lowest priority

ตัวอย่าง 10 ประโยคภาษาอังกฤษข้างล่างนี้จะแปลเป็นนิพจน์ตรรกะ (logical expression) อย่างไร

"You can access the Internet from campus only if you are a computer science major or you are not a freshman."

ผลเฉลย : ให้ a, c, และ f แทน

"You can access the Internet from campus."

"You are a computer science major."

และ "You are a freshman." ตามลำดับ

a = "You can access the Internet from campus"

c = "You are a computer science major"

f = "You are a freshman"

คำตอบ $a \rightarrow c \vee (\neg f)$ X

$a \rightarrow (c \vee (\neg f))$ ✓

$a \rightarrow (c \vee \neg f)$ ✓

โปรดสังเกตว่า "only if" เป็น implication วิธีหนึ่ง ประโยคนี้จึงแทนด้วย

$a \rightarrow (c \vee \neg f)$

ตัวอย่าง 11 ประโยคข้างล่างนี้จะถูกแปลเป็นนิพจน์ตรรกะอย่างไร

"You cannot ride the roller coaster if you are under 4 feet tall unless you are older than 16 years old."

ผลเฉลย : ให้ q, r, และ s แทน

"You can ride the roller coaster"

"You are under 4 feet tall"

และ "You are older than 16 years old"

ตามลำดับ ดังนั้นประโยคภาษาอังกฤษแปลเป็นนิพจน์ตรรกะ

$(r \wedge \neg s) \rightarrow \neg q$

q = "You can ride the roller coaster"

r = "You are under 4 feet tall"

s = "You are older than 16 years old"

คำตอบ $(r \wedge \neg s) \rightarrow \neg q$

คุณลักษณะของระบบ (System Specifications)

การแปลประโยคในภาษาธรรมชาติ (เช่น ภาษาอังกฤษ) ให้เป็นนิพจน์ตรรกะ คือส่วนสำคัญของการกำหนดทั้งระบบฮาร์ดแวร์และซอฟต์แวร์ทั้งคู่ วิศวกรระบบและซอฟต์แวร์จะเอาความต้องการในภาษาธรรมชาติและให้ (produce) ข้อกำหนดรายละเอียดที่ถูกต้องและไม่กำกวม (unambiguous) เพื่อใช้เป็นรากฐาน (basic) สำหรับการพัฒนาระบบ

ตัวอย่าง 12 จงแสดงข้อกำหนดรายละเอียด

"The automated reply cannot be sent when the file system is full."

โดยใช้ตัวเชื่อมตรรกะ

ผลเฉลย : ให้ p แทน "The automated reply can be sent"

และ ให้ q แทน "The file system is full"

ดังนั้น $\neg p$ แทน "It is not the case that the automated reply can be sent"

ซึ่งก็คือ "The automated reply cannot be sent"

ดังนั้น ข้อกำหนดรายละเอียดจึงแทนด้วย implication

$$q \rightarrow \neg p$$

รายละเอียดของระบบไม่ควรขัดแย้งกับคุณสมบัติ ถ้ามันขัดแย้งกัน จะไม่มีทางพัฒนาระบบซึ่งเป็นไปตามรายละเอียดทั้งหมดได้ ด้วยเหตุนี้ นิพจน์เชิงประพจน์ที่แทนรายละเอียดเหล่านี้ ต้องมี **ความต้องกัน** (consistent) นั่นคือ ต้องมีการกำหนดค่าความจริงให้กับตัวแปรในนิพจน์ซึ่งทำให้นิพจน์ทั้งหมดเป็นจริง

ตัวอย่าง 13 จงบอกว่ารายละเอียดของระบบเหล่านี้มีความต้องกันหรือไม่

1. "The diagnostic message is stored in the buffer or it is retransmitted."
2. "The diagnostic message is not stored in the buffer."
3. "If the diagnostic message is stored in the buffer, then it is retransmitted."

ผลเฉลย : ให้ p แทน "The diagnostic message is stored in the buffer."

ให้ q แทน "The diagnostic message is retransmitted."

