บทที่ 8

พีชคณิตบูลีน

(Boolean Algebra)

8.1 ฟังก์ชันแบบบูลีน (Boolean Functions)

8.2 การแทนที่ ฟังก์ชันแบบบูลีน (Representing Boolean Functions)

8.3 ประตูสัญญาณ เชิงตรรกะ (Logic Gates)

8.4 การทำให้ต่ำสุดของวงจร (Minimization of Circuits)

วงจร ใน คอมพิวเตอร์ และ ในอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ อื่นๆ มีอินพุต ซึ่งอาจจะเป็น 0 หรือ 1 และให้ เอาต์พุต เป็น 0s และ 1s เช่นกัน วงจร สามารถสร้างขึ้น โดยใช้ สมาชิกพื้นฐาน ใดๆ ซึ่งมี สถานะแตกต่างกัน สองสถานะ สมาชิกเช่นนี้ รวมทั้ง สวิตซ์ ซึ่งอาจจะเป็นตำแหน่ง on หรือ off และอุปกรณ์ของกล้อง ซึ่งอาจจะเป็น แสงเข้า (lit) หรือ แสงไม่เข้า (unlit)

ในบทนี้ จะพัฒนา คุณสมบัติพื้นฐาน ของ พีชคณิตแบบบูล การดำเนินการ ของ วงจร นิยามโดย ฟังก์ชันแบบบูล ซึ่ง กำหนดค่า ของเอาต์พุต สำหรับ เซตของอินพุต แต่ละชุด ขั้นแรก ในการสร้างวงจร คือ เพื่อแทน ฟังก์ชันแบบบูล โดยนิพจน์ สร้างขึ้น โดยใช้ การดำเนินการพื้น-ฐาน ของ พีชคณิตแบบบูล เรา จะจัดหา อัลกอริทึม สำหรับ สร้าง นิพจน์เช่นนั้น นิพจน์ ซึ่ง เราได้มา อาจประกอบด้วย การดำเนินการ มากกว่าที่ จำเป็นเพื่อแทน ฟังก์ชัน ต่อจากนั้น จะ อธิบาย วิธีต่างๆ สำหรับ การหา นิพจน์ด้วย จำนวนต่ำสุด ของ ผลบวก และ ผลคูณ ซึ่งแทน ฟังก์ชันแบบบูล โปรซีเดอร์ ซึ่งเราจะพิจารณา, แผนที่ของคาร์นาฟ (Karnaugh maps) และ วิธีของ Quine-McCluskey เหล่านี้ เป็นสิ่งสำคัญ ในการออกแบบวงจรที่มีประสิทธิภาพ

8.1 **ฟังก์ชันแบบบูล** (Boolean Functions)

พีชคณิตแบบบูล จัดหา การดำเนินการ และ กฎ สำหรับ การทำงาน กับเซต {0, 1} อิเล็กทรอนิกส์ และ optical switches สามารถศึกษาได้โดยใช้ เซตนี้ และกฎของ พีชคณิตแบบบูล (Boolean sum) และ ผลคูณแบบบูล (Boolean product)

ส่วนเติมเต็ม (complement) ของสมาชิก ใช้สัญลักษณ์ bar ($\overline{\ }$), นิยามโดย $\overline{0} = 1$ และ $\overline{1} = 0$

ผลบวกแบบบูล ใช้สัญลักษณ์ + หรือ OR มีค่าดังนี้ :

$1 + 1 = 1,\ 1 + 0 = 1,\ 0 + 1 = 1,\ 0 + 0 = 0$

ผลคูณแบบบูล ใช้สัญลักษณ์ · หรือ AND มีค่าดังนี้ :

$1 \cdot 1 = 1,\ 1 \cdot 0 = 0,\ 0 \cdot 1 = 0,\ 0 \cdot 0 = 0$

เมื่อ ไม่มีความสับสน สัญลักษณ์ · อาจลบทิ้งได้ เป็นเพียงการเขียน ผลคูณ เชิงพีชคณิต (algebraic products) เมื่อ ไม่ใช้วงเล็บกำกับ กฎการทำก่อน สำหรับ การดำเนินการแบบบูล คือ ขั้นแรก คำนวณ ส่วนเติมเต็มทั้งหมด ตามด้วย ผลคูณแบบบูล ตามด้วย ผลบวกแบบบูล

ตัวอย่าง 1 จงหาค่าของ $1 \cdot 0 + \overline{(0 + 1)}$

ผลเฉลย

ใช้บทนิยามของการเป็น ส่วนเติมเต็ม ผลบวกแบบบูล และ ผลคูณแบบบูล จะได้

$$\begin{aligned}(1 \cdot 0) + \overline{(0 + 1)} &= 0 + \overline{1} \\ &= 0 + 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

ส่วนเติมเต็ม ผลบวกแบบบูล และผลคูณแบบบูล สมนัยกับ ตัวดำเนินการตรรกะ $\neg$, $\vee$, และ $\wedge$ ตามลำดับ เมื่อ 0 สมนัยกับ F (false) และ 1 สมนัยกับ T (true) ผลลัพธ์ ของพีชคณิตแบบบูล สามารถ แปลได้โดยตรง ให้เป็น ผลลัพธ์ เกี่ยวกับประพจน์ (propositions) ในทางย้อนกลับ ผลลัพธ์ เกี่ยวกับ ประพจน์ สามารถ แปลให้เป็น ข้อความสั่ง เกี่ยวกับ พีชคณิตแบบบูล ได้เช่นกัน

นิพจน์แบบบูล และฟังก์ชันแบบบูล

(Boolean expressions and Boolean functions)

ให้ $B = \{0, 1\}$ ตัวแปร x เรียกว่า **ตัวแปรแบบบูล** (Boolean variable) ถ้าค่าของมันมาจากสมาชิกใน B เท่านั้น ฟังก์ชันจาก B^n, เซต $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in B, 1 \leq i \leq n\}$ ไปยัง B เรียกว่า **ฟังก์ชันแบบบูล ขององศา n** (Boolean function of degree n) ค่าของฟังก์ชันแบบบูล บ่อยครั้ง แสดงในตาราง ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชันแบบบูล $F(x, y)$ มีค่าเป็น 1 เมื่อ $x = 1$ และ $y = 0$ และมีค่าเป็น 0 สำหรับกรณีอื่นๆ ทั้งหมด ของการเลือก x และ y แทนด้วย ตารางที่ 1 ดังนี้

ตาราง 1

x	y	F(x, y)
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

ฟังก์ชันแบบบูล สามารถถูกแทนที่ โดยใช้ นิพจน์ ประกอบขึ้นจาก ตัวแปร และ การดำเนินการแบบบูล

นิพจน์แบบบูล (Boolean expressions) ในตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$ นิยามแบบเรียกซ้ำ ดังนี้

$0, 1, x_1, x_2, \ldots, x_n$ คือ นิพจน์แบบบูล

ถ้า E_1 และ E_2 คือ นิพจน์แบบบูล ดังนั้น $\overline{E_1}$, (E_1E_2) และ $(E_1 + E_2)$เป็น นิพจน์แบบบูล

นิพจน์แบบบูล แต่ละชุด แทน ฟังก์ชันแบบบูล หนึ่งฟังก์ชัน ค่าของฟังก์ชันนี้ ได้มาโดย การแทนตัวแปร ในนิพจน์ ด้วย 0 และ 1 ในหัวข้อ 8.2 เราจะแสดงให้เห็นว่า ฟังก์ชันแบบบูลทุกชุด สามารถแทนได้ด้วย นิพจน์แบบบูล

ตัวอย่าง 2 จงหาค่าของ ฟังก์ชันแบบบูล ซึ่งแทน โดย

$$F(x, y, z) = xy + \overline{z}$$

ผลเฉลย ค่าของฟังก์ชันนี้ แสดงในตารางที่ 2

ตารางที่ 2

x	y	z	xy	z	$F(x, y, z) = xy + \overline{z}$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1

ฟังก์ชันแบบบูล F และ G ของ n ตัวแปรจะเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ $F(b_1, b_2, \ldots, b_n) = G(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ เมื่อใดก็ตามที่ $b_1, b_2, \ldots, b_n$ อยู่ใน B

นิพจน์แบบบูล ที่แตกต่างกัน สองชุด ซึ่งแทน ฟังก์ชันเดียวกัน เรียกว่า **สมมูลกัน** (Two different Boolean expressions that represent the same function are called **equivalent**.)

ตัวอย่างเช่น นิพจน์แบบบูล 3 ชุดนี้ : xy, $xy + 0$ และ $xy \cdot 1$ สมมูลกัน

ส่วนเติมเต็ม (complement) ของ ฟังก์ชันแบบบูล F คือ ฟังก์ชัน $\overline{F}$, เมื่อ $\overline{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

ให้ F และ G เป็นฟังก์ชันแบบบูล ของ องศา n ผลบวกแบบบูล (Boolean sum) $F + G$ และ ผลคูณแบบบูล (Boolean product) FG นิยามดังนี้

$$(F + G)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) + G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$(FG)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ฟังก์ชันแบบบูล ของ องศา 2 หมายถึง ฟังก์ชันจากเซต ที่มีสมาชิก สี่ตัว คือ คู่ ของ สมาชิกต่างๆ จาก $B = \{0, 1\}$ ไปยัง B ซึ่งเป็นเซต ที่มี สมาชิก สองตัว เพราะฉะนั้น จึงมี ฟังก์ชันแบบบูลที่แตกต่างกัน 16 ชุด ขององศา 2 ในตารางที่ 3 แสดงให้เห็นค่าต่างๆ ของ ฟังก์ชันแบบบูลที่แตกต่างกัน 16 ชุด ขององศา 2 ให้ชื่อ $F_1, F_2, \ldots, F_{16}$

ตารางที่ 3 ฟังก์ชันแบบบูลขององศา 2

x	y	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

ตัวอย่าง 8 ฟังก์ชันแบบบูลที่แตกต่างกัน ขององศา n มีกี่ชุด?

(How many different Boolean functions of degree n are there?)

ผลเฉลย จากกฎการคูณ สำหรับการนับ จะได้ว่า จะมี 2^n ที่แตกต่างกัน n - tuples ของ 0s และ 1s เพราะว่า ฟังก์ชันแบบบูล คือ การกำหนดค่า ของ 0 หรือ 1 ให้กับ n - tuples ที่แตกต่างกัน 2^n ชุด จากกฎผลคูณ แสดงว่า มี ฟังก์ชันแบบบูลที่แตกต่างกัน 2^{2^n} ชุด

ตารางที่ 4 แสดงจำนวน ของ ฟังก์ชันแบบบูลที่แตกต่างกัน ขององศา 1 จนถึง องศา 6 จำนวนของฟังก์ชันเช่นนี้ เพิ่มขึ้นรวดเร็วมาก

ตารางที่ 4	จำนวนของ ฟังก์ชันแบบบูลขององศา n
องศา	
1	2
2	16
3	256
4	65,536
5	4,294,967,296
6	18,446,744,073,709,551,616

เอกลักษณ์ของพีชคณิตแบบบูล

(Identities of Boolean algebra)

มีเอกลักษณ์ จำนวนมาก ใน พีชคณิตแบบบูล สิ่งที่สำคัญมากที่สุดของเอกลักษณ์เหล่านี้ แสดงในตารางที่ 5 เอกลักษณ์เหล่านี้ มีประโยชน์โดยเฉพาะ ในการทำให้ การออกแบบของวงจร ง่ายขึ้น เอกลักษณ์แต่ละชุด ในตารางที่ 5 สามารถพิสูจน์ได้ โดยใช้ตาราง เราจะพิสูจน์เอกลักษณ์ชุดหนึ่ง ใน กฎของการแจกแจงด้วยวิธีนี้ ในตัวอย่างต่อไป

ตารางที่ 5 เอกลักษณ์แบบบูล	
เอกลักษณ์	ชื่อ
$\overline{\overline{x}} = x$	กฎของส่วนเติมเต็มคู่ (Law of the double complement)
$x + x = x$ $x \cdot x = x$	กฎ Idempotent
$x + 0 = x$ $x \cdot 1 = x$	กฎ Identity
$x + 1 = 1$ $x \cdot 0 = 0$	กฎ Dominance
$x + y = y + x$ $xy = yx$	กฎการสลับที่ (Commutative laws)

ตารางที่ 5 (ต่อ) เอกลักษณ์แบบบูล	
เอกลักษณ์	ชื่อ
$x + (y + z) = (x + y) + z$ $x(yz) = (xy)z$	กฎการเปลี่ยนกลุ่ม (Associative laws)
$x + yz = (x + y)(x + z)$ $x(y + z) = xy + xz$	กฎการแจกแจง (Distributive laws)
$(\overline{xy}) = \overline{x} + \overline{y}$ $(\overline{x + y}) = \overline{x}\ \overline{y}$	กฎของ De Morgan

ตัวอย่าง 4 จงแสดงให้เห็นว่า กฎการแจกแจง ข้างล่างนี้ ถูกต้อง (valid)

$$x(y + z) = xy + xz$$

ผลเฉลย การตรวจทาน เอกลักษณ์นี้ แสดงในตารางที่ 6 เอกลักษณ์นี้ ถูกต้อง เพราะว่า สองสดมภ์สุดท้าย ของ ตารางตรงกัน

ตารางที่ 6

x	y	z	y + z	xy	xz	x(y + z)	xy + xz
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

เอกลักษณ์ในตารางที่ 5 สามารถนำมาใช้ ในการพิสูจน์เอกลักษณ์อื่นๆ ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5 จงพิสูจน์ กฎ absorption $x(x + y) = x$ โดยใช้เอกลักษณ์ของพีชคณิตแบบบูล

ผลเฉลย ขั้นตอนที่ใช้เพื่อให้ได้ เอกลักษณ์นี้ และกฎที่ใช้ในแต่ละขั้นตอน เป็นดังนี้ :

$x(x + y)$	$= (x + 0)(x + y)$	Identity law for the Boolean sum
	$= x + 0\cdot y$	Distributive law of the Boolean sum over the Boolean product
	$= x + y\cdot 0$	Commutative law for the Boolean product
	$= x + 0$	Dominance law for the Boolean product
	$= x$	Identity law for the Boolean sum

ทวิภาวะ (Duality)

เอกลักษณ์ ใน ตารางที่ 5 มาเป็นคู่ (ยกเว้น กฎ ของ ส่วนเติมเต็มคู่) ในการอธิบาย ความสัมพันธ์ระหว่าง เอกลักษณ์ สองชุด ในแต่ละคู่ เราใช้ แนวคิด ของ คู่เสมอกัน

คู่เสมอกัน (dual) ของนิพจน์แบบบูล ได้มาโดยการ สลับที่ ผลบวกแบบบูล กับ ผลคูณแบบบูล และ การสลับที่กัน ระหว่าง 0s กับ 1s

(The **dual** of a Boolean expression is obtained by interchanging Boolean sums and Boolean products and interchanging 0s and 1s.)

