บทที่ 2
ความสัมพันธ์
(Relations)

2.1 ความสัมพันธ์ทวิภาค (Binary Relation)

วิธีตรงมากที่สุดในการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกของสองเซตคือการใช้คู่อันดับ ซึ่งประกอบขึ้นจากสมาชิกสองตัวที่มีความสัมพันธ์กัน ด้วยเหตุผลนี้ เซตของคู่อันดับจึงเรียกว่า ความสัมพันธ์ทวิภาค

บทนิยาม ให้ A และ B เป็นเซต ความสัมพันธ์ทวิภาคจาก A ไป B หมายถึงเซตย่อยของ $A \times B$

(Let A and B be sets. A **binary relation** from A to B is a subset of $A \times B$.)

ให้ R เป็นความสัมพันธ์ จาก A ไป B จะได้ $R \subseteq A \times B$

พูดอีกอย่างหนึ่งคือ ความสัมพันธ์ทวิภาคจาก A ไป B หมายถึง เซตของคู่อันดับซึ่งสมาชิกตัวแรกของคู่อันดับแต่ละชุดมาจากเซต A และสมาชิกตัวที่สองมาจากเซต B เราใช้สัญลักษณ์ aRb เพื่อแสดงว่า $(a, b) \in R$ และใช้ $a \not R b$ เพื่อแสดงว่า $(a, b) \notin R$ นอกจากนี้แล้ว เมื่อ (a, b) อยู่ใน R เรียกว่า a เกี่ยวข้องกับ b ด้วย ความสัมพันธ์ R (a is said to be related to b by R)

ตัวอย่าง 1 ให้ A เป็นเซตของนักศึกษาในชั้นเรียนแห่งหนึ่ง และ B เป็นเซตของกระบวนวิชาที่เปิดสอน ให้ R เป็นความสัมพันธ์ ซึ่งประกอบด้วย คู่อันดับ (a, b) เมื่อ a เป็นนักศึกษา ซึ่งลงทะเบียนวิชา b

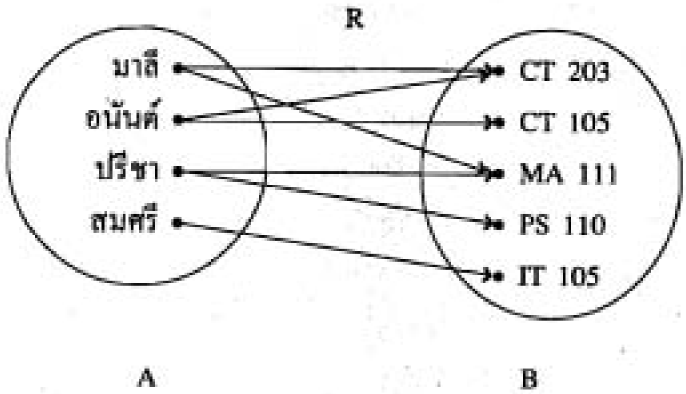
ความสัมพันธ์อาจแทนด้วยตารางข้างล่างนี้

นักศึกษา	กระบวนวิชา
มาลี	CT 203
มาลี	MA 111
อนันต์	CT 105
ปรีชา	MA 111
ปรีชา	PS 110
สมศรี	IT 105
อนันต์	CT 203

หรือแสดงด้วยเซตของคู่อันดับดังนี้

R = {(มาลี, CT 203), (มาลี, MA 111), (อนันต์, CT 105), (ปรีชา, MA 111), (ปรีชา, PS 110), (สมศรี, IT 105), (อนันต์, CT 203)}

หรือแทนด้วยรูปภาพดังนี้



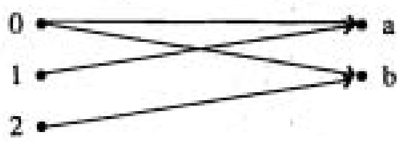
ตัวอย่าง 2 ให้ A = {0, 1, 2}, B = {a, b}