รายละเอียดของระบบจึงเขียนดังนี้

$p \vee q$, $\neg p$ และ $p \rightarrow q$

การกำหนดค่าความจริงซึ่งทำให้รายละเอียดทั้ง 3 ข้อ ทั้งหมดเป็นจริงนั้น ต้องมี p เป็นเท็จ เพื่อทำให้ $\neg p$ เป็นจริง

เนื่องจากว่าเราต้องการให้ p v q เป็นจริง แต่ p เป็นเท็จ เพราะฉะนั้น q ต้องเป็นจริง

เนื่องจาก p → q เป็นจริง เมื่อ p เป็นเท็จ และ q เป็นจริง

จึงสรุปว่า รายละเอียดเหล่านี้มีความต้องกันเพราะว่าทั้งหมดเป็นจริง

เราจะได้ข้อยุติเหมือนกัน โดยใช้ตารางค่าความจริงเพื่อตรวจหาการกำหนดค่าที่เป็นไปได้ สี่อย่างของค่าความจริง ให้กับ p และ q

ตัวอย่าง 14 รายละเอียดระบบในตัวอย่าง 13 ยังคงมีความต้องกันหรือไม่ ถ้าเพิ่มข้อรายละเอียด "The diagnostic message is not retransmitted"

ผลเฉลย : ด้วยการใช้เหตุผลในตัวอย่าง 13 รายละเอียดสามข้อนั้นเป็นจริงเฉพาะในกรณีที่ p เป็นเท็จ และ q เป็นจริงเท่านั้น อย่างไรก็ตาม รายละเอียดใหม่นี้คือ ¬q ซึ่งเป็นเท็จ เมื่อ q เป็นจริง

ด้วยเหตุนี้ รายละเอียดสี่ข้อจึงมีความไม่ต้องกัน (inconsistent)

การดำเนินการตรรกะและบิต (Logic and Bit Operations)

คอมพิวเตอร์แทนข้อมูลด้วยบิต (bit)

บิตมีค่าที่เป็นไปได้สองชนิดคือ 0(ศูนย์) และ 1(หนึ่ง)

บิต (Bit) ย่อมาจากเลขฐานสอง (binary digit)

บิตสามารถนำมาใช้แทนค่าความจริง ดังนี้

บิต 1 แทนจริง และบิต 0 แทนเท็จ นั่นคือ 1 แทน T(จริง), 0 แทน F(เท็จ)

ตัวแปรแบบบูล (Boolean variable) คือตัวแปรที่มีค่าเป็นจริงหรือมีค่าเป็นเท็จ

ด้วยเหตุนี้ ตัวแปรแบบบูลจึงแทนได้โดยใช้บิต

การดำเนินการบิตของคอมพิวเตอร์สมนัยกับตัวเชื่อมตรรกะ โดยการแทนที่จริงด้วยเลข 1 และแทนที่เท็จด้วยเลข 0 ในตารางค่าความจริง

Truth value	Bit
T	1
F	0

TABLE 8 Table for the bit Operators OR, AND, and XOR

x	y	x ∨ y	x ∧ y	x ⊕ y
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	0

บทนิยาม 7 สายบิต หมายถึงลำดับของไม่มีบิต หรือมีบิตความยาวของสายอักขระนี้คือจำนวนบิตในสายอักขระ

(A **bit string** is a sequence of **zero** or more **bits**. The **length** of this string is the number of bits in the string.)

ตัวอย่าง 15 101010011 หมายถึงสายบิตที่มีความยาวเท่ากับเก้า

เราสามารถขยายการดำเนินการบิตให้กับสายบิต (bit strings)

เรานิยาม bitwise OR, bitwise AND, และ bitwise XOR ของสายบิตสองชุดที่มีความยาวเท่ากันให้เป็นสายบิตซึ่งมีของมัน OR, AND และ XOR ของบิตที่สมนัยกันในสายบิตสองชุดตามลำดับ

เราใช้สัญลักษณ์ ∨, ∧, และ ⊕ แทนการดำเนินการ bitwise OR, bitwise AND และ bitwise XOR ตามลำดับ

ตัวอย่าง 16 จงหา bitwise OR, bitwise AND และ bitwise XOR ของสายบิต 0110110110 และ 1100011101

ผลเฉลย : bitwise OR, bitwise AND และ bitwise XOR ของสายบิตสองชุดนี้ได้มาโดยการทำ OR, AND และ XOR ของบิตที่สมนัยกันตามลำดับ ผลลัพธ์คือ

0110110110	
<u>1100011101</u>	
1110111111	bitwise OR
0100010100	bitwise AND
1010101011	bitwise XOR

แบบฝึกหัด 9.1

1. Which of these sentences are propositions? What are the truth values of those that are propositions?

   a) Boston is the capital of Massachusetts.
   b) Miami is the capital of Florida.
   c) $2 + 3 = 5$.
   d) $5 + 7 = 10$.
   e) $x + 2 = 11$.
   f) Answer this question.
   g) $x + y = y + x$ for every pair of real number x and y.