ตัวอย่าง 6 จงหาคู่เสมอกัน ของ $x(y + 0)$ และ $\overline{x}\cdot 1 + (\overline{y} + z)$

ผลเฉลย การสลับที่ เครื่องหมาย $\cdot$ และเครื่องหมาย $+$ และการสลับที่ 0s และ 1s ในนิพจน์เหล่านี้ จะให้คู่เสมอกัน ของมัน

คู่เสมอกัน คือ $x + (y\cdot 1)$ และ $(\overline{x} + 0)(\overline{y}z)$ ตามลำดับ

คู่เสมอกัน ของ ฟังก์ชันแบบบูล F แทนด้วยนิพจน์แบบบูล หมายถึง ฟังก์ชัน ซึ่งแทนด้วย คู่เสมอกันของนิพจน์นี้ ฟังก์ชันคู่เสมอกัน นี้ (this dual function) ใช้สัญลักษณ์ F^d จะไม่ขึ้นกับ นิพจน์แบบบูลโดยเฉพาะ ซึ่งใช้แทน F เอกลักษณ์ ระหว่างฟังก์ชัน ซึ่งแทนด้วย นิพจน์แบบบูล ยังคงถูกต้อง เมื่อ คู่เสมอกัน ของ ทั้งสองข้าง ของเอกลักษณ์ ถูกนำมา ผลลัพธ์นี้ เรียกว่า **หลักทวิภาวะ** (duality principle) มีประโยชน์ ทำให้ได้เอกลักษณ์ชุดใหม่ๆ

ตัวอย่าง 7 จงสร้างเอกลักษณ์ จาก กฎ absorption

$x(x + y) = x$ ที่กำหนดในตัวอย่างที่ 5 โดยใช้คู่เสมอกัน

ผลเฉลย เอาคู่เสมอกัน ของ ทั้งสองข้าง ของ เอกลักษณ์นี้ จะให้เอกลักษณ์

$$x + xy = x$$

ซึ่งเรียกว่า กฎ absorption ด้วยเช่นกัน

แบบฝึกหัด 8.1

1. จงหาค่าของ นิพจน์ต่อไปนี้

   a) $1 \cdot \overline{0}$ b) $1 + \overline{1}$

   c) $\overline{0} \cdot 0$ d) $\overline{(1 + 0)}$

2. จงหาค่าต่างๆ ถ้ามี ของ ตัวแปรแบบบูล x ซึ่งมีคุณสมบัติ เป็นไปตามสมการ ข้างล่างนี้

   a) $x \cdot 1 = 0$ b) $x + x = 0$

   c) $x \cdot 1 = x$ d) $x \cdot \overline{x} = 1$

3. จงหาค่าของตัวแปรแบบบูล x และ y ซึ่งทำให้ $xy = x + y$
4. ฟังก์ชันแบบบูลที่แตกต่างกัน ของ องศา 7 มีกี่ชุด
5. จง พิสูจน์ กฎ absorption $x + xy = x$ โดยใช้ กฎต่างๆ ในตารางที่ 5
6. จงแสดงให้เห็นว่า $F(x, y, z) = xy + xa + yz$ มีค่าเท่ากับ 1 ก็ต่อเมื่อ มี ตัวแปร x, y และ z อย่างน้อยที่สุดสองตัว ที่มีค่าเป็น 1
7. จงแสดงให้เห็นว่า $x\overline{y} + y\overline{z} + \overline{x}z = \overline{x}y + \overline{y}z + x\overline{z}$
8. จงตรวจทานความถูกต้องของ กฎ ส่วนเติมเต็มคู่
9. จงตรวจทานความถูกต้องของ กฎ idempotent
10. จงตรวจทานความถูกต้องของ กฎ identity
11. จงตรวจทานความถูกต้องของ กฎ dominance
12. จงตรวจทานความถูกต้องของ กฎ commutative
13. จงตรวจทานความถูกต้องของ กฎ associative
14. จงตรวจทานความถูกต้องของ กฎ distributive ชุดแรก ในตารางที่ 5
15. จงตรวจทานความถูกต้องของ กฎ De Morgan

ตัวปฏิบัติการแบบบูล $\oplus$ เรียกว่า ตัวปฏิบัติการ XOR นิยามดังนี้

$1 \oplus 1 = 0$, $1 \oplus 0 = 1$, $0 \oplus 1 = 1$ และ $0 \oplus 0 = 0$

16. จงทำให้ นิพจน์ข้างล่างนี้ เป็นนิพจน์อย่างง่าย

(Simplify the following expressions.)

a) $x \oplus 0$ b) $x \oplus 1$

c) $x \oplus x$ d) $x \oplus \overline{x}$

17. จงแสดงให้เห็นว่า เอกลักษณ์ต่อไปนี้เป็นจริง

a) $x \oplus y = (x + y)(\overline{xy})$

b) $x \oplus y = (\overline{x}y) + (x\overline{y})$

18. จงแสดงให้เห็นว่า $x \oplus y = y \oplus x$

19. จงพิสูจน์ (prove) หรือ พิสูจน์ว่าเท็จ (disprove) สมการข้างล่างนี้

a) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$

b) $x + (y \oplus z) = (x + y) \oplus (x + z)$

c) $x \oplus (y + z) = (x \oplus y) + (x \oplus z)$

20. จงหา คู่เสมอกัน ของ นิพจน์แบบบูล ต่อไปนี้

a) $x + y$ b) $\overline{x}\ \overline{y}$

c) $xyz + \overline{x}\ \overline{y}\ \overline{z}$ d) $x\overline{z} + x \cdot 0 + \overline{x} \cdot 1$

21. สมมติว่า F เป็นฟังก์ชันแบบบูล แทนด้วย นิพจน์แบบบูล ในตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$ จงแสดงให้เห็นว่า $F^d(x_1, \ldots, x_n) = \overline{F(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})}$

22. จงแสดงให้เห็นว่า ถ้า F และ G เป็นฟังก์ชันแบบบูล แทนด้วยนิพจน์แบบบูล ใน n ตัวแปร และ F = G จะได้ F^d และ G^d คือ ฟังก์ชันแบบบูล แทนด้วยคู่เสมอกัน ของ นิพจน์แบบบูล แทน F และ G ตามลำดับ (ข้อแนะนำ : ใช้ผลลัพธ์ของ แบบฝึกหัด ข้อ 21

23. ฟังก์ชันแบบบูล F(x, y, z) ที่แตกต่างกัน มีกี่ชุด? เพื่อให้ $F(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = F(x, y, z)$ สำหรับค่าทั้งหมด ของตัวแปรแบบบูล x, y, และ z

24. ฟังก์ชันแบบบูล F(x, y, z) แตกต่างกัน มีกี่ชุด? เพื่อให้ $F(\overline{x}, y, z) = F(x, \overline{y}, z) = F(x, y, \overline{z})$ สำหรับค่าทั้งหมด ของ ตัวแปรแบบบูล x, y, z

8.2 การแทนที่ฟังก์ชันแบบบูล (Representing Boolean Functions)

ปัญหาที่สำคัญ สองสิ่ง ของ พีชคณิตแบบบูล ซึ่งจะศึกษา ในหัวข้อนี้

ปัญหาแรกคือ : กำหนดค่าต่างๆ ของ ฟังก์ชันแบบบูล จะสามารถหา นิพจน์ แบบบูล ซึ่งแทน ฟังก์ชันนี้ได้อย่างไร?

(Given the values of a Boolean function, how can a Boolean expression that represents this function be found?)

ปัญหานี้ หาคำตอบได้ โดยแสดงให้เห็นว่า ฟังก์ชันแบบบูล อาจแทนด้วย ผลบวกแบบบูล ของ ผลคูณแบบบูล ของ ตัวแปร และ ส่วนเติมเต็มของมัน ผลเฉลยของปัญหานี้ แสดงให้เห็นว่า ฟังก์ชันแบบบูลทุกชุด สามารถแทนที่ได้ โดยใช้ ตัวดำเนินการแบบบูล สามตัว คือ ·, + และ $\overline{}$

ปัญหาที่สอง : จะมีเซตของตัวดำเนินการจำนวนที่น้อยกว่า ซึ่งสามารถใช้แทน ฟังก์ชันแบบบูลทั้งหมด หรือไม่?

(Is there a smaller set of operators that can be used to represent all Boolean functions?)

เราจะตอบคำถามนี้ โดยแสดงให้เห็นว่า ฟังก์ชันแบบบูล ทุกชุด สามารถแทนที่ได้ โดยใช้ ตัวดำเนินการ เพียงหนึ่งตัวเท่านั้น ปัญหาทั้งสองข้อนี้ มีความสำคัญ ในทางปฏิบัติ ในการออกแบบวงจร

การขยาย ผลบวก ของ ผลคูณ

(Sum-of-products expansions)

เราจะใช้ตัวอย่าง เพื่อแสดงให้เห็น วิธีที่สำคัญอย่างหนึ่ง ในการหา นิพจน์แบบบูล เพื่อแทน ฟังก์ชันแบบบูล

ตัวอย่าง 1 จงหา นิพจน์แบบบูล ซึ่งแทน ฟังก์ชัน $F(x, y, z)$ และ $G(x, y, z)$ ซึ่งกำหนดให้ในตารางที่ 1

ตารางที่ 1				
x	y	z	F	G
1	1	1	0	0
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

ผลเฉลย นิพจน์ มีค่าเท่ากับ 1 เมื่อ $x = 1, z = 1$ และ $y = 0$ และมีค่าเท่ากับ 0 กรณีอื่นๆ สิ่งนี้คือความจำเป็น เพื่อใช้แทน ฟังก์ชัน F นิพจน์เช่นนี้ ก่อรูปโดยการเอา ผลคูณแบบบูล ของ $x, \overline{y}$ และ z , ผลคูณนี้คือ $x\overline{y}z$ มีค่าเท่ากับ 1 ก็ต่อเมื่อ $x = \overline{y} = z = 1$ ซึ่งเป็นจริงก็ต่อเมื่อ $x = z = 1$ และ $y = 0$ การแทน ฟังก์ชัน G เราต้องการนิพจน์ ซึ่งเท่ากับ 1 เมื่อ $x = y = 1$ และ $z = 0$ หรือ เมื่อ $x = z = 0$ และ $y = 1$ เราสามารถ ก่อรูป นิพจน์ ด้วยค่าเหล่านี้โดยการเอา ผลบวกแบบบูล ของ ผลคูณแบบบูล ที่แตกต่างกัน สองชุด ผลคูณแบบบูล $xy\overline{z}$ มีค่าเท่ากับ 1 ก็ต่อเมื่อ $x = y = 1$ และ $z = 0$ ในทำนองเดียวกัน ผลคูณ $\overline{x}y\overline{z}$ มีค่าเท่ากับ 1 ก็ต่อเมื่อ $x = z = 0$ และ $y = 1$

ผลบวกแบบบูล ของ ผลคูณ สองชุดนี้, $xy\overline{z} + \overline{x}\,\overline{yz}$ แทน ฟังก์ชัน G เพราะว่ามันมีค่าเท่ากับ 1 ก็ต่อเมื่อ $x = y = 1$ และ $z = 0$ หรือ $x = z = 0$ และ $y = 1$

ตัวอย่างที่ 1 แสดงให้เห็น กระบวนงาน สำหรับการสร้างนิพจน์แบบบูล แทนฟังก์ชันด้วยค่าต่างๆ ที่กำหนดให้ แต่ละ combination ของ ค่าต่างๆ ของตัวแปร สำหรับ ฟังก์ชัน ชุดซึ่งมีค่าเท่ากับ 1 นำไปสู่ ผลคูณแบบบูล ของตัวแปร หรือ ส่วนเติมเต็มของมัน

บทนิยาม 1 **มินเทอม** (minterm) ของตัวแปรแบบบูล $x_1, \ldots, x_n$ หมายถึง ผลคูณแบบบูล $y_1y_2 \ldots y_n$ เมื่อ $y_i = x_i$ หรือ $y_i = \overline{x_i}$

ตัวอักษร (literal) หมายถึง ตัวแปรแบบบูล หรือ ส่วนเติมเต็มของมัน

(A **literal** is a Boolean variable or its complement)

ดังนั้น มินเทอม หมายถึง ผลคูณ ของ อักษร n ตัว ตัวอักษร หนึ่งตัว สำหรับ ตัวแปร หนึ่งตัว

(Hence, a minterm is a product of n literals, with one literal for each variable.)

มินเทอม มีค่าเท่ากับ 1 สำหรับ หนึ่ง combination เท่านั้น ของค่าต่างๆ ของ ตัวแปรของมัน พูดให้ชัดเจนมากขึ้น, มินเทอม $y_1y_2 \ldots y_n$ มีค่าเท่ากับ 1 ก็ต่อเมื่อ y_i แต่ละตัวคือ 1 และสิ่งนี้เกิดขึ้นก็ต่อเมื่อ $x_i = 1$ เมื่อ $y_i = x_i$ และ $x_i = 0$ เมื่อ $y_i = \overline{x_i}$

ตัวอย่าง 2 จงหา มินเทอม ซึ่งเท่ากับ 1 ถ้า $x_1 = x_3 = 0$ และ $x_2 = x_4 = x_5 = 1$ และเท่ากับ 0 กรณีอื่นๆ

ผลเฉลย มินเทอม $\overline{x_1}\, x_2\, \overline{x_3}\, x_4\, x_5$ มี เซตของค่าที่ถูกต้อง การเอา ผลบวกแบบบูล ของ มิน-เทอม ซึ่ง แตกต่างกัน เราสามารถสร้าง นิพจน์แบบบูล ด้วย เซตของค่าต่างๆ ที่กำหนดให้ โดยเฉพาะ ผลบวกแบบบูล ของมินเทอม มีค่าเป็น 1 เมื่อมี มินเทอม หนึ่ง ตัวเท่านั้น ใน ผลบวก มีค่าเท่ากับ 1 มันมีค่า เป็น 0 สำหรับ combinations อื่นๆ ทั้งหมดของ ค่าต่างๆของตัวแปร เพราะฉะนั้น สำหรับ ฟังก์ชันแบบบูลที่กำหนดให้ ผลบวกแบบบูล ของ มินเทอม สามารถ ก่อรูปขึ้นซึ่งมีค่าเป็น 1 เมื่อฟังก์ชันแบบบูล มีค่าเป็น 1 และมีค่าเป็น 0 เมื่อ ฟังก์ชันแบบบูล มีค่าเป็น 0 มินเทอม ใน ผลบวกแบบบูลนี้ สมนัยกับ combination ของค่าต่างๆ เหล่านั้น สำหรับ ฟังก์ชันซึ่งมีค่าเท่ากับ 1

ผลบวกของ มินเทอม ซึ่งแทน ฟังก์ชัน เรียกว่า **การขยายผลบวกของผลคูณ** หรือ **รูปแบบปกติเลือก** ของฟังก์ชันแบบบูล

(The sum of minterms that represents the function is called the **sum-of-products expansion** or the **disjunctive normal form** of the Boolean function.)