R เป็นความสัมพันธ์ จาก A ไป B

R = {(0, a), (0, b), (1, a), (2, b)}

จะเห็นว่า 0Ra แต่ $1 \not R b$

ความสัมพันธ์อาจแทนด้วยกราฟโดยใช้ลูกศรเพื่อแทนคู่อันดับ



หรือแทนความสัมพันธ์โดยการใช้ตาราง

R	a	b
0	x	x
1	x	
2		x

โดเมน (Domain) ของ R ใช้สัญลักษณ์ Dom (R) หมายถึง เซตของสมาชิกในเซต A ซึ่งสัมพันธ์กับสมาชิกบางตัวใน B พูดอีกอย่างหนึ่งคือ Dom (R) เป็นเซตย่อยของ A นั่นคือ เป็นเซตของสมาชิกตัวแรกทั้งหมดในคู่อันดับซึ่งเกิดขึ้นใน R ดังนั้น

$$\text{Dom }(R) = \{a \in A \mid (a, b) \in R \text{ for some } b \in B\}$$

พิสัย (Range) ของ R ใช้สัญลักษณ์ Ran (R) หมายถึง เซตของสมาชิกใน B ซึ่งเป็นสมาชิกตัวที่สองในคู่อันดับต่างๆ ใน R นั่นคือ สมาชิกทั้งหมดใน B ซึ่งสัมพันธ์กับสมาชิกบางตัวใน A หรือ พิสัยของ R เป็นเซตย่อยของ B

$$\text{Ran }(R) = \{b \in B \mid (a, b) \in R \text{ for some } a \in A\}$$

ถ้าความสัมพันธ์แทนด้วยตาราง โดเมนของ R จะประกอบด้วยสมาชิกทั้งหมดในสดมภ์แรกและพิสัยของ R จะประกอบด้วยสมาชิกทั้งหมดในสดมภ์ที่สอง

ตัวอย่าง 8 ให้ A = {2, 3, 4}, B = {3, 4, 5, 6, 7}
ถ้าเรานิยามความสัมพันธ์ R จาก A ไป B ดังนี้

(a, b) ∈ R ถ้า a หาร b ลงตัว

R	3	4	5	6	7
2		x		x	
3	x			x	
4		x			

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} R &= \{(2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\} \\ \text{Dom }(R) &= \{2, 3, 4\} \\ \text{Ran }(R) &= \{3, 4, 6\} \end{aligned}$$

2.2 ความสัมพันธ์บนเซต (Relations on a Set)

ความสัมพันธ์จากเซต A ไปยังตัวมันเองหรือความสัมพันธ์ของสมาชิกซึ่งอยู่ในเซตเดียวกัน

บทนิยาม ความสัมพันธ์บนเซต A หมายถึงความสัมพันธ์จาก A ไป A
(A relation on the set A is a relation from A to A.)

หรือพูดอีกอย่างหนึ่งว่า ความสัมพันธ์บนเซต A หมายถึงเซตย่อยของ $A \times A$

ตัวอย่าง 1 ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ จงหาคู่อันดับทั้งหมด ในความสัมพันธ์

$R = \{(a, b) \mid a \text{ divides } b\}$

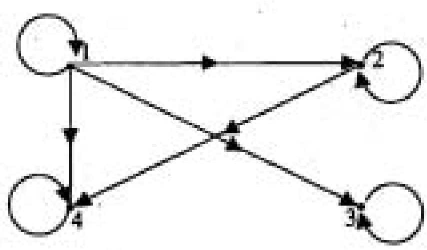
ผลเฉลย

R	1	2	3	4		
1	x	x	x	x		
2		x		x		
3			x			
4				x		

$R = \{(1, 1), (1,2), (1,3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3)\ (4, 4)\}$

และ Dom (R) = Ran (R) = A

อีกวิธีหนึ่ง ในการแทนความสัมพันธ์บนเซตคือวาดรูปกราฟระบุทิศทางหรือไดกราฟ (directed graph หรือ digraph) ของความสัมพันธ์ โดยกำหนดให้ จุด (vertices) หรือ วงกลม (circles) แทนสมาชิกของเซต A ถ้าสมาชิก (a, b) อยู่ในความสัมพันธ์ R ให้ลากลูกศรเรียกว่าเส้นระบุทิศทาง (directed edge) จากจุด a ไป b จากตัวอย่างข้างต้นรูปไดกราฟเป็นดังนี้



โปรดสังเกตว่า สมาชิกในรูปแบบ (a, a) ในความสัมพันธ์สมนัยกับเส้นมีทิศทางหนึ่งเส้นจาก a ไป a เส้นลักษณะนี้เรียกว่า วงวน (loop)