2. Which of these are propositions? What are the truth values of those that are propositions?

   a) Do not pass go.
   b) What time is it?
   c) There are no black flies in Maine.
   d) $4 + x = 5$.
   e) $x + 1 = 5$ if $x = 1$.
   f) $x + y = y + z$ if $x = z$.

3. What is the negation of each of these propositions?

   a) Today is Thursday.
   b) There is no pollution in New Jersey.
   c) $2 + 1 = 3$.
   d) The summer in Maine is hot and sunny.

4. Let p and q be the propositions

   p : I bought a lottery ticket this week.

   q : I won the million dollar jackpot on Friday.

   Express each of these propositions as an English sentence.

   a) $\neg p$
   b) $p \vee q$
   c) $p \rightarrow q$
   d) $p \wedge q$
   e) $p \leftrightarrow q$
   f) $\neg p \rightarrow \neg q$
   g) $\neg p \wedge \neg q$
   h) $\neg p \vee (p \wedge q)$

5. Let p and q be the propositions "Swimming at the New Jersey shore is allowed" and "Sharks have been spotted near the shore," respectively. Express each of these compound propositions as an English sentence.

   a) $\neg q$
   b) $p \wedge q$
   c) $\neg p \vee q$
   d) $p \rightarrow \neg q$
   e) $\neg q \rightarrow p$
   f) $\neg p \rightarrow \neg q$
   g) $p \leftrightarrow \neg q$
   h) $\neg p \wedge (p \vee \neg q)$

9.2 ความสมมูลเชิงประพจน์ (Propositional Equivalences)

บทนิยาม 1 ประพจน์ประกอบซึ่งเป็นจริงเสมอ ไม่ว่าค่าความจริงของประพจน์ซึ่งเกิดขึ้นในประพจน์ประกอบจะเป็นอะไรก็ตาม เรียกว่า **สัจนิรันดร์** (tautology)

ประพจน์ประกอบ ซึ่งเป็นเท็จเสมอ เรียกว่า **ข้อขัดแย้ง** (contradiction)

สุดท้าย ประพจน์ซึ่งไม่เป็นสัจนิรันดร์และไม่เป็นข้อขัดแย้ง เรียกว่า **การจร** (contingency)

ตัวอย่าง 1 จงพิจารณาตารางค่าความจริง ของ $p \vee \neg p$ และ $p \wedge \neg p$ ซึ่งแสดงให้เห็นในตาราง 1 เนื่องจาก $p \vee \neg p$ เป็นจริงเสมอ จึงเป็น**สัจนิรันดร์** เนื่องจาก $p \vee \neg p$ เป็นเท็จเสมอ จึงเป็น**ข้อขัดแย้ง**

TABLE 1 ตัวอย่างของสัจนิรันดร์และข้อขัดแย้ง

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	T	F
F	T	T	F

ความสมมูลเชิงตรรกะ (Logical Equivalences)

ประพจน์ประกอบต่าง ๆ ซึ่งมีค่าความจริงเหมือนกันในทุกกรณีที่เป็นไปได้ เรียกว่า ประพจน์ประกอบเหล่านี้เป็นความสมมูลเชิงตรรกะ (Compound propositions that have the same truth values in all possible cases are called **logically equivalent.**)

บทนิยาม 2 ประพจน์ p และ q จะเรียกว่า สมมูลเชิงตรรกะ ถ้า $p \leftrightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์