ตัวอย่าง 3 จงหา การขยาย ผลบวกของผลคูณ สำหรับฟังก์ชัน $F(x, y, z) = (x + y)\,\overline{z}$

ตารางที่ 2					
x	y	z	x + y	z	$(x + y)\overline{z}$
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0

ผลเฉลย ขั้นแรกคือ หาค่าต่างๆ ของ F, ค่าเหล่านี้ อยู่ในตารางที่ 2 การขยาย ผลบวกของผลคูณ ของ F คือ ผลบวกแบบบูล ของ มินเทอม สามตัว สมนัยกับ สามแถวในตารางนี้ ซึ่ง ให้ค่าเป็น 1 สำหรับฟังก์ชัน เพราะฉะนั้น

$$F(x, y, z) = xy\overline{z} + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,\overline{z}$$

มันเป็นไปได้ด้วยเช่นกัน ที่จะหา นิพจน์แบบบูล ซึ่งแทนฟังก์ชันแบบบูล โดยการเอาผลคูณแบบบูล ของ ผลบวกแบบบูล การขยายของผลลัพธ์ เรียกว่า **รูปแบบปกติร่วม** (conjunctive normal form) หรือ **การขยาย ผลคูณของผลบวก** (product-of-sums expansion) ของฟังก์ชัน การขยายเหล่านี้ พบได้จาก การเอาคู่เสมอกัน ของ การขยาย ผลบวกของผลคูณ

การหานิพจน์เช่นนี้ จะทำได้อย่างไร อธิบายโดยตรง ในแบบฝึกหัดข้อ 10 ตอนท้ายของหัวข้อนี้

ความบริบูรณ์ของฟังก์ชัน (Functional Completeness)

ฟังก์ชันแบบบูลทุกชุด สามารถแสดงได้ด้วย ผลบวกแบบบูล ของ มินเทอม, มินเทอมแต่ละตัว คือ ผลคูณแบบบูลของตัวแปรแบบบูล หรือ ส่วนเติมเต็มของมัน สิ่งนี้ แสดงให้เห็นว่า ฟังก์ชันแบบบูล ทุกชุด สามารถถูกแทน โดยใช้ ตัวดำเนินการแบบบูล ·, +, และ ¯ เนื่องจากฟังก์ชันแบบบูลทุกชุด สามารถถูกแทน โดยใช้ ตัวดำเนินการเหล่านี้ เราพูดว่า เซต {·, +, ¯} คือ **ความบริบูรณ์อย่างฟังก์ชัน** (functionally complete) เราสามารถหาเซตของตัวดำเนินการบริบูรณ์อย่างฟังก์ชัน ขนาด น้อยกว่า ได้หรือไม่? เราสามารถทำได้ ถ้า ตัวดำเนินการ หนึ่งตัว ของ

ตัวดำเนินการ สามตัว ของ เซตนี้ แสดงได้ในเทอม ของ ตัวดำเนินการอื่น อีกสองตัว สิ่งนี้กระ-ทำได้ โดยใช้ กฎ ของ De Morgan หนึ่งชุด เราสามารถ ขจัด ผลบวกแบบบูล ทั้งหมด โดยใช้เอกลักษณ์

$$x + y = \overline{\overline{x}\ \overline{y}}$$

ซึ่งได้มา โดยการเอา ความบริบูรณ์ ของทั้งสองด้าน ใน กฎ De Morgan ข้อที่สอง ที่กำหนดใน ตารางที่ 5 ในหัวข้อ 8.1 จากนั้น ประยุกต์ กฎ ส่วนเติมเต็มคู่ สิ่งนี้ หมายความว่า เซต $\{\cdot, \overline{\ }\}$ คือ ความบริบูรณ์อย่างฟังก์ชัน ในทำนองเดียวกัน เราสามารถ ขจัด ผลคูณแบบบูลทั้งหมด โดยใช้เอกลักษณ์

$$xy = \overline{\overline{x} + \overline{y}}$$

ซึ่งได้มาจาก การเอา ส่วนเติมเต็ม ของทั้งสองข้าง ในกฎ De Morgan ข้อแรก ที่กำหนดให้ ใน ตารางที่ 5 หัวข้อ 8.1 แล้วประยุกต์ กฎส่วนเติมเต็มคู่ เพราะฉะนั้น $\{+, \overline{\ }\}$ คือ ความบริบูรณ์อย่างฟังก์ชัน

โปรดสังเกตว่า เซต $\{+, \cdot\}$ ไม่ใช่ความบริบูรณ์อย่างฟังก์ชัน เพราะว่ามันเป็นไปไม่ได้ ที่จะแสดง ฟังก์ชันแบบบูล $F(x) = \overline{x}$ โดยใช้ ตัวดำเนินการสองตัวนี้ (ดูแบบฝึกหัดข้อ 19)

เราพบแล้วว่าเซต ซึ่งประกอบด้วย ตัวดำเนินการสองตัว ซึ่งเป็นความบริบูรณ์อย่างฟังก์-ชัน เราสามารถหาเซต ขนาดเล็กกว่าของ ตัวดำเนินการบริบูรณ์อย่างฟังก์ชัน ได้หรือไม่? กล่าวคือ เซต ซึ่งประกอบด้วย ตัวดำเนินการ หนึ่งตัว เท่านั้น เซตเช่นนี้ มีอยู่จริง นิยามของตัวดำเนินการสองตัว คือ ตัวดำเนินการ $|$ หรือ NAND นิยามโดย

$$1 | 1 = 0 \quad \text{และ} \quad 1 | 0 = 0 | 1 = 0 | 0 = 1$$

และตัวดำเนินการ $\downarrow$ หรือ NOR นิยามโดย

$$1 \downarrow 1 = 1 \downarrow 0 = 0 \downarrow 1 = 0 \quad \text{และ} \quad 0 \downarrow 0 = 1$$

ทั้งสองเซต $\{|\}$ และ $\{\downarrow\}$ เป็นความบริบูรณ์เชิงฟังก์ชัน ในการดูว่า $\{|\}$ เป็นความบริบูรณ์เชิงฟังก์ชัน ทั้งหมดนี้ เราต้องแสดงให้เห็นว่า ตัวดำเนินการทั้งคู่ $\cdot$ และ $\overline{\ }$ สามารถแสดงโดยใช้เพียงตัวดำเนินการ $|$ สิ่งนี้กระทำดังนี้

$$\overline{x} = x | x$$

$$xy = (x|y) | (x|y)$$

ผู้อ่านควรตรวจทานเอกลักษณ์ (ดูแบบฝึกหัดข้อ 14) การแสดงให้เห็นว่า $\{\downarrow\}$ เป็นความบริบูรณ์เชิงฟังก์ชัน (ดูแบบฝึกหัดข้อ 15 และ 16)

แบบฝึกหัด 8.2

1. จงหา ผลคูณแบบบูล ของตัวแปรแบบบูล x, y, และ z หรือส่วนเติมเต็มของมัน ซึ่ง มีค่าเป็น 1 ก็ต่อเมื่อ

   a) $x = y = 0, z = 1$

   b) $x = 0, y = 1, z = 0$

   c) $x = 0, y = z = 1$

   d) $x = y = z = 0$

2. จงหา การขยาย ผลบวกของผลคูณ (sum-of-products expansions) ของฟังก์ชันแบบบูลต่อไปนี้

   a) $F(x, y) = \overline{x} + y$　　b) $F(x, y) = x\overline{y}$

   c) $F(x, y) = 1$　　d) $F(x, y) = \overline{y}$

3. จงหา การขยาย ผลบวกของผลคูณ ของ ฟังก์ชันแบบบูล ต่อไปนี้

   a) $F(x, y, z) = x + y + z$

   b) $F(x, y, z) = (x + z)y$

   c) $F(x, y, z) = x$

   d) $F(x, y, z) = x\overline{y}$

4. จงหา การขยายผลบวกของผลคูณ ของ ฟังก์ชันแบบบูล $F(x, y, z)$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1 ก็ต่อเมื่อ

   a) $x = 0$　　b) $xy = 0$

   c) $x + y = 0$　　d) $xyz = 0$

5. จงหา การขยายผลบวกของผลคูณ ของ ฟังก์ชันแบบบูล $F(w, x, y, z)$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1 ก็ต่อเมื่อ จำนวนคี่ ของ w, x, y, และ z มีค่าเป็น 1

6. จงหา การขยายผลบวกของผลคูณ ของ ฟังก์ชันแบบบูล $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1 ก็ต่อเมื่อ มีตัวแปร x_1, x_2, x_3, x_4 และ x_5 สามตัว หรือ มากกว่าสามตัว มีค่าเป็น 1

อีกวิธีหนึ่ง ในการหานิพจน์แบบบูล ซึ่งแทน ฟังก์ชันแบบบูล คือ เพื่อก่อรูป (form) ผลคูณแบบบูล ของ ผลบวกแบบบูล ของ literals แบบฝึกหัดข้อ 7 ถึง 11 เกี่ยวข้องกับ การแทนที่ชนิดนี้

7. จงหาผลบวกแบบบูล ซึ่งอาจจะประกอบด้วย x หรือ $\overline{x}$, อาจจะเป็น y หรือ $\overline{y}$, และอาจจะเป็น z หรือ $\overline{z}$ ซึ่งมีค่าเป็น 0 ก็ต่อเมื่อ

a) $x = y = 1, z = 0$

b) $x = y = z = 0$

c) $x = z = 0, y = 1$

8. จงหา ผลคูณแบบบูล ของ ผลบวกแบบบูล ของ literals ซึ่งมีค่าเป็น 0 ก็ต่อเมื่อ อาจจะเป็น $x = y = 1$ และ $z = 0$, $x = z = 0$ และ $y = 1$, หรือ $x = y = z = 0$

   (ข้อแนะนำ : เอาผลคูณแบบบูล ของ ผลบวกแบบบูล ซึ่งอยู่ในส่วน (a), (b) และ (c) ในแบบฝึกหัดข้อ 7)

9. จงแสดงให้เห็นว่า ผลบวกแบบบูล $y_1 + y_2 + \ldots + y_n$, เมื่อ $y_i = x_i$ หรือ $y_i = \overline{x_i}$ มีค่าเป็น 0 สำหรับหนึ่ง combination เท่านั้น ของค่าต่างๆ ของตัวแปร กล่าวคือ เมื่อ $x_i = 0$ ถ้า $y_i = x_i$ และ $x_i = 1$ ถ้า $y_i = x_i$ ผลบวกแบบบูลนี้ เรียกว่า **แมกซ์เทอม** (maxterm)

10. จงแสดงให้เห็นว่า ฟังก์ชันแบบบูล สามารถแทน ด้วย ผลคูณแบบบูล ของ แมกซ์เทอม การแทนที่นี้ เรียกว่า **การขยายผลคูณของผลบวก** (product-of-sums expansion) หรือ **รูปแบบปกติร่วม** (conjunctive normal form) ของ ฟังก์ชัน

    (ข้อแนะนำ : รวมหนึ่ง แมกซ์เทอม ในผลคูณนี้ สำหรับแต่ละ combination ของตัวแปร ซึ่งฟังก์ชันนี้ มีค่าเป็น 0)

11. จงหา การขยาย ผลคูณของผลบวก ของ ฟังก์ชันแบบบูล แต่ละชุด ในแบบฝึกหัดข้อ 3

12. จงแสดง ฟังก์ชันแบบบูล แต่ละชุด ข้างล่างนี้ โดยใช้ตัวดำเนินการ $\cdot$ และ $\overline{}$

    a) $x + y + z$ b) $x + \overline{y}(\overline{x} + z)$

    c) $\overline{(x + \overline{y})}$ d) $\overline{x}(x + \overline{y} + \overline{z})$

13. จงแสดง ฟังก์ชันแบบบูล แต่ละชุด ในแบบฝึกหัดข้อ 12 โดยใช้ตัวดำเนินการ $+$ และ $\overline{}$

14. จงแสดงให้เห็นว่า

    a) $\overline{x} = x \mid x$

    b) $xy = (x \mid y) \mid (x \mid y)$

    c) $x + y = (x \mid x) \mid (y \mid y)$

15. จงแสดงให้เห็นว่า

    a) $\overline{x} = x \downarrow x$

    b) $xy = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$

    c) $x + y = (x \downarrow x) \downarrow (x \downarrow y)$

16. จงแสดงให้เห็นว่า $\{\downarrow\}$ เป็นความบริบูรณ์ อย่างฟังก์ชัน โดยใช้แบบฝึกหัดข้อ 15

17. จงแสดง ฟังก์ชันแบบบูลแต่ละชุด ในแบบฝึกหัดข้อ 3 โดยใช้ตัวดำเนินการ $|$

18. จงแสดง ฟังก์ชันแบบบูลแต่ละชุด ในแบบฝึกหัดข้อ 3 โดยใช้ตัวดำเนินการ $\downarrow$

19. จงแสดงให้เห็นว่า เซตของตัวดำเนินการ $\{+, \cdot\}$ ไม่ใช่ความบริบูรณ์เชิงฟังก์ชัน

20. เซตต่อไปนี้ เป็น ความบริบูรณ์อย่างฟังก์ชัน ของตัวดำเนินการ หรือไม่?

a) $\{+, \oplus\}$ b) $\{-, \oplus\}$ c) $\{\cdot, \oplus\}$

8.3 ประตูสัญญาณตรรกะ (Logic Gates)

พีชคณิตแบบบูล ใช้เป็น ตัวแบบ วงจรไฟฟ้า ของ อุปกรณ์ อิเล็กทรอนิกส์ อินพุตแต่ละตัว และ เอาต์พุตแต่ละตัว ของ อุปกรณ์เช่นนี้ สามารถ คิดให้เป็น สมาชิกของ เซต {0, 1} เครื่องคอมพิวเตอร์ หรือ อุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์อื่นๆ ประกอบด้วย วงจร จำนวนหนึ่ง แต่ละวงจร ถูกออกแบบ โดยใช้ กฎ ของ พีชคณิตแบบบูล ซึ่งเราได้ศึกษามาแล้ว ใน หัวข้อ 8.1 และ 8.2 สมาชิกพื้นฐานของวงจร เรียกว่า **ประตูสัญญาณ** (gates) ประตูสัญญาณ แต่ละชนิด ทำให้เกิดผลในทางปฏิบัติ ของ การดำเนินการแบบบูล

ในหัวข้อนี้ เรานิยาม ชนิดต่างๆ ของประตูสัญญาณ โดยใช้ประตูสัญญาณ เหล่านี้ เราจะประยุกต์ใช้กฎต่างๆ ของ พีชคณิตแบบบูล เพื่อออกแบบ วงจร ซึ่งกระทำงาน หลากหลาย วงจรซึ่งเราจะใช้ ศึกษา ในบทนี้ ให้ เอาต์พุต ซึ่งขึ้นอยู่กับ อินพุต เท่านั้น และไม่ขึ้นกับสถานะปัจจุบันของวงจร พูดอีกอย่างหนึ่งคือ วงจรเหล่านี้ ไม่มีความสามารถของหน่วยความจำ วงจรเช่นนี้ เรียกว่า **วงจรเชิงผสม** หรือ **วงจรไร้ความจำ** (combinatorial circuits)

เราจะสร้างวงจรเชิงผสม โดยใช้ สมาชิก สามชนิด ชนิดที่หนึ่งคือ **ตัวผกผัน** (inverter) ซึ่งรับค่าของตัวแปรแบบบูล หนึ่งตัว เป็น อินพุต และ ให้ ส่วนเติมเต็มของค่านี้ เป็น เอาต์พุต

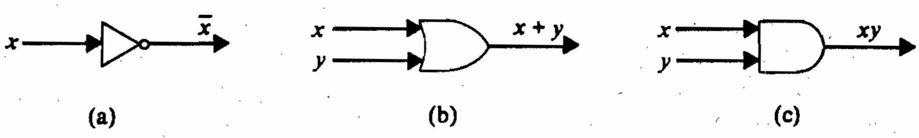
(The first is an inverter, which accepts the value of one Boolean variable as input and produces the complement of this value as its output.)