ตัวอย่าง 2 ให้ R เป็นความสัมพันธ์บนเซต X = {a, b, c, d} กำหนดโดยไดกราฟข้างล่างนี้ จงเขียนรายการคู่อันดับซึ่งเป็นสมาชิกของ R

ตัวอย่าง 3 จงพิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้บนเซตของจำนวนเต็ม

ความสัมพันธ์ชุดใดบ้างซึ่งประกอบด้วยแต่ละชุดของคู่อันดับ (1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, -1)

ตัวอย่าง 4 จงคำนวนหาจำนวนของความสัมพันธ์บนเซต ซึ่งมีสมาชิก n ตัว (How many relations are there on a set with n elements?)

ผลเฉลย ความสัมพันธ์บนเซต A หมายถึงเซตย่อยของ $A \times A$

$|A \times A| = |A|\cdot|A|$

$= n\cdot n = n^2$

เนื่องจาก $A \times A$ มีสมาชิก $= n^2$ ตัว

และเซตที่มีสมาชิก n ตัว จะมีเซตย่อย 2^n ชุด

เพราะฉะนั้น A × A จะมีเซตย่อย $2^{(n^2)}$ ชุด

ดังนั้น เซตที่มีสมาชิก n ตัว จะมีจำนวนของความสัมพันธ์ได้ เท่ากับ 2^{n^2} ชุด

2.3 คุณสมบัติของความสัมพันธ์

(Properties of Relations)

มีคุณสมบัติหลายอย่างที่ใช้ในการจำแนกความสัมพันธ์บนเซต สิ่งที่สำคัญมากที่สุดคือ ในความสัมพันธ์บางอย่าง สมาชิกปกติจะสัมพันธ์กับตัวมันเอง ตัวอย่างเช่น ให้ R เป็นความสัมพันธ์บนเซตของผู้คนทั้งหมด ประกอบด้วยคู่อันดับ (x, y) เมื่อ x และ y มี พ่อคนเดียวกันและมีแม่คนเดียวกัน ดังนั้น xRx สำหรับมนุษย์ x ทุกคน

บทนิยาม ความสัมพันธ์ R บนเซต A จะเรียกว่า **ความสัมพันธ์สะท้อน** ถ้าคู่อันดับ $(a, a) \in R$ สำหรับสมาชิกทุกตัว $a \in A$

(A relation R on a set A is called **reflexive** if $(a, a) \in R$ for every element $a \in A$.)

พูดอีกอย่างหนึ่งคือ ความสัมพันธ์บนเซต A จะเป็นการสะท้อน ถ้าสมาชิกทุกตัวของเซต A มีความสัมพันธ์กับตัวมันเอง

ความสัมพันธ์ R บนเซต A จะเรียกว่า **ความสัมพันธ์ไม่สะท้อน** ถ้าสมาชิกทุกตัวในเซต A ไม่มีความสัมพันธ์กับตัวมันเอง

(A relation R on the set A is **irreflexive** if every $a \in A$, $(a, a) \notin R$.)

ตัวอย่าง 1 จงพิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้ บนเซต {1, 2, 3, 4}

$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$

$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$

$R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$

$R_4 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$

$R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (1\ 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$

$R_6 = \{(3, 4)\}$

ความสัมพันธ์ชุดใดเป็นสะท้อนและชุดใดบ้างเป็นไม่สะท้อน

ผลเฉลย ความสัมพันธ์ R_3 และ R_5 เป็นความสัมพันธ์สะท้อน เพราะว่า ทั้งคู่มีคู่อันดับทั้งหมดในรูปแบบ (a, a) ได้แก่ (1, 1), (2, 2), (3, 3) และ (4, 4) ส่วนความสัมพันธ์ R_1, R_2, R_4 และ R_6 ไม่ใช่สะท้อน (is not reflexive) ความสัมพันธ์ R_4, R_6 เป็นไม่สะท้อน (irrflexive) ความสัมพันธ์ R_1, R_2, R_3, R_5 ไม่ใช่ไม่สะท้อน (is not irreflexive) จะเห็นว่า R_1 และ R_2 ไม่ใช่สะท้อน และไม่ใช่ไม่สะท้อนด้วย

ตัวอย่าง 2 จงคำนวณหาจำนวนของความสัมพันธ์สะท้อนบนเซต ที่มีสมาชิก n ตัว (How many reflexive relations are there on a set with n elements?)