สัญกรณ์ $p \equiv q$ ใช้แทน p และ q เป็นสมมูลเชิงตรรกะ

ข้อสังเกต สัญลักษณ์ $\equiv$ ไม่ใช่ตัวเชื่อมตรรกะ (logical connective) เพราะว่า $p \equiv q$ **ไม่ใช่ประพจน์ประกอบ** แต่เป็นเพียงข้อความซึ่ง $p \leftrightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์

สัญลักษณ์ $\Leftrightarrow$ บางครั้งนำมาใช้แทน $\equiv$ เพื่อให้หมายถึง ความสมมูลเชิงตรรกะ

วิธีหนึ่งซึ่งบอกว่าประพจน์สองชุดเป็นสมมูลกันหรือไม่ คือใช้ตารางค่าความจริง โดยเฉพาะ ประพจน์ p และประพจน์ q สมมูลกันก็ต่อเมื่อสดมภ์ (column) ที่ให้ค่าความจริงของมันตรงกัน (agree)

ตัวอย่าง 2 จงแสดงให้เห็นว่า $\neg(p \vee q)$ และ $\neg p \wedge \neg q$ เป็นสมมูลกันเชิงตรรกะ ความสมมูลนี้เป็นหนึ่งในกฎของ De Morgan สำหรับประพจน์

TABLE 2 ตารางค่าความจริงสำหรับ $\neg(p \vee q)$ และ $\neg p \wedge \neg q$						
p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

ผลเฉลย : เนื่องจากค่าความจริงของประพจน์ $\neg(p \vee q)$ และประพจน์ $\neg p \wedge \neg q$ ตรงกัน สำหรับการจัดกลุ่ม ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของค่าความจริง p และ q จึงสรุปได้ว่า $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ เป็นสัจนิรันดร์และประพจน์เหล่านี้เป็นสมมูลเชิงตรรกะ

ตัวอย่าง 3 จงแสดงให้เห็นว่า $p \rightarrow q$ และ $\neg p \vee q$ เป็นสมมูลเชิงตรรกะ

TABLE 3 ตารางค่าความจริงสำหรับ $\neg p \vee q$ และ $p \rightarrow q$				
p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

ผลเฉลย : เนื่องจากค่าความจริงของ $\neg p \vee q$ และ $p \rightarrow q$ ตรงกัน ประพจน์เหล่านี้จึงเป็นสมมูลเชิงตรรกะ

ตัวอย่าง 4 จงแสดงให้เห็นว่าประพจน์ $p \vee (q \wedge r)$ และ $(p \vee q) \wedge (p \wedge r)$ เป็นสมมูลเชิงตรรกะ สิ่งนี้คือกฎการแจกแจงของประพจน์เลือกเหนือประพจน์เชื่อม (This is the distributive law of disjunction over conjunction.)

ผลเฉลย : เนื่องจากค่าความจริงของ $p \vee (q \wedge r)$ และ $(p \vee q) \wedge (p \wedge r)$ ตรงกัน ประพจน์สองชุดนี้จึงเป็นสมมูลเชิงตรรกะ

ตัวอย่าง 5 จงแสดงให้เห็นว่า $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ สมมูลเชิงตรรกะกับ $p \rightarrow q$

p	q	$(p \rightarrow q)$	$(q \rightarrow p)$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

สรุป $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ สมมูลกับ $p \leftrightarrow q$

ข้อสังเกต

$(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \wedge \neg p)$ equivalent (สมมูล)

TABLE 4 A Demonstration That $p \vee (q \wedge r)$ and $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ Are Logically Equivalent.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \wedge r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

ข้อสังเกต โดยทั่วไปถ้าประพจน์ประกอบเกี่ยวข้องกับประพจน์ n ชุด ในตารางค่าความจริงของประพจน์ประกอบจะมี 2^n แถว

ตารางที่ 5 ประกอบด้วยความสมมูลที่สำคัญบางชุด ในความสมมูลเหล่านี้ T แทนประพจน์ใด ๆ ก็ตามซึ่งเป็นจริงเสมอ และ F แทนประพจน์ใด ๆ ก็ตามซึ่งเป็นเท็จเสมอ

นอกจากนี้แล้ว ยังแสดงความสมมูลที่เป็นประโยชน์บางชุดสำหรับประพจน์ประกอบที่เกี่ยวข้องกับประพจน์มีเงื่อนไข และประพจน์เงื่อนไขสองทางในตารางที่ 6 และ 7 ตามลำดับ