สัญลักษณ์ที่ใช้ สำหรับตัวผกผัน แสดงในรูป 1 (a) อินพุต ให้กับ ตัวผกผัน แสดง อยู่ทางซ้ายมือ ทางเข้าของสมาชิก และเอาต์พุต แสดงทางขวามือ เป็นทางออกของสมาชิก

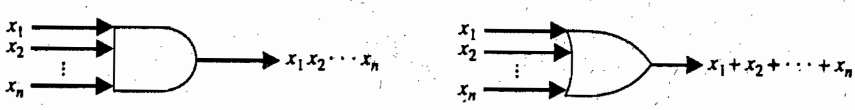
สมาชิกชนิดถัดไป ซึ่งเราจะใช้ ได้แก่ ประตูสัญญาณ OR อินพุต ให้ กับประตูสัญญาณนี้ คือ ค่าของตัวแปรแบบบูล สองตัว หรือ มากกว่าสองตัวขึ้นไป เอาต์พุท คือ ผลบวกแบบบูล (Boolean sum) ของค่าเหล่านี้ สัญลักษณ์ที่ใช้ สำหรับประตูสัญญาณ OR แสดงในรูป 1 (b) อินพุตของประตูสัญญาณ OR แสดงทางซ้ายมือ ทางเข้า สมาชิก และ เอาต์พุต แสดงทางขวามือ ทางออก ของสมาชิก

สมาชิกชนิดที่สาม ที่เราจะใช้ ได้แก่ประตูสัญญาณ AND อินพุตให้กับประตูสัญญาณนี้คือค่า ของตัวแปรแบบบูล สองตัว หรือ มากกว่าสองตัวขึ้นไป เอาต์พุต คือ ผลคูณแบบบูล (Boolean product) ของค่าของมัน สัญญลักษณ์ที่ใช้ สำหรับประตูสัญญาณ AND แสดงในรูป 1 (c) อินพุต ให้กับประตูสัญญาณ แสดงทางซ้ายมือ เป็นทางเข้า ของสมาชิก และเอาต์พุต แสดงทางขวามือ เป็นทางออก ของสมาชิก

ประตูสัญญาณ AND และประตูสัญญาณ OR มี อินพุต ได้หลายตัว (multiple iinputs) อินพุตต่างๆ ของประตูสัญญาณ เหล่านี้ แสดงทางซ้ายมือ ทางเข้า สมาชิกต่างๆ และเอาต์พุต แสดงทางขวามือ ตัวอย่างของ ประตูสัญญาณ AND และ ปรตูสัญญาณ OR ที่มี อินพุต จำนวน n ตัว แสดงในรูปที่ 2



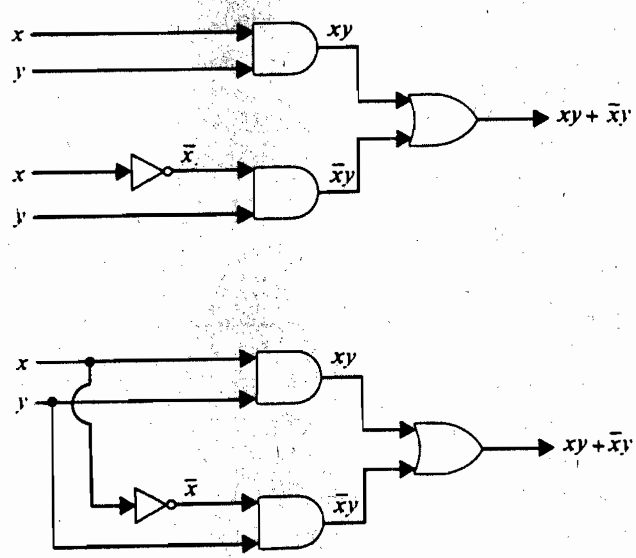
รูปที่ 1 ชนิดพื้นฐาน ของ ประตูสัญญาณ



รูปที่ 2 ประตูสัญญาณที่มี อินพุต n ตัว

การจัดหมู่ของประตูสัญญาณ (Combinations of Gates)

วงจรเชิงผสม สามารถสร้างขึ้น โดยใช้ การจัดหมู่ ของ ตัวผกผัน ประตูสัญญาณ OR และประตูสัญญาณ AND เมื่อการจัดหมู่ของวงจรต่างๆ ก่อรูปขึ้นมา ประตูสัญญาณ บางตัว อาจใช้ อินพุต ร่วมกัน สิ่งนี้ แสดง โดยการ วาดรูป หนึ่ง ใน สองวิธี ของวงจร วิธีที่หนึ่งคือ ใช้ การแตกกิ่ง ซึ่ง แสดงให้เห็นประตูสัญญาณทั้งหมด ซึ่งใช้อินพุตที่กำหนดให้ อีกวิธีหนึ่งคือ แสดงอินพุตนี้ แยกต่างหากสำหรับแต่ละประตูสัญญาณ รูปที่ 3 แสดงให้เห็นทั้งสองวิธี ของ การ แสดงประตูสัญญาณ ที่มี อินพุต เหมือนกัน โปรดสังเกตว่า เอาต์พุต จาก ประตูสัญญาณ หนึ่ง อาจใช้เป็น อินพุต ของสมาชิกอื่นๆ ตั้งแต่ หนึ่งตัว หรือ มากกว่าหนึ่งตัว ขึ้นไป เช่นที่ แสดงในรูปที่ 3 การวาดรูปทั้งคู่ในรูปที่ 3 คือวงจร ซึ่ง ให้เอาต์พุต $xy + \bar{x}y$



รูปที่ 3 สองวิธี ในการวาดรูปวงจรเดียวกัน

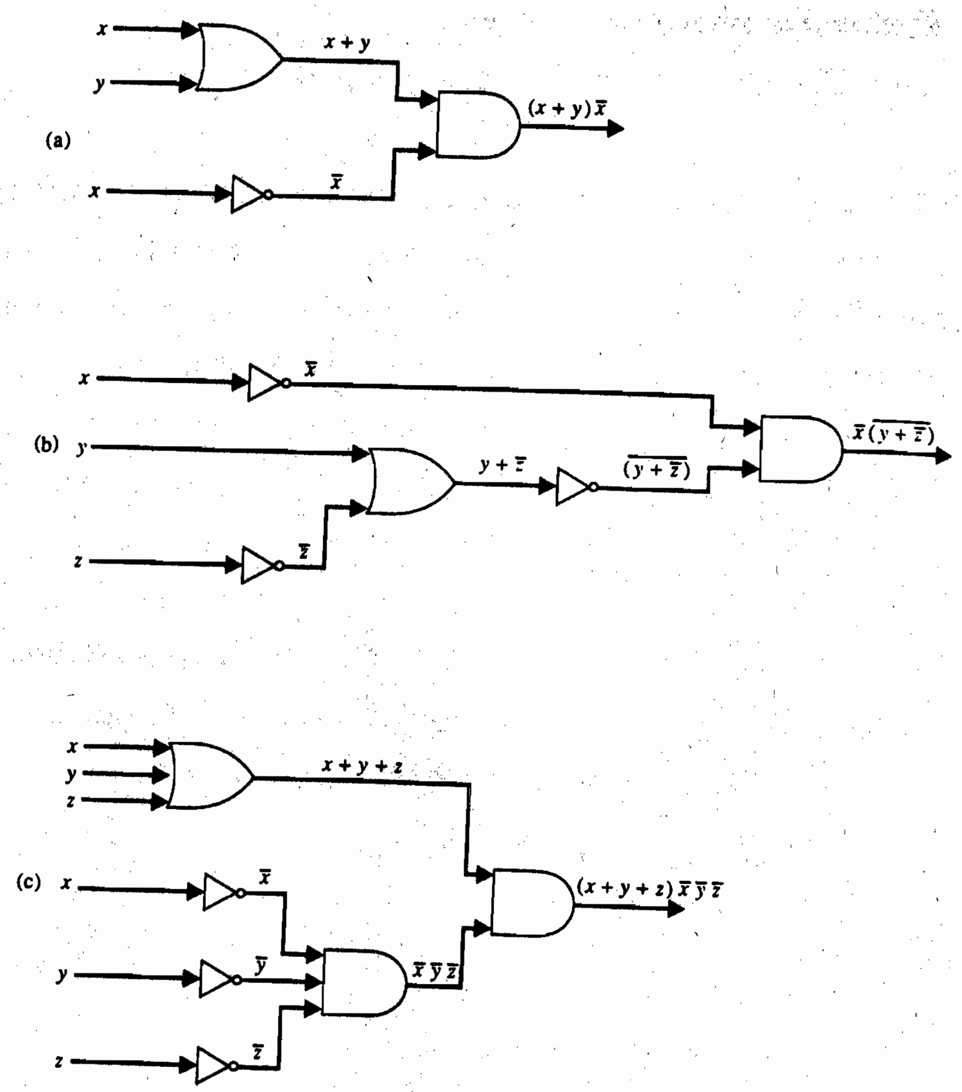
ตัวอย่าง 1 จงสร้างวงจร ซึ่งให้เอาต์พุต ดังนี้

(a) $(x + y)\overline{x}$

(b) $\overline{x}\ \overline{(y + \overline{z})}$

(c) $(x + y + z)\overline{x}\ \overline{y}\ \overline{z}$

ผลเฉลย วงจร ซึ่งให้ เอาต์พุตเหล่านี้ แสดงในรูปที่ 4



รูปที่ 4 วงจร ซึ่ง ให้เอาต์พุต ตามที่กำหนดในตัวอย่างที่ 1

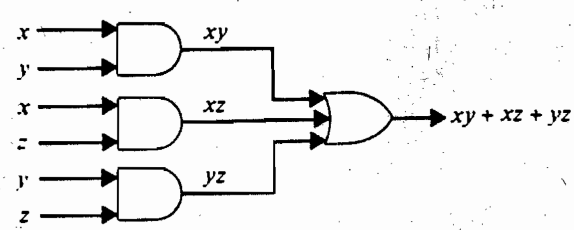
ตัวอย่างของวงจรต่างๆ (Examples of circuits)

เราจะให้ตัวอย่างของวงจรต่างๆ ซึ่งกระทำหน้าที่ที่มีประโยชน์

ตัวอย่าง 2 คณะกรรมการ ซึ่งประกอบด้วย คน สามคน ตัดสินใจในเรื่องต่างๆ สำหรับองค์กร กรรมการแต่ละคน ออกเสียง (vote) ได้เพียง yes หรือ no สำหรับแต่ละโครงการที่นำเสนอ หนึ่งโครงการ ที่นำเสนอ จะให้ผ่าน (passed) ถ้าได้รับคะแนนเสียง yes อย่างน้อยที่สุดสอง เสียง จงออกแบบวงจร ซึ่ง ตรวจสอบว่า โครงการหนึ่งที่นำเสนอจะให้ผ่าน หรือไม่

ผลเฉลย ให้ $x = 1$ ถ้ากรรมการคนแรก ลงคะแนน yes และ $x = 0$ ถ้า กรรมการคนนี้ ออกเสียง no, ให้ $y = 1$ ถ้ากรรมการคนที่สอง ลงคะแนน yes และ $y = 0$ ถ้ากรรมการคนนี้ ออกเสียง no, ให้ $z = 1$ ถ้ากรรมการคนที่สาม ออกสียง yes, และ $z = 0$ ถ้ากรรมการคนนี้ออกเสียง no ดังนั้น วงจร จึงต้องออกแบบ เพื่อให้เอาต์พุตเป็น 1 จากอินพุต x, y และ z เมื่ออินพุต สองตัว หรือ มากกว่า สองตัว ของ x, y และ z เป็น 1 การแทนที่ ของ ฟังก์ชันแบบบูล ซึ่ง มีค่าเอาต์พุต เหล่านี้ คือ $xy + xz + yz$ (ดูแบบฝึกหัดข้อ 6 ในหัวข้อ 8.1)

วงจร ซึ่ง ทำให้เกิดผลในทางปฏิบัติ ของ ฟังก์ชั่นนี้ แสดงในรูปที่ 5



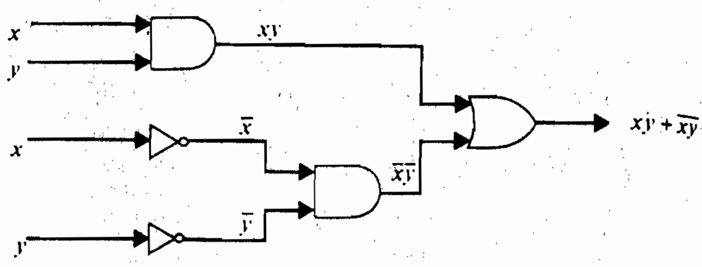
รูปที่ 5 วงจรสำหรับการออกเสียงข้างมาก

ตัวอย่าง 3 บางครั้ง การกำหนดให้ ไฟสว่าง (light fixtures) ถูกควบคุม โดย สวิตซ์ (switch) มากกว่า หนึ่งตัว จึงจำเป็นต้องออกแบบวงจรมาเพื่อให้ สวิตซ์ ตัวใดตัวหนึ่งก็ได้ สำหรับ เปิดไฟ เมื่อปิดสวิตซ์ ไฟจะสว่าง และเมื่อเปิดสวิตซ์ ไฟจะดับ จงออกแบบวงจร ซึ่ง ทำให้ประสบผล สำเร็จนี้ เมื่อ มี สวิตซ์ สองตัว และเมื่อมี สวิตซ์ สามตัว

ผลเฉลย เราจะเริ่มต้น โดยการออกแบบวงจร ซึ่ง ควบคุมการกำหนดให้ไฟสว่าง เมื่อใช้สวิตซ์ สองตัว ที่แตกต่างกัน ให้ $x = 1$ เมื่อสวิตซ์ตัวแรก ปิด และ $x = 0$ เมื่อสวิตซ์ตัวนี้ เปิด, และ ให้ $y = 1$ เมื่อสวิตซ์ที่สอง ปิด และ $y = 0$ เมื่อสวิตซ์ตัวนี้เปิด ให้ $F(x, y) = 1$ เมื่อ ไฟสว่าง และ $F(x, y) = 0$ เมื่อไฟดับ เราสามารถ ตัดสินใจ ได้ว่า ไฟฟ้าจะสว่าง เมื่อ สวิตซ์ทั้งสองตัว ปิด ดังนั้น $F(1, 1) = 1$ สิ่งนี้ จะบอกถึงว่า ค่าอื่นๆ ทั้งหมดของ F เมื่อ สวิตซ์ ตัวหนึ่ง ใน สองตัวนี้ เปิด ไฟจะดับ ดังนั้น $F(1, 0) = F(0, 1) = 0$ เมื่อ สวิตซ์ อีกตัวหนึ่งเปิด ไฟจะสว่าง ดังนั้น $F(0, 0) = 1$ ตารางที่ 1 แสดงค่าเหล่านี้ จะเห็นว่า $F(x, y) = xy + \bar{x}\,\bar{y}$ ฟังก์ชันที่ทำให้เกิดผลในทางปฏิบัติ ด้วยวงจร ซึ่งแสดงในรูปที่ 6