ผลเฉลย ความสัมพันธ์ R บนเซต A คือ เซตย่อยของ A × A ดังนั้น ความสัมพันธ์คำนวณจากคู่อันดับใดบ้างของคู่อันดับทั้งหมด n^2 คู่ ใน A × A

อย่างไรก็ตาม ถ้า R เป็นความสะท้อน คู่อันดับแต่ละชุด (a, a) จำนวน n คู่ สำหรับ (a, a) ∈ A ต้องอยู่ใน R คู่อันดับแต่ละคู่อื่น ๆ จำนวน n(n - 1) คู่ ในรูปแบบ (a, b) เมื่อ a ≠ b อาจจะอยู่ใน R หรืออาจจะไม่อยู่ใน R

ดังนั้น จากกฎผลคูณ ของการนับจำนวนจะมีความสัมพันธ์สะท้อนจำนวน $2^{n(n-1)}$ ชุด (หมายถึงจำนวนวิธีในการเลือกว่า สมาชิก (a, b) แต่ละคู่ ซึ่ง a ≠ b อยู่ใน R หรือไม่)

ตัวอย่าง 3 ให้ A = {1, 2}, |A| = 2, n = 2

ความสัมพันธ์สะท้อนมี $2^{n(n-1)} = 2^{2(2-1)} = 2^2 = 4$ ชุด

และมีความสัมพันธ์ทั้งหมด = $2^{n^2} = 2^{2^2} = 2^4 = 16$ ชุด

แสดงรายละเอียดดังนี้

แสดงรายละเอียดดังนี้	Reflexive	Irreflexive
R_1 = {(1, 1), (2, 2)}	✓	✗
R_2 = {(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1)}	✓	✗
R_3 = {(1, 2)}	✗	✓
R_4 = {(1, 1), (1, 2)}	✗	✗
R_5 = {(2, 1), (2, 2)}	✗	✗
R_6 = {(1, 1), (2, 1), (2, 2)}	✓	✗
R_7 = {(1, 2), (2, 1)}	✗	✓
R_8 = {(1, 1), (2, 1)}	✗	✗
R_9 = {(1, 1), (1, 2), (2, 2)}	✓	✗
R_{10} = {(2, 2), (1, 2)}		

$R_{11} = \{(2, 1)\}$
$R_{12} = \{(1, 1)\}$
$R_{13} = \{(2, 2)\}$
$R_{14} = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$
$R_{15} = \phi$
$R_{16} = \{(1, 2), (2, 1), (1, 1)\}$

ความสัมพันธ์บางอย่าง สมาชิกตัวหนึ่งจะสัมพันธ์กับสมาชิกตัวที่สองก็ต่อเมื่อสมาชิกตัวที่สองสัมพันธ์กับสมาชิกตัวที่หนึ่งด้วย ตัวอย่างเช่น ความสัมพันธ์ซึ่งประกอบด้วยคู่อันดับ (x, y) เมื่อ x และ y เป็นนักศึกษาในมหาวิทยาลัยรามคำแหงที่มีคุณสมบัติว่าเคยลงทะเบียนเรียนกระบวนวิชาเดียวกันอย่างน้อยที่สุดหนึ่งวิชา

ความสัมพันธ์อีกชนิดหนึ่งมีคุณสมบัติว่าถ้าสมาชิกตัวที่หนึ่งสัมพันธ์กับสมาชิกตัวที่สองแล้ว สมาชิกตัวที่สองจะต้องไม่สัมพันธ์กับสมาชิกตัวที่หนึ่ง ตัวอย่างเช่น ความสัมพันธ์ที่ประกอบด้วยคู่อันดับ (x, y) เมื่อ x และ y เป็นนักศึกษาในมหาวิทยาลัยรามคำแหง x มีเกรดเฉลี่ยสูงกว่า y ดังนั้น y จึงไม่มีคุณสมบัตินี้

บทนิยาม ความสัมพันธ์ R บนเซต A จะเรียกว่า **ความสัมพันธ์สมมาตร** ถ้าคู่อันดับ $(b, a) \in R$ ตราบใดที่คู่อันดับ $(a, b) \in R$ สำหรับ $a, b \in A$

(A relation R on a set A is called **symmetric** if $(b, a) \in R$ whenever $(a, b) \in R$, for $a, b \in A$.)