โปรดสังเกตว่า กฎของ De Morgan ขยายไปเป็น

$\neg(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \equiv (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \ldots \wedge \neg p_n)$

และ

$\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \equiv (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \ldots \vee \neg p_n)$

ความสมมูลเชิงตรรกะในตาราง 5, 6 และ 7 สามารถนำมาใช้เพื่อสร้างสมมูลตรรกะเพิ่มขึ้น

เหตุผลนี้คือ หนึ่งประพจน์ที่อยู่ในประพจน์ประกอบ ถูกแทนที่ด้วยประพจน์อีกหนึ่งชุด ซึ่งสมมูลตรรกะกับตัวมัน โดยไม่เปลี่ยนแปลงค่าความจริงของประพจน์ประกอบ เทคนิคนี้จะแสดงให้เห็นในตัวอย่างที่ 5 และ 6

ตัวอย่าง 5 จงแสดงให้เห็นว่า $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ และ $\neg p \wedge \neg q$ เป็นสมมูลเชิงตรรกะ

ผลเฉลย : นอกจากจะใช้ตารางค่าความจริงแสดงให้เห็นว่าประพจน์ประกอบเหล่านี้สมมูลกันแล้ว เราจะสร้างความสมมูลนี้โดยพัฒนาชุดความสมมูลเชิงตรรกะ โดยใช้ความสมมูลหนึ่งข้อในตาราง 5 ในแต่ละครั้ง เริ่มต้นด้วย $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ และจบด้วย $\neg p \wedge \neg q$ ดังนี้

$\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$	$\equiv \neg p \vee \neg(\neg q \wedge q)$	จากกฎข้อที่ 2 ของ De Morgan
	$\equiv \neg p \wedge [\neg(\neg p) \vee \neg q]$	จากกฎข้อที่ 1 ของ De Morgan
	$\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q)$	จากกฎ double negation
	$\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q)$	จากกฎข้อที่ 2 ของ distributive
	$\equiv F \vee (\neg p \wedge \neg q)$	เนื่องจาก $\neg p \wedge p \equiv p$
	$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee F$	จากกฎ commutative สำหรับ disjunction
	$\equiv \neg p \wedge \neg q$	จากกฎ identity for F

ดังนั้น $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ และ $\neg p \wedge \neg q$ เป็นสมมูลเชิงตรรกะ

ตัวอย่าง 6 จงแสดงให้เห็นว่า $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ เป็นสัจนิรันดร์

ผลเฉลย : ตัวอย่างนี้อาจแสดงให้เห็นโดยใช้ตารางค่าความจริง และอีกวิธีหนึ่งกระทำดังนี้

$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) \equiv \neg(p \wedge q) \wedge (p \vee q)$ โดย e.g 3

$\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q)$ โดยกฎข้อแรกของ De Morgan

$\equiv (\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee q)$ โดยกฎ associative และ commutative สำหรับ disjunction

$\equiv T \vee T$ โดย e.g 1 และกฎ commutative สำหรับ disjunction

$\equiv T$ โดยกฎ Domination

คู่กัน (Dual) ของประพจน์ประกอบหนึ่งชุด ซึ่งมีเฉพาะตัวดำเนินการตรรกะ $\vee$, $\wedge$, และ $\neg$ หมายถึงประพจน์ซึ่งได้มาโดยการแทนที่ $\vee$ แต่ละตัวด้วย $\wedge$, $\wedge$ แต่ละตัวด้วย $\vee$, T แต่ละตัวด้วย F, และ F แต่ละตัวด้วย T