TABLE 1

x	y	F(x,y)
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1



รูปที่ 6 วงจรสำหรับควบคุมแสงสว่าง โดยสวิตซ์สองตัว

ต่อไป เราจะออกแบบวงจรสำหรับ สวิตซ์ สามตัว ให้ x, y, และ z เป็นตัวแปรแบบบูล ซึ่งจะแสดงว่า สวิตซ์แต่ละตัวในสามตัวนี้ ปิดหรือไม่

ให้ $x = 1$ เมื่อ สวิตซ์ตัวที่หนึ่ง ปิด และ $x = 0$ เมื่อสวิตซ์ตัวนี้ เปิด

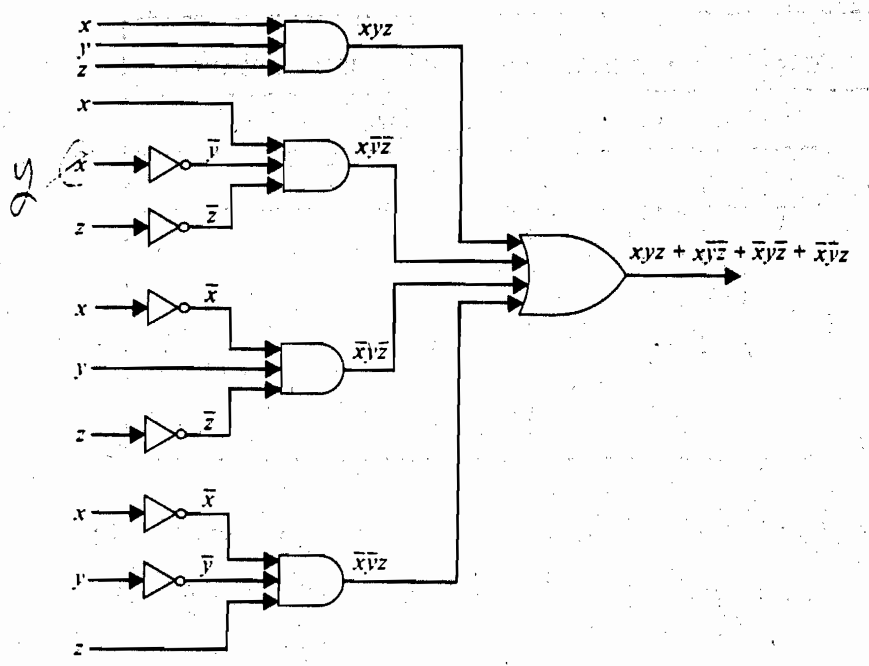
$y = 1$ เมื่อ สวิตซ์ตัวที่สอง ปิด และ $y = 0$ เมื่อสวิตซ์ตัวที่สอง เปิด

และ $z = 1$ เมื่อ สวิตซ์ตัวที่สาม ปิด และ $z = 0$ เมื่อสวิตซ์ตัวที่สาม เปิด

ให้ $F(x, y, z) = 1$ เมื่อไฟสว่าง และ $F(x, y, z) = 0$ เมื่อไฟดับ เราสามารถกำหนดให้ ไฟสว่างเมื่อสวิตช์ทั้งสามตัวปิด ดังนั้น $F(1, 1, 1) = 1$ สิ่งนี้ทำให้ได้ค่าอื่นๆ ทั้งหมดของ F เมื่อสวิตช์ตัวหนึ่งเปิด ไฟจะดับ ดังนั้น $F(1, 1, 0) = F(1, 0, 1) = F(0, 1, 1) = 0$ เมื่อสวิตช์ตัวที่สองเปิด ไฟจะสว่าง ดังนั้น $F(1, 0, 0) = F(0, 1, 0) = F(0, 0, 1) = 1$ สุดท้าย เมื่อสวิตช์ตัวที่สามเปิด ไฟจะดับอีกครั้งหนึ่ง ดังนั้น $F(0, 0, 0) = 0$ ตารางที่ 2 แสดงค่าต่างๆ ของฟังก์ชัน

ตารางที่ 2

x	y	z	F(x, y, z)
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0



รูปที่ 7 วงจร สำหรับ หลอดไฟหนึ่งดวง ควบคุมโดย สวิตช์ สามตัว

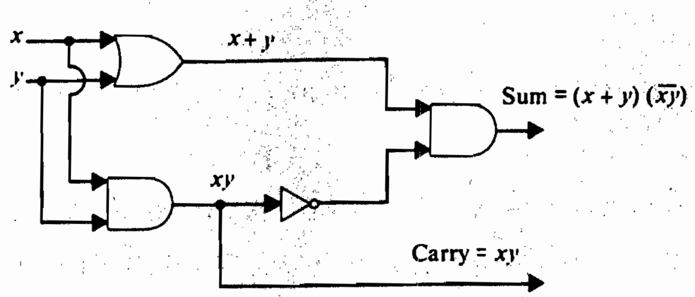
ฟังก์ชัน F สามารถแทนด้วย การขยาย ผลบวกของผลคูณ ดังนั้น $F(x, y, z) = xyz + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$ วงจรซึ่งแสดงในรูปที่ 7 ทำให้ฟังก์ชันนี้ เกิดผลในทางปฏิบัติ

วงจรบวก (Adders)

เราจะแสดงให้เห็นว่า วงจรตรรกะสามารถนำมาใช้เพื่อการบวกจำนวนเต็มบวก สองตัว ให้ประสบผลสำเร็จ จาก การขยายเลขฐานสองของมันได้อย่างไร เราจะสร้าง วงจร ให้ทำการ บวกนี้ จากวงจรสมาชิกบางตัว ข้อแรก เราสร้างวงจร ซึ่ง ใช้ หา x + y เมื่อ x และ y คือ สอง บิตอินพุตของวงจรนี้ จะเป็น x และ y เนื่องจากแต่ละบิตนี้ มีค่าเป็น 0 หรือ 1 ดังนั้นเอาต์พุต จะประกอบด้วย สองบิต คือ s และ c เมื่อ s คือ บิตผลบวก (sum bit) และ c คือ บิตทด (carry bit) วงจรนี้เรียกว่า **วงจรหลายเอาต์พุต** (multiple output circuit) เพราะว่า มันมี เอาต์พุต มาก กว่า หนึ่งตัว วงจรซึ่งเรากำลังออกแบบนี้ เรียกว่า **วงจรบวกครึ่งอัตรา** (half adder) เพราะว่า มันบวก สองบิต โดยไม่มี การพิจารณา ตัวทด จากการบวกก่อนหน้านั้น เราได้แสดง อินพุต และเอาต์พุต สำหรับ วงจรบวกครึ่งอัตรา ในตารางที่ 3

ตารางที่ 3 อินพุต และเอาต์พุต สำหรับ วงจรบวกครึ่งอัตรา			
อินพุต		เอาต์พุต	
x	y	s	c
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

จากตารางที่ 3 จะเห็นว่า $c = xy$ และ $s = \bar{x}y + x\bar{y} = (x + y)(\overline{xy})$ เพราะฉะนั้น วงจรซึ่งแสดงในรูปที่ 8 คำนวณ บิตผลบวก s และบิตทด c จากบิต x และ บิต y



รูปที่ 8 วงจรบวกครึ่งอัตรา

เราจะใช้วงจรบวกเต็มอัตรา (full adder) เพื่อคำนวณ บิตผลบวก และบิตทด เมื่อ สองบิต และบิตทด บวกกัน อินพุตของวงจรบวกเต็มอัตรา คือ บิต x และบิต y และบิตทด c_i เอาต์พุตคือ บิตผลบวก s และบิตทดใหม่ c_{i+1} อินพุต และเอาต์พุต สำหรับวงจรบวกเต็มอัตรา แสดงในตารางที่ 4

ตารางที่ 4 อินพุต และเอาต์พุต สำหรับวงจรบวกเต็มอัตรา				
อินพุต			เอาต์พุต	
x	y	c_i	s	c_{i+1}
1	1	1	1	1
1	1	0	0	1
1	0	1	0	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
0	0	0	0	0

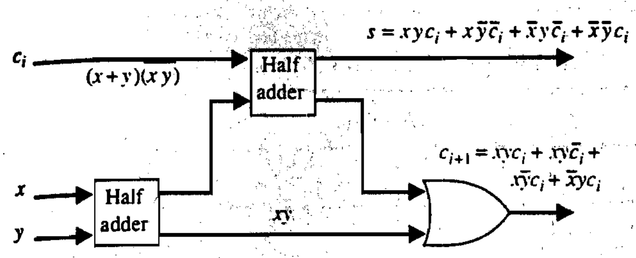
เอาต์พุต สองตัว ของวงจรบวกเต็มอัตรา คือ บิตผลบวก s และบิตทด c_{i+1} ถูกกำหนด โดย การขยายผลบวกของผลคูณ

$$xyc_i + x\overline{y}\,\overline{c_i} + \overline{x}y\overline{c_i} + \overline{x}\,\overline{y}c_i \quad \text{และ}$$

$$xyc_i + xy\overline{c_i} + x\overline{y}c_i + \overline{x}yc_i \quad \text{ตามลำดับ}$$

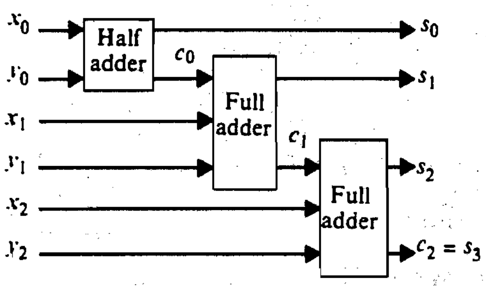
อย่างไรก็ตาม แทนที่จะเป็น การออกแบบ วงจรบวกเต็มอัตรา จากสิ่งที่ว่าง เราจะใช้ วงจรบวกครึ่งอัตรา เพื่อให้เกิดเอาต์พุตตามที่ต้องการ วงจรบวกเต็มอัตราดังแสดงใน รูปที่ 9

สุดท้าย รูปที่ 10 แสดงให้เห็นว่า วงจรบวกเต็มอัตราและวงจรบวกครึ่งอัตรา นำมาใช้ บวก จำนวนเต็ม สาม-บิต สองจำนวน $(x_2x_1x_0)_2$ และ $(y_2y_1y_0)_2$ เพื่อให้เกิดผลบวก $(s_2s_1s_0)_2$ ได้อย่างไร โปรดสังเกตว่า s_3 คือบิตอันดับสูงสุด ในผลบวก ซึ่งกำหนดบิตทด c_2



รูปที่ 9 วงจรบวกเต็มอัตรา

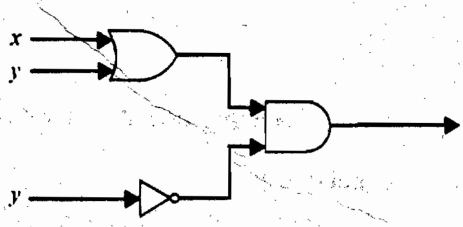
รูปที่ 10 การบวก จำนวนเต็ม สาม-บิต สองตัวด้วย
วงจรบวกเต็มอัตราและวงจรบวกครึ่งอัตรา



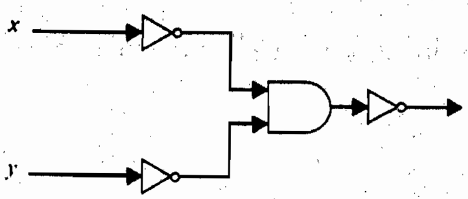
แบบฝึกหัด 8.8

ในแบบฝึกหัด ข้อ 1 - 5 จงหาเอาต์พุตของวงจรที่กำหนดให้

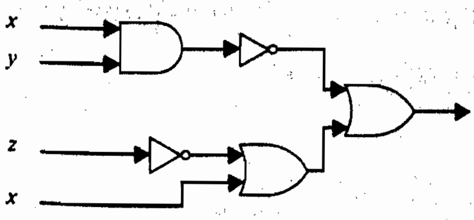
1.



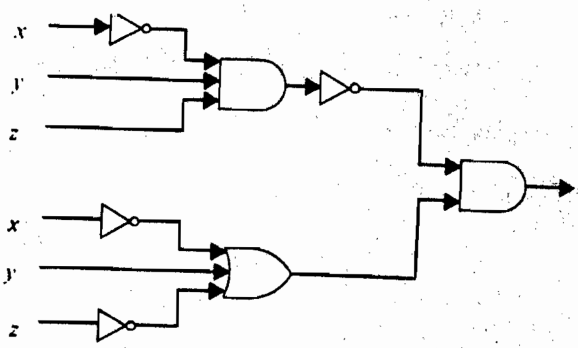
2.



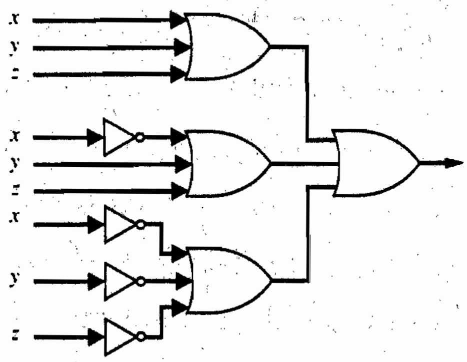
3.



4.



5.



6. จงสร้างวงจรจาก ตัวผกผัน ประตูสัญญาณ AND และ ประตูสัญญาณ OR เพื่อให้ได้เอาต์-พุต ต่อไปนี้

   a) $\overline{x} + y$ b) $\overline{(x + y)\,x}$

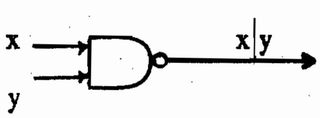
   c) $xyz + \overline{x}\ \overline{y}\ \overline{z}$ d) $\overline{(\overline{x} + z)(y + \overline{z})}$

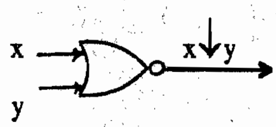
7. จงออกแบบวงจร ซึ่งทำให้การลงคะแนนเสียงข้างมาก ของกรรมการห้าคน มีผลในทางปฏิบัติ (Design a circuit that implements majority voting for five individuals.)