คู่กันของประพจน์ s แทนด้วย s*

ตัวอย่าง จงหาภาวะคู่กัน (dual) ของประพจน์แต่ละชุดข้างล่างนี้

a) $p \wedge \neg q \wedge \neg r$

b) $(p \wedge q \wedge r) \vee s$

c) $(p \vee F) \wedge (q \vee T)$

แบบฝึกหัด 9.2

1. Use truth tables to verify these equivalences.
   a) $p \wedge \mathbf{T} \equiv p$ b) $p \vee \mathbf{F} \equiv p$
   c) $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$ d) $p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$
   e) $p \vee p \equiv p$ f) $p \wedge p \equiv p$
2. Show that $\neg(\neg p)$ and p are logically equivalent.
3. Use truth tables to verify the commutative laws.
   a) $p \vee q \equiv q \vee p$ b) $p \wedge q \equiv q \wedge p$
4. Use truth tables to verify the associative laws.
   a) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ b) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
5. Use a truth table to verify the distributive law
   $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.
6. Use a truth table to verify the first De Morgan law
   $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$.
7. Use De Morgan's laws to find the negation of each of the following statements.
   a) Jan is rich and happy. b) Carlos will bicycle or run tomorrow.
   c) Mei walks or takes the bus to class. d) Ibrahim is smart and hard working.
8. Use De Morgan's laws to find the negation of each of the following statements.
   a) Kwame will take a job in industry or go to graduate school.
   b) Yoshiko knows Java and calculus.
   c) James is young and strong.
   d) Rita will move to Oregon or Washington.

9. Show that each of these conditional statements is a tautology by using truth tables.

a) $(p \wedge q) \rightarrow p$

b) $p \rightarrow (p \vee q)$

c) $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$

d) $(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

e) $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p$

f) $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$

10. Show that each of these conditional statements is a tautology by using truth tables.

a) $[\neg p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$

b) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \wedge r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

c) $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$

d) $[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r)] \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow r$

11. Show that each conditional statement in Exercise 9 is a tautology without using truth tables.

12. Show that each conditional statement in Exercise 10 is a tautology without using truth tables.

13. Use truth tables to verify the absorption laws.

a) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

b) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

14. Determine whether $(\neg p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg q$ is a tautology.

15. Determine whether $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$ is a tautology.

Each of Exercises 16-28 asks you to show that two compound propositions are logically equivalent. To do this, either show that both sides are true, or that both sides are false, for exactly the same combinations of truth values of the propositional variables in these expressions (whichever is easier).

16. Show that $p \leftrightarrow q$ and $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ are equivalent.

17. Show that $\neg(p \leftrightarrow q)$ and $p \leftrightarrow \neg q$ are logically equivalent.

18. Show that $p \rightarrow q$ and $\neg q \rightarrow \neg p$ are logically equivalent.

19. Show that $\neg p \leftrightarrow q$ and $p \leftrightarrow \neg q$ are logically equivalent.

20. Show that $\neg(p \oplus q)$ and $p \leftrightarrow q$ are logically equivalent.

21. Show that $\neg(p \leftrightarrow q)$ and $\neg p \leftrightarrow q$ are logically equivalent.

22. Show that $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ and $p \rightarrow (q \wedge r)$ are logically equivalent.

23. Show that $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ and $(p \vee q) \rightarrow r$ are logically equivalent.

24. Show that $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ and $p \rightarrow (q \vee r)$ are logically equivalent.

25. Show that $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$ and $(p \wedge q) \rightarrow r$ are logically equivalent.

26. Show that $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r)$ and $q \rightarrow (p \vee r)$ are logically equivalent.

27. Show that $p \leftrightarrow q$ and $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ are logically equivalent.

28. Show that $p \leftrightarrow q$ and $\neg p \leftrightarrow \neg q$ are logically equivalent.

29. Show that $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ is a tautology.

30. Show that $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$ is a tautology.

31. Show that $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ and $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ are not equivalent.

32. Show that $(p \wedge q) \rightarrow r$ and $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ are not equivalent.

33. Show that $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow s)$ and $(p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow s)$ are not logically equivalent.

The **dual** of a compound proposition that contains only the logical operators $\vee$, $\wedge$, and $\neg$is the compound proposition obtained by replacing each $\vee$ by $\wedge$, each $\wedge$, by $\vee$, each **T** by $\wedge$ **F**, and each **F** by **T**. The dual of s is denoted by s*.

34. Find the dual of ecah of these compound propositions.

a) $p \vee \neg q$

b) $p \wedge (q \vee (r \wedge \mathbf{T})$

c) $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \mathbf{F})$

35. Find the dual of each of these compound propositions.

a) $p \wedge \neg q \wedge \neg r$

b) $(p \wedge q \wedge r) \vee s$

c) $(p \vee \mathbf{F}) \wedge (q \vee \mathbf{T})$