8. จงออกแบบวงจร สำหรับ เปิดไฟ หนึ่งดวง ซึ่งควบคุม โดยสวิตช์ สี่ตัว เมื่อ สวิตช์ ตัวใดตัวหนึ่ง ใน สี่ตัวนี้ เมื่อมันปิด ทำให้ ดวงไฟสว่าง และเมื่อ เปิดสวิตช์นี้ ดวงไฟ จะดับ

9. จงแสดงให้เห็นว่า จะหาผลบวกของ จำนวนเต็ม ห้า-บิต สองตัว โดยใช้ วงจรบวกเต็มอัตรา และวงจรบวกครึ่งอัตรา ได้อย่างไร

ประตูสัญญาณ สองชุด ซึ่งใช้บ่อย ใน วงจร คือ ประตูสัญญาณ NAND และประตูสัญญาณ NOR เมื่อประตูสัญญาณ NAND และ NOR แทนวงจร ประตูสัญญาณชนิดอื่นๆ ไม่จำเป็นต้องใช้เลย สัญกรณ์ สำหรับประตูสัญญาณเหล่านี้ เป็นดังนี้





10. จงใช้ประตูสัญญาณ NAND สร้างวงจร ที่มีเอาต์พุต ต่อไปนี้

   a) $\overline{x}$ b) $x + y$ c) xy d) $x \oplus y$

11. จงใช้ประตูสัญญาณ NOR สร้างวงจร สำหรับ เอาต์พุต ที่กำหนดให้ ในแบบฝึกหัดข้อ 10

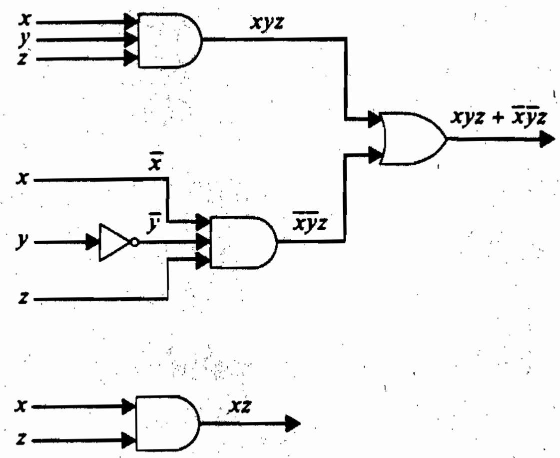
12. จงสร้าง วงจรบวกครึ่งอัตรา โดยใช้ประตูสัญญาณ NAND

13. จงสร้าง วงจรบวกครึ่งอัตรา โดยใช้ประตูสัญญาณ NOR

8.4 การทำให้ต่ำสุดของวงจร (Minimization of Circuits)

ประสิทธิภาพของวงจรเชิงผสม ขึ้นอยู่กับ จำนวน และ การจัดระเบียบประตูสัญญาณของมัน กระบวนการของการออกแบบ วงจรเชิงผสม เริ่มต้นด้วย ตาราง การกำหนดเอาต์พุตสำหรับแต่ละ combination ของค่าอินพุต ปกติ เราสามารถใช้ การขยายผลบวกของผลคูณ (sum--of-products expansion) ของวงจร ในการหา เซตของประตูสัญญาณ ซึ่งจะทำให้วงจรนี้เกิดผลในทางปฏิบัติ แต่ การขยาย ผลบวกของผลคูณ อาจมี จำนวนเทอมมากกว่าที่จำเป็น เทอมต่างๆ ในการขยายผลบวกของผลคูณ ซึ่งแตกต่างกันเพียงหนึ่ง ตัวแปร ดังนั้น ในหนึ่งเทอม ซึ่งมีตัวแปรนี้ และในเทอมอื่น ซึ่งมีส่วนเติมเต็มของตัวแปรนี้ สามารถรวมกันได้ ตัวอย่างเช่น วงจร ซึ่งมี เอาต์พุตเป็น 1 ก็ต่อเมื่อ $x = y = z = 1$ หรือ $x = z = 1$ และ $y = 0$ การขยายผลบวกของผลคูณของวงจรนี้ คือ $xyz + x\overline{y}z$ ผลคูณของสองเทอมในการขยายนี้ แตกต่างกัน เพียงหนึ่งตัวแปรเท่านั้น คือ y สามารถรวมกันได้ดังนี้

$$\begin{aligned} xyz + x\overline{y}z &= (y + \overline{y})xz \\ &= 1 \cdot (xz) \\ &= xz \end{aligned}$$



รูปที่ 1 วงจรสองชุด ซึ่งมีเอาต์พุตเหมือนกัน

ดังนั้น xz คือนิพจน์แบบบูล ที่มี ตัวดำเนินการ น้อยกว่า ซึ่งแทน วงจร เราแสดงการทำให้วงจร สองชุดที่แตกต่างกันนี้ มีผลในทางปฏิบัติ ในรูปที่ 1 ส่วนวงจรที่สอง ใช้ประตูสัญ-

ญาณ เพียง หนึ่ง ประตูเท่านั้น ในขณะที่ วงจรที่หนึ่ง ใช้ สาม ประตูสัญญาณ และหนึ่งตัวผกผัน

ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่า การรวมกันของเทอมต่างๆ ในการขยายผลบวกของผลคูณของวงจร นำไปสู่ นิพจน์ที่ง่ายขึ้น สำหรับวงจร เราจะอธิบายกระบวนงาน สอง ชุด ซึ่งทำให้การขยายผลบวกของผลคูณ ง่ายขึ้น เป้าหมายของ กระบวนงาน ทั้งคู่นี้ คือ ให้ ผลบวกแบบบูลของ ผลคูณแบบบูล ซึ่ง ประกอบด้วย จำนวน ของ ผลคูณ ของ literals น้อยที่สุด โดยที่ ผลคูณเหล่านี้ ประกอบด้วย จำนวน literals น้อยที่สุด ที่เป็นไปได้ ระหว่าง ผลบวกของผลคูณทั้งหมด ซึ่ง แทนฟังก์ชันแบบบูล

แผนที่คาร์นาฟ (Karnaugh maps)

การลด จำนวนเทอม ใน นิพจน์แบบบูล ซึ่งแทน วงจร มีความจำเป็นในการหาเทอมต่างๆ ซึ่งจะมารวมกัน มีวิธีเชิงภาพ เรียกว่า **แผนที่คาร์นาฟ** สำหรับ การหาเทอม เพื่อรวมกันสำหรับฟังก์ชันแบบบูล ซึ่งเกี่ยวข้องเล็กน้อยกับ จำนวนของตัวแปร วิธีนี้ ผู้พัฒนา คือ Maurice Karnaugh ในปีค.ศ. 1953 วิธีของเขามีพื้นฐานมาจากงานก่อนหน้า ซึ่ง พัฒนาโดย E.W. Veith (วิธีนี้ ปกติประยุกต์ ใช้กับ ฟังก์ชัน ซึ่งเกี่ยวข้องกับ ตัวแปร จำนวน หกตัว หรือน้อยกว่า หกตัว เท่านั้น) แผนที่คาร์นาฟ ให้วิธีเชิงภาพ สำหรับทำให้การขยายผลบวกของผลคูณ ง่ายขึ้น สิ่งแรก เราจะแสดงให้เห็นว่า แผนที่คาร์นาฟ ใช้ทำให้ การขยายของฟังก์ชันแบบบูล ในสองตัวแปร ง่ายขึ้น ได้อย่างไร

มี มินเทอม (minterms) ที่เป็นไปได้ สี่ เทอมใน การกระจายผลบวกของผลคูณ ของฟังก์ชันแบบบูล ในสองตัวแปรนี้ ประกอบด้วยสี่เหลี่ยมจัตุรัส สี่รูป เมื่อเลข 1 ในรูปสี่เหลี่ยมแทน มินเทอม ถ้า มินเทอมนี้อยู่ใน การกระจาย รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จะเรียกว่า **ประชิดกัน** (adjacent) ถ้ามินเทอม ซึ่งมันแทนที่ แตกต่างกันเพียง หนึ่ง literal เท่านั้น

ตัวอย่างเช่น สี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งแทน $\bar{x}\,y$ ประชิดกับ สี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่ง แทน $\bar{x}\,\bar{y}$

	y	$\bar{y}$
x	xy	$x\bar{y}$
$\bar{x}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$

รูปที่ 2 แผนที่คาร์นาฟ ใน สองตัวแปร

สี่เหลี่ยมจัตุรัส สี่รูป และเทอมต่างๆ ซึ่งแทน รูปเหล่านี้ แสดง ในรูปที่ 2

ตัวอย่าง 1 จงหาแผนที่คาร์นาฟ สำหรับ นิพจน์

a) $xy + \bar{x}y$ b) $x\bar{y} + \bar{x}y$ c) $\bar{x}y + x\bar{y} + \bar{x}\,\bar{y}$

ผลเฉลย เราใส่เลข 1 ใน สี่เหลี่ยมจัตุรัส เมื่อ มินเทอม ซึ่งแทน ด้วยจัตุรัสนี้ มีอยู่ใน การขยาย ผลบวกของผลคูณ แผนที่คาร์นาฟ สามรูป แสดงให้เห็น ในรูปที่ 3

	y	$\bar{y}$
x	1	
$\bar{x}$	1	

(a)

	y	$\bar{y}$
x		1
$\bar{x}$	1	

(b)

	y	$\bar{y}$
x		1
$\bar{x}$	1	1

(c)

รูปที่ 3 แผนที่คาร์นาฟ สำหรับการขยาย ผลบวกของผลคูณ ในตัวอย่างที่ 1

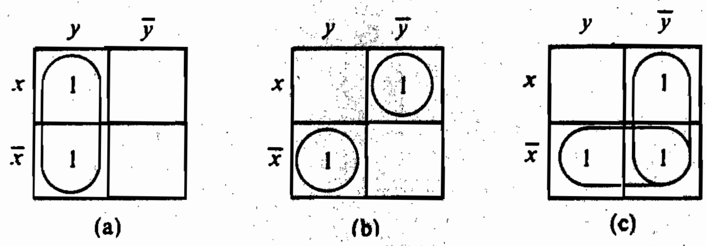
เราสามารถระบุ มินเทอม ซึ่งสามารถรวมกันได้ จากแผนที่คาร์นาฟ กล่าวคือ เมื่อใดก็ตาม ที่มี 1s ใน สี่เหลี่ยมจัตุรัส ประชิดกัน สองรูป ใน แผนที่คาร์นาฟ มินเทอม ซึ่งแทน โดยสี่เหลี่ยมจัตุรัสเหล่านี้ สามารถรวมกันให้เป็นผลคูณ เกี่ยวข้องกัน เพียงหนึ่งตัวแปร ตัวอย่าง เช่น $x\bar{y}$ และ $\bar{x}\,\bar{y}$ แทน จัตุรัสประชิดกัน และรวมกันเป็น $\bar{y}$ เนื่องจาก $x\bar{y} + \bar{x}\,\bar{y} = (x + \bar{x})\,\bar{y} = \bar{y}$

นอกจากนี้แล้ว ถ้า 1s อยู่ในจัตุรัสทั้งหมด สี่รูป มินเทอม ทั้ง สี่เทอม สามารถรวมกัน เป็น หนึ่งเทอม คือ นิพจน์แบบบูล 1 ซึ่งไม่เกี่ยวข้องกับ ตัวแปรใดๆ เราใส่วงกลม บล็อกของจัตุรัสในแผนที่คาร์นาฟ ซึ่งแทน มินเทอม ที่สามารถรวมกันได้ และจากนั้น หา ผลบวกของผลคูณ ที่สมนัยกัน เป้าหมายคือ ระบุ บล็อกที่เป็นไปได้ ใหญ่สุด และครอบคลุม 1's ทั้งหมด ด้วยบล็อกน้อยที่สุด โดยใช้ บล็อกขนาดใหญ่ที่สุดเป็นสิ่งแรก และปกติจะใช้บล็อกใหญ่ที่สุดที่เป็นไปได้

ตัวอย่าง 2 จงทำให้ การขยายผลบวกของผลคูณ ที่กำหนดให้ในตัวอย่างที่ 1 เป็นนิพจน์อย่างง่ายขึ้น (Simplify the sum-of-products expansions given in example 1.)

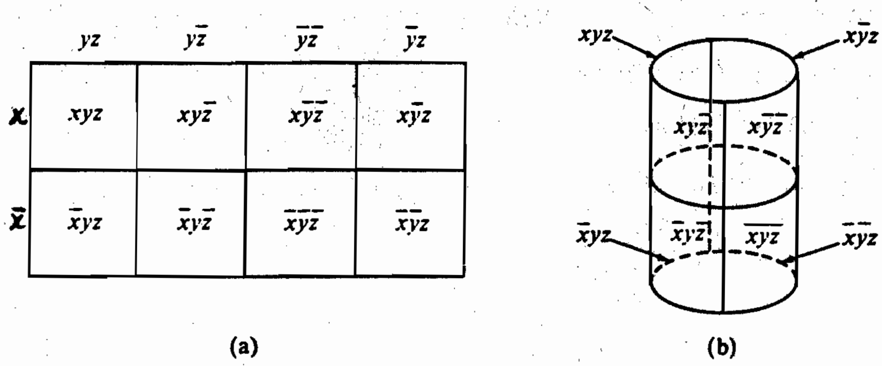
ผลเฉลย การจัดกลุ่ม ของ มินเทอม ที่แสดงในรูปที่ 4 โดยใช้ แผนที่คาร์นาฟ สำหรับ การขยาย เหล่านี้ การขยายน้อยที่สุด สำหรับ ผลบวกของผลคูณ เหล่านี้ คือ

a) y b) $x\bar{y} + \bar{x}y$ c) $\bar{x} + \bar{y}$



รูปที่ 4 จากตัวอย่าง 1 การทำให้ การขยาย ผลบวกของผลคูณ เป็นนิพจน์อย่างง่าย

แผนที่คาร์นาฟ ใน สามตัวแปร คือ รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า แบ่งออกเป็น จตุรัส แปดรูป จัตุรัส แต่ละรูป แทน มินเทอมที่เป็นไปได้แปดเทอม ใน สาม ตัวแปร จัตุรัส สองรูป จะประชิดกัน ถ้ามินเทอมซึ่งมันแทน แตกต่างกันเพียง หนึ่ง literal เท่านั้น วิธีหนึ่ง ของ การก่อรูป แผนที่คาร์นาฟ ใน สามตัวแปร แสดง ให้เห็น ในรูปที่ 5 (a) แผนที่คาร์นาฟนี้ สามารถคิดเป็น รูปทรงกระบอก แสดงในรูป 5 (b) ในรูปทรงกระบอก, จัตุรัส สองรูป จะมี ขอบร่วมกัน ก็ต่อเมื่อมันประชิดกัน



รูปที่ 5 แผนที่คาร์นาฟ ในสามตัวแปร

ในการ simplify การขยายผลบวกของผลคูณ ใน สามตัวแปร เราใช้ แผนที่คาร์นาฟ เพื่อกำหนดบล็อกของ มินเทอม ซึ่ง สามารถรวมกันได้ บล็อกของจัตุรัสประชิดสองรูป แทน คู่ ของ มินเทอม ซึ่ง รวมกันเป็น ผลคูณ ของ สอง literals ; 2 x 2 และบล็อก 4 x 1 ของ จัตุรัส แทน มินเทอม ซึ่งรวมกันเป็น หนึ่ง literal และบล็อก ของ จัตุรัส ทั้ง แปดรูป แทนผลคูณ ซึ่งไม่มี literal ใดๆ กล่าวคือ ฟังก์ชัน 1 ในรูปที่ 6, บล็อก 1 x 2, 2 x 1, 2 x 2, 4 x 1 และ 4 x 2 แสดงให้เห็นผลคูณที่มันแทน

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x				
$\bar{x}$				

$\bar{y}\bar{z} = x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

(a)

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x				
$\bar{x}$				

$\bar{x}z = \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z$

(b)

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$y\bar{z}$
x				
$\bar{x}$				

$\bar{z} = xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$

(c)

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x				
$\bar{x}$				

$x = \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$

(d)

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x				
$\bar{x}$				

$1 = xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$

(e)

รูปที่ 6 บล็อกในแผนที่คาร์นาฟ ใน สามตัวแปร

เป้าหมายคือกำหนดบล็อกที่เป็นไปได้ ขนาดใหญ่ที่สุด ในแผนที่และครอบคลุม 1s ทั้งหมดในแผนที่ ด้วย จำนวน เล็กที่สุดของบล็อก โดยบล็อกที่มีขนาดใหญ่ที่สุด เป็นอันดับแรก ปกติบล็อกที่เป็นไปได้ใหญ่ที่สุด จะถูกเลือก โปรดสังเกตว่า มีมากกว่าหนึ่งวิธี ในการทำสิ่งนี้ ตัวอย่างต่อไปนี้ แสดงให้เห็นว่า แผนที่คาร์นาฟ ใน สามตัวแปร จะใช้ได้อย่างไร

ตัวอย่าง 8 จงใช้แผนที่คาร์นาฟ เพื่อ simplify การขยายผลบวกของผลคูณ ข้างล่างนี้

a) $xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

b) $x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

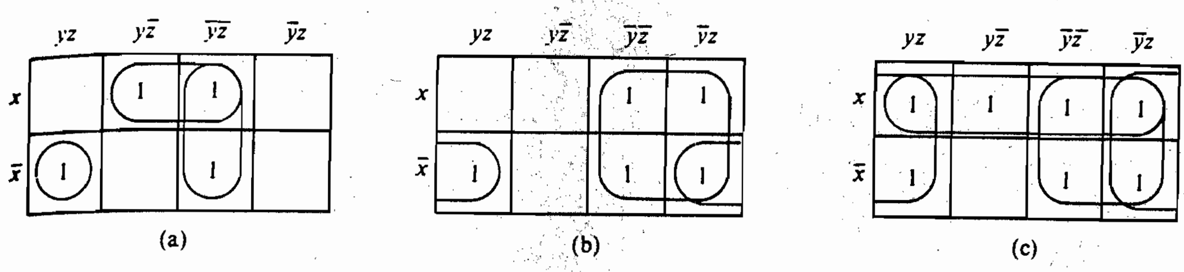
c) $xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

ผลเฉลย แผนที่คาร์นาฟ สำหรับ การขยายผลบวกของผลคูณ เหล่านี้ แสดงให้เห็น ในรูปที่ 7 การจัดกลุ่ม ของ บล็อก แสดงให้เห็นว่าการขยายต่ำสุด ให้เป็น ผลบวกแบบบูล ของ ผลคูณแบบบูล คือ

a) $x\bar{z} + \bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz$

b) $\bar{y} + \bar{x}z$

c) $x + \bar{y} + z$



รูปที่ 7 การใช้แผนที่คาร์นาฟ ใน สามตัวแปร

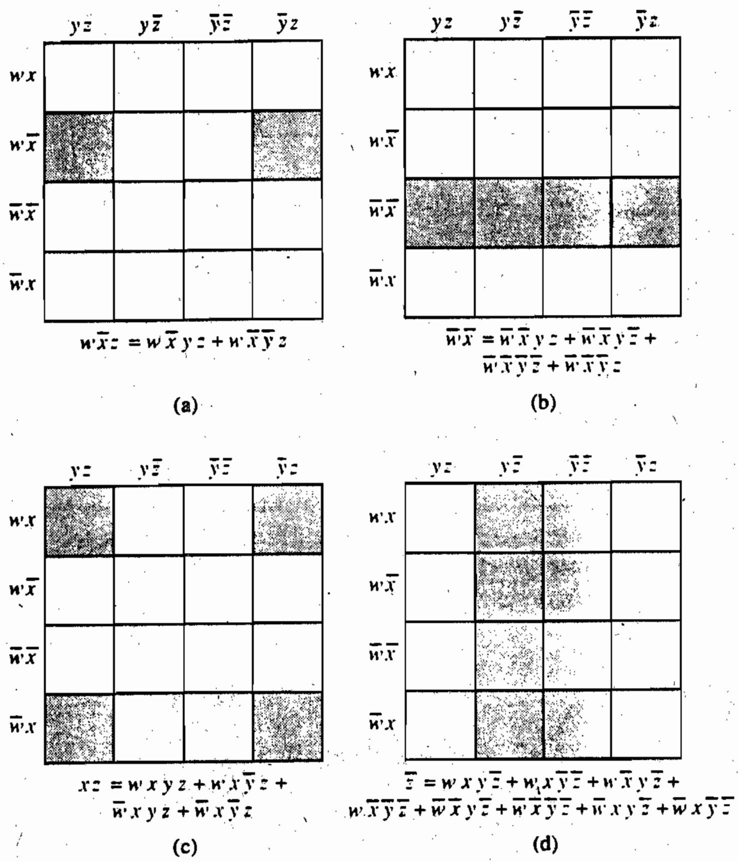
แผนที่คาร์นาฟ ใน สี่ตัวแปร คือ สี่เหลี่ยมจัตุรัส หนึ่งรูป แบ่งออกเป็น จัตุรัส 16 รูป จัตุรัสแต่ละรูป แทน มินเทอมที่เป็นไปได้ 16 เทอม ใน สี่ตัวแปร วิธีหนึ่ง ของ การประกอบเป็นแผนที่คาร์นาฟในสี่ตัวแปร แสดงในรูปที่ 8

จัตุรัส สองรูป ประชิดกันก็ต่อเมื่อ มินเทอมที่มันแทน แตกต่างกันเพียง หนึ่ง literal เพราะฉะนั้น จัตุรัสแต่ละรูป ประชิด กับ จัตุรัสอื่น สี่รูป แผนที่คาร์นาฟ ของ การขยายผลบวกของผลคูณ ใน สี่ตัวแปร จัตุรัส ประชิดกัน มีเขตแดนร่วม

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
wx	$wxyz$	$wxy\bar{z}$	$wx\bar{y}\bar{z}$	$wx\bar{y}z$
$w\bar{x}$	$w\bar{x}yz$	$w\bar{x}y\bar{z}$	$wx\bar{y}\bar{z}$	$w\bar{x}\bar{y}z$
$\bar{w}\bar{x}$	$\bar{w}\bar{x}yz$	$\bar{w}\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{w}\bar{x}\bar{y}z$
$\bar{w}x$	$\bar{w}xyz$	$\bar{w}xy\bar{z}$	$\bar{w}x\bar{y}\bar{z}$	$\bar{w}x\bar{y}z$

รูปที่ 8 แผนที่คาร์นาฟ ใน สี่ตัวแปร

การ simplify การขยายผลบวกของผลคูณ ใน สี่ตัวแปร ทำให้ประสบผลสำเร็จ ได้โดยการกำหนด บล็อก ของ จัตุรัส 2, 4, 8 หรือ 16 รูป แทน มินเทอม ซึ่ง อาจรวมกันได้ จัตุรัสแต่ละรูป แทน มินเทอม ต้องใช้เพื่อก่อรูป ผลคูณ โดยใช้ literal น้อยกว่า หรือรวมเข้าไว้ในการขยาย ในรูปที่ 9 คือตัวอย่างของบล็อก ซึ่งแทนผลคูณของ literal สามตัว, ผลคูณของ literal สองตัว และ literal หนึ่งตัว



รูปที่ 9 บล็อกในแผนที่คาร์นาฟ ใน สี่ตัวแปร

เช่นเดียวกับ กรณี แผนที่คาร์นาฟ ใน สอง และ สามตัวแปร เป้าหมายคือเพื่อกำหนดบล็อกขนาดใหญ่ที่สุด ของ 1s ในแผนที่ และเพื่อครอบคลุม 1s ทั้งหมด โดยใช้บล็อกเล็กที่สุดที่จำเป็น โดยใช้บล็อกใหญ่ที่สุด เป็นสิ่งแรก ปกติจะใช้ บล็อกที่เป็นไปได้ใหญ่ที่สุด ตัวอย่างข้างล่างนี้ แสดงให้เห็นว่า จะใช้ แผนที่คาร์นาฟ ใน สี่ตัวแปร อย่างไร

ตัวอย่าง 4 จงใช้แผนที่คาร์นาฟ เพื่อ simplify การขยายผลบวกของผลคูณ ต่อไปนี้

a) $wxyz + wxy\bar{z} + wx\bar{y}\bar{z} + w\bar{x}yz + w\bar{x}\bar{y}z + w\bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}yz + \bar{w}\bar{x}y\bar{z}$

b) $wx\bar{y}\bar{z} + w\bar{x}yz + w\bar{x}y\bar{z} + w\bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}\bar{z} + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

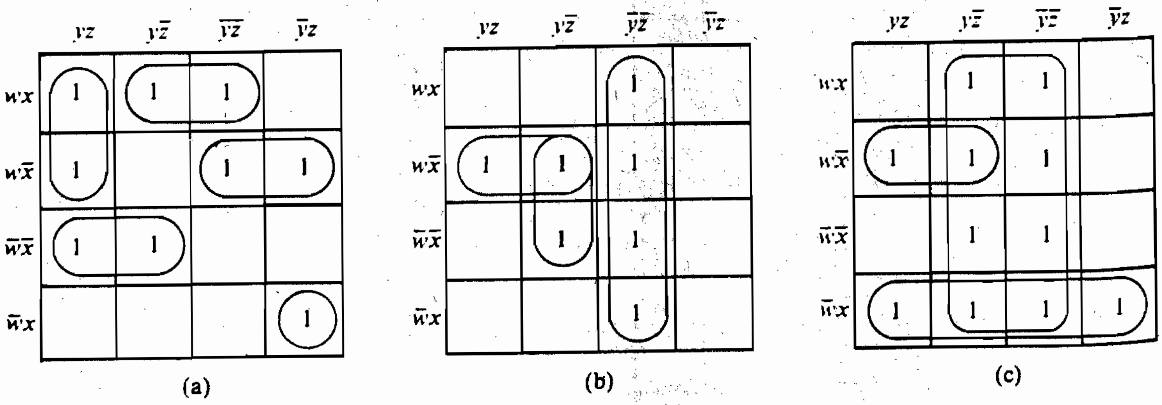
c) $wxy\bar{z} + wx\bar{y}\bar{z} + w\bar{x}yz + w\bar{x}y\bar{z} + w\bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{w}xyz + \bar{w}xy\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

ผลเฉลย แผนที่คาร์นาฟ สำหรับ การขยายเหล่านี้ แสดงในรูปที่ 10 โดยใช้ บล็อกที่แสดง นำไปสู่ ผลบวกของผลคูณ

a) $wyz + wx\bar{z} + w\bar{x}\bar{y} + \bar{w}\bar{x}y + \bar{w}x\bar{y}z$

b) $\bar{y}\bar{z} + w\bar{x}y + \bar{x}y\bar{z}$

c) $\bar{z} + \bar{w}x + w\bar{x}y$



รูปที่ 10 การใช้แผนที่คาร์นาฟ ใน สี่ตัวแปร

เงื่อนไขของ don't care (Don't care conditions)

ในวงจรบางอย่าง เราสนใจเฉพาะเกี่ยวกับเอาต์พุต สำหรับ การรวมกัน ของ ค่าอินพุตบางอย่าง เพราะว่า combination อื่นๆ ของค่าอินพุต ไม่เคยเกิดขึ้นเลย สิ่งนี้ทำให้เรามีอิสระในการสร้าง วงจรอย่างง่ายด้วยเอาต์พุตที่ต้องการ เนื่องจาก ค่าเอาต์พุต สำหรับ combination ทั้งหมด ซึ่งไม่เคยเกิดขึ้น สามารถเลือกได้ ค่าต่างๆ ของฟังก์ชัน สำหรับ combination เหล่านี้ เรียกว่า don't care condition ตัว d ถูกใช้ใน แผนที่คาร์นาฟ เพื่อทำเครื่องหมาย ให้กับ combinations ของค่าต่างๆ ของตัวแปร สำหรับ ฟังก์ชัน ซึ่ง กำหนดเป็น สิ่งใดก็ได้ ในกระบวนการ simplification เราสามารถกำหนดค่า 1s ให้กับ การรวมกันของค่าเอาต์พุต ซึ่งนำไปสู่บล็อกใหญ่ที่สุด ในแผนที่คาร์นาฟ สิ่งนี้แสดงให้เห็น ในตัวอย่างข้างล่างนี้

ตัวอย่าง 5 วิธีหนึ่งของการลงรหัสการขยายเลขฐานสิบ โดยใช้บิต คือ การใช้ สี่บิต ของการขยายเลขฐานสอง ของเลขโดดแต่ละตัว ในการขยายเลขฐานสิบ ตัวอย่างเช่น เลข 873 เข้ารหัสเป็น 100001110011 การเข้ารหัส ของ การขยายเลขฐานสิบนี้ เรียกว่า **การขยายเลขฐานสิบเข้ารหัสฐานสอง** (binary code decimal expansion) เนื่องจาก มี 16 บล็อก ของ สี่บิต และมีเฉพาะเลขฐานสิบ 10 ตัวเท่านั้น จึงมี หก combinations ของ สี่บิต ซึ่ง ไม่จำเป็นต้องเข้ารหัส เลขโดดสมมติว่า วงจรจะ ให้สร้างสำหรับ ให้เอาต์พุต ของ 1 ถ้าเลขโดดฐานสิบ คือ 5 หรือ มากกว่า

ตารางที่ 1

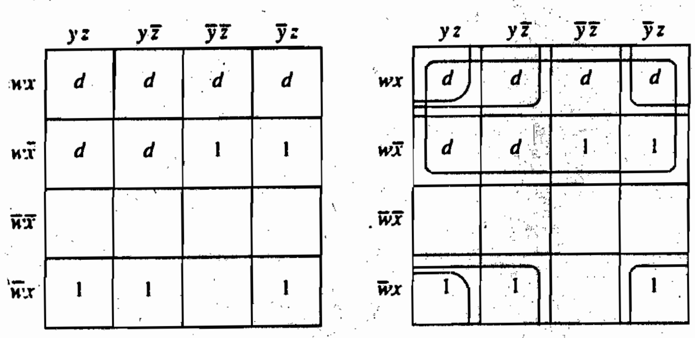
เลขโดด	w	x	y	z	F
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1

และเอาต์พุต ของ 0 ถ้าเลขโดฐานสิบ มีค่าน้อยกว่า 5 วงจรนี้ จะสร้างอย่างง่าย โดยใช้ประตูสัญญาณ OR, ประตูสัญญาณ AND และตัวผกผันอย่างไร?

(How can this circuit be simply built using OR gates, AND gates, and inverters?)

ผลเฉลย ให้ F(w, x, y, z) แทนเอาต์พุต ของวงจร เมื่อ wxyz คือ การขยายฐานสอง (binary expansion) ของเลขโดดฐานสิบ ค่าของ F แสดงในตารางที่ 1 แผนที่คาร์นาฟ ของ F ที่มี d, ในตำแหน่ง don't care แสดงในรูปที่ 11 (a)

เราสามารถ รวม หรือ ไม่รวม สี่เหลี่ยมจัตุรัส ด้วย d, จากบล็อกต่างๆ สิ่งนี้ ให้ทางเลือกที่เป็นไปได้ จำนวนมาก สำหรับบล็อกต่างๆ บล็อกที่แสดง ในรูป 11 (b) ให้ การขยาย ง่ายที่สุด ที่เป็นไปได้ เพราะฉะนั้น $F(w, x, y, z) = w + xy + yz$



รูปที่ 11 แผนที่คาร์นาฟ สำหรับ F แสดงให้เห็นตำแหน่ง don't care

แบบฝึกหัด 8.4

1. a) จงวาดแผนที่คาร์นาฟ สำหรับ ฟังก์ชัน ใน สองตัวแปร และ ให้ 1 ในสี่เหลี่ยมจัตุรัส แทน $\bar{x}y$

   b) จงหา minterms ซึ่งแทน โดย จัตุรัส ซึ่ง ประชิดกับสี่เหลี่ยมจัตุรัสในข้อ a)

2. จงหา การขยายผลบวกของผลคูณ (sum-of-products expansions) ซึ่งแทนโดย แผนที่คาร์นาฟ แต่ละรูป ข้างล่างนี้

	y	$\bar{y}$
x	1	
$\bar{x}$	1	1

(a)

	y	$\bar{y}$
x	1	1
$\bar{x}$		

(b)

	y	$\bar{y}$
x	1	1
$\bar{x}$	1	1

(c)

3. จงวาดแผนที่คาร์นาฟ ของ การขยายผลบวกของผลคูณ ใน สองตัวแปร ข้างล่างนี้

a) $x\bar{y}$ b) $xy + \bar{x}\bar{y}$

c) $xy + x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$

4. จงใช้แผนที่คาร์นาฟ หา การขยายต่ำสุด (minimal expansion) ซึ่งเป็น ผลบวกแบบบูล ของ ผลคูณแบบบูล ของ ฟังก์ชันแต่ละชุด ข้างล่างนี้ ของตัวแปร x และ y

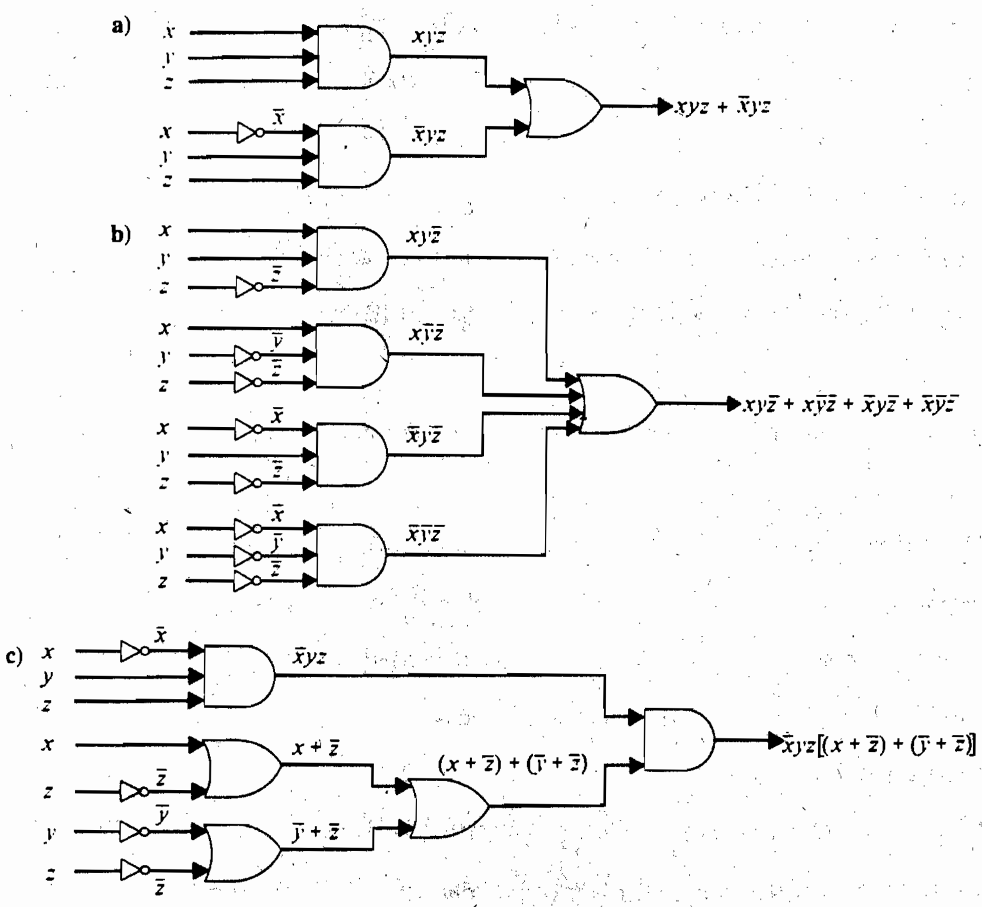
a) $\bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$ b) $xy + x\bar{y}$

c) $xy + x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$

5. a) จงวาดแผนที่คาร์นาฟ สำหรับ ฟังก์ชัน สามตัวแปร แล้วใส่เลข 1 ใน จัตุรัส ซึ่งแทน $\bar{x}y\bar{z}$

b) มินเทอมตัวใดบ้าง ซึ่งแทนโดยจัตุรัสประชิดกับจัตุรัสในข้อ (a)

6. จงใช้แผนที่คาร์นาฟ หา วงจรง่ายกว่า (simpler circuits) ด้วย เอาต์พุต เหมือนกับ วงจรแต่ละชุด ข้างล่างนี้



7. จงวาดแผนที่คาร์นาฟ ของ การขยาย ผลบวกของผลคูณ ในสามตัวแปร ข้างล่างนี้

a) $x\bar{y}\bar{z}$ b) $\bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

c) $xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$

8. จงใช้แผนที่คาร์นาฟ หา การขยายต่ำสุด ซึ่งเป็น ผลบวกแบบบูล ของ ผลคูณแบบบูล ของ ฟังก์ชันแต่ละชุด ใน ตัวแปร x, y และ z ข้างล่างนี้

a) $\bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z$ b) $xyz + xy\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z}$

c) $xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z$ d) $xyz + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

9. a) จงวาดแผนที่คาร์นาฟ สำหรับฟังก์ชัน ใน สี่ตัวแปร แล้ว ใส่เลข 1 ในจัตุรัส ซึ่งแทน wxyz

b) มินเทอม ชุดใดบ้าง ซึ่งแทนจัตุรัส ประชิด กับ จัตุรัสนี้

10. จงใช้แผนที่คาร์นาฟ หา การขยายต่ำสุด ซึ่งเป็นผลบวกแบบบูล ของ ผลคูณแบบบูล ของ ฟังก์ชัน แต่ละชุด ข้างล่างนี้ ในตัวแปร w, x, y, และ z

a) $wxyz + wx\bar{y}z + wx\bar{y}\bar{z} + w\bar{x}y\bar{z} + w\bar{x}\bar{y}z$

b) $wxy\bar{z} + wx\bar{y}z + w\bar{x}yz + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z$

c) $wxyz + wxy\bar{z} + wx\bar{y}z + w\bar{x}\bar{y}z + w\bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z$

d) $wxyz + wxy\bar{z} + wx\bar{y}z + w\bar{x}yz + w\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}xyz + \bar{w}\bar{x}yz + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z$

11. a) แผนที่คาร์นาฟ ที่มี ห้าตัวแปร จะมีจัตุรัส กี่รูป?

(How many squares does a Karnaugh map in five variables have?)

b) จัตุรัส ซึ่ง ประชิด กับ จัตุรัสที่กำหนดให้ 1 รูป ใน แผนที่คาร์นาฟ ใน ห้าตัวแปร มีทั้งหมดกี่รูป?

(How many squares are adjacent to a given square in a Karnaugh map in five variables?)

12. จงใช้แผนที่คาร์นาฟ หา การขยายต่ำสุด ซึ่ง เป็นผลบวกแบบบูลของผลคูณแบบบูล ของ ฟังก์ชันแบบบูล มี อินพุตเป็น รหัสฐานสอง สำหรับ เลขโดดฐานสิบแต่ละตัว และให้ เอาต์พุต เป็นเลข 1 ก็ต่อเมื่อ เลขโดด ซึ่งสมนัยกับ อินพุต คือ

a) เลขคี่ b) หารด้วย 3 ไม่ลงตัว

c) ไม่ใช่เลข 4, 5 หรือ 6

13. สมมติว่า คณะกรรมการชุดหนึ่ง ประกอบด้วยสมาชิก ห้าคน แต่ Smith และ Johns ปกติ จะออกเสียงลงคะแนน (vote) ตรงกันข้ามกับ Marcus จงออกแบบวงจร ซึ่ง ทำให้ การ ออกเสียง ลงคะแนนส่วนใหญ่ ของคณะกรรมการ โดยใช้ ความสัมพันธ์ ระหว่าง คะแนน เหล่านี้ มีผลในทางปฏิบัติ

แบบฝึกหัดเสริม

1. ค่าต่างๆ ของตัวแปรแบบบูล x, y และ z ชุดใดบ้างที่ทำให้

   a) $x + y + z = xyz$

   b) $x(y + z) = x + yz$

   c) $\overline{x}\ \overline{y}\ \overline{z} = x + y + z$

2. ให้ x และ y อยู่ในเซต {0, 1} มีความจำเป็นหรือไม่ ที่ x = y ถ้ามี z หนึ่งค่าอยู่ใน {0,1} ซึ่งทำให้

   a) $xz = yz$

   b) $x + z = y + z$

   c) $x \oplus z = y \oplus z$

   d) $x \downarrow z = y \downarrow z$

   e) $x \mid z = y \mid z$

ฟังก์ชันแบบบูล F จะเรียกว่า **คู่เสมอกันของตัวมันเอง** (self-dual) ก็ต่อเมื่อ

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \overline{F(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})}$$

3. ฟังก์ชันข้างล่างนี้ ชุดใดบ้าง เป็น คู่เสมอกันกับตัวมันเอง

   a) $F(x, y) = x$

   b) $F(x, y) = xy + \overline{x}\ \overline{y}$

   c) $F(x, y) = x + y$

   d) $F(x, y) = xy + \overline{x}y$

4. สำหรับสมการข้างล่างนี้ ให้พิสูจน์ว่า แต่ละชุดเป็นเอกลักษณ์ (identity) หรือ จงหา เซตของค่าต่างๆ ของตัวแปร ซึ่งแสดงว่า มันไม่เป็นจริง

   a) $x \mid (y \mid z) = (x \mid y) \mid z$

   b) $x \downarrow (y \downarrow z) = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow z)$

   c) $x \downarrow (y \mid z) = (x \downarrow y) \mid (x \downarrow z)$

   นิยามของ ตัวดำเนินการแบบบูล $\odot$ เป็นดังนี้

   $1 \odot 1 = 1$

   $1 \odot 0 = 0$

   $0 \odot 1 = 0$

   และ $0 \odot 0 = 1$

5. จงแสดงให้เห็นว่า $x \odot y = xy + \overline{x}\ \overline{y}$

6. จงแสดงให้เห็นว่า $x \odot y = \overline{(x \oplus y)}$

7. จงแสดงให้เห็นว่า เอกลักษณ์แต่ละชุด ข้างล่างนี้เป็นจริง

a) $x \odot x = 1$

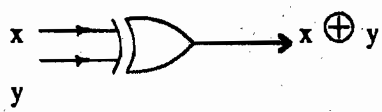
b) $x \odot \overline{x} = 0$

c) $x \odot y = y \odot x$

8. สมการข้างล่างนี้ เป็นจริงเสมอไป หรือไม่?

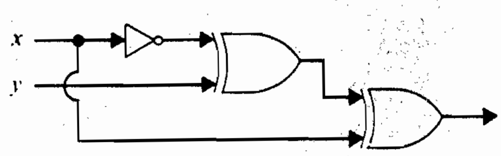
$$(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$$

สัญกรณ์ สำหรับ ประตูสัญญาณ XOR ซึ่งให้เอาต์พุต $x \oplus y$ จาก x และ y เป็นดังนี้ :

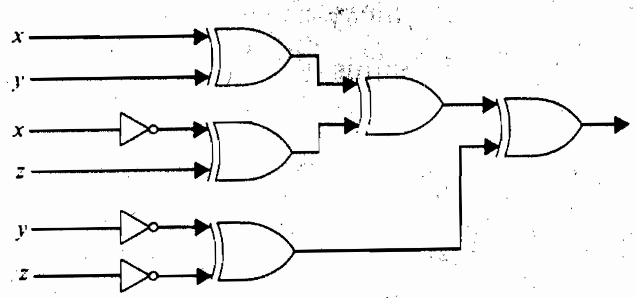


9. จงหา เอาต์พุตของวงจรแต่ละชุดข้างล่างนี้

a)



b)



จงเขียนโปรแกรมที่มีอินพุต และ เอาต์พุต ข้างล่างนี้

1. กำหนดค่าต่างๆ ของ ตัวแปรแบบบูล สองตัวคือ x และ y จงหาค่าของ $x + y$, xy, $x \oplus y$, $x \mid x$ และ $x \downarrow y$
2. จงสร้างตาราง ซึ่งมีรายการแสดง เซต ของค่าต่างๆ ของ ฟังก์ชันแบบบูล ทั้งหมด 256 ชุด ของงองศาเท่ากับ 3

   (Construct a table listing the set of values of all 256 Boolean functions of degree 3.)
3. กำหนดค่าต่างๆ ของฟังก์ชันแบบบูล ใน n ตัวแปร เมื่อ n คือ จำนวนเต็มบวก จงสร้าง การขยายผลบวกของผลคูณ ของ ฟังก์ชันนี้

   (Given the values of a Boolean function in n variables, where n is a positive integer, construct the sum-of-products expansion of this function.)
4. กำหนดตารางของค่าต่างๆ ของ ฟังก์ชันแบบบูล จงแสดงฟังก์ชันนี้ โดยใช้เฉพาะ ตัวดำเนินการ $\cdot$ และ $\overline{}$

   (Given the table of values of a Boolean functon, express this function using only the operators $\cdot$ and $\overline{}$.)
5. กำหนดตารางของค่าต่างๆ ของ ฟังก์ชันแบบบูล จงแสดงฟังก์ชันนี้ ใช้เฉพาะตัวดำเนินการ + และ $\overline{}$
6. กำหนดตารางของค่าต่างๆ ของ ฟังก์ชันแบบบูล จงแสดงฟังก์ชันนี้ ใช้เฉพาะตัวดำเนินการ $\mid$
7. กำหนดตารางของค่าต่างๆ ของ ฟังก์ชันแบบบูล จงแสดงฟังก์ชันนี้ ใช้เฉพาะตัวดำเนินการ $\downarrow$
8. กำหนดตารางของค่าต่างๆ ของ ฟังก์ชันแบบบูล ขององศาเท่ากับ 3 จงสร้างแผนที่คาร์นาฟ
9. กำหนดตารางของค่าต่างๆ ของ ฟังก์ชันแบบบูล ขององศาเท่ากับ 4 จงสร้างแผนที่คาร์นาฟ