ความสัมพันธ์ R บนเซต A โดยที่ $(a, b) \in R$ และ $(b, a) \in R$ ก็ต่อเมื่อ $a = b$ สำหรับ $a, b \in A$ เรียกว่า **ความสัมพันธ์ปฏิสมมาตร**

(A relation R on a set A such that $(a, b) \in R$ and $(b, a) \in R$ only if $a = b$, for $a, b \in A$, is called **antisymmetric.**)

นั่นคือ ความสัมพันธ์เป็นสมมาตร ก็ต่อเมื่อ ถ้า a สัมพันธ์กับ b แสดงว่า b สัมพันธ์กับ a

ความสัมพันธ์เป็นปฏิสมมาตร ก็ต่อเมื่อไม่มีคู่อันดับใด ๆ เลยที่สมาชิก a ซึ่งแตกต่างกับ b โดยที่ a สัมพันธ์กับ b และ b สัมพันธ์กับ a

คำว่าสมมาตรและปฏิสมมาตร ไม่ใช่คำตรงกันข้ามกัน (are not opposites) เพราะว่าความสัมพันธ์ใด ๆ อาจจะเป็นทั้งสมมาตรและปฏิสมมาตรทั้งคู่ หรือไม่ใช่สมมาตร และไม่ใช่ปฏิสมมาตรทั้งคู่

ความสัมพันธ์ใด ๆ จะไม่สามารถเป็นสมมาตรและเป็นปฏิสมมาตรทั้งคู่ ถ้าความสัมพันธ์นั้น มีคู่อันดับบางคู่ในรูปแบบ (a, b) โดยที่ $a \neq b$

ตัวอย่าง 4 จากตัวอย่างที่ 1 หน้า 51 ความสัมพันธ์ชุดใดบ้างเป็นสมมาตร และชุดใดบ้างเป็นปฏิสมมาตร

ผลเฉลย

R_2 และ R_3 เป็นความสัมพันธ์สมมาตร

R_4, R_5 และ R_6 เป็นความสัมพันธ์ปฏิสมมาตร

ตัวอย่าง 5 ให้ $R = \{(a, a), (b, c), (c, b), (d, d)\}$ เป็นความสัมพันธ์สมมาตร บนเซต $X = \{a, b, c, d\}$ เพราะว่า ไดกราฟของความสัมพันธ์มีคุณสมบัติว่าตราบใดที่มีเส้นระบุทิศทางจาก b ไป c จะต้องมีเส้นระบุทิศทางจาก c ไป b ด้วย

ตัวอย่าง 6 ความสัมพันธ์ "divides" บนเซตของจำนวนเต็มบวกเป็นสมมาตรหรือไม่? เป็นปฏิสมมาตรหรือไม่?"

ผลเฉลย ความสัมพันธ์นี้ไม่ใช่สมมาตร เพราะว่า $1 | 2$ แต่ $2 \nmid 1$

ความสัมพันธ์นี้ เป็นปฏิสมมาตร เพราะว่า ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $a | b$ และ $b | a$ จะได้ว่า $a = b$

ความสัมพันธ์ R จะเรียกว่า **ความสัมพันธ์อสมมาตร** ถ้าคู่อันดับ $(a, b) \in R$ แสดงว่า $(b, a) \notin R$

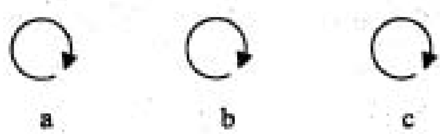
(A relation R is called **asymmetric** if $(a, b) \in R$ then $(b, a) \notin R$.)

ไดกราฟของความสัมพันธ์ปฏิสมมาตรมีคุณสมบัติว่า ระหว่างสองจุดใดๆ จะมีเส้นเชื่อมอย่างมากที่สุดหนึ่งเส้น

ถ้าความสัมพันธ์ R บนเซต X ไม่มีสมาชิกใดๆ เลยในรูปแบบ (x, y) โดยที่ $x \neq y$ ดังนั้น R เป็นความสัมพันธ์ปฏิสมมาตร

ตัวอย่าง 7 ให้ $R = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ เป็นความสัมพันธ์บน $X = \{a, b, c\}$

ดังนั้น R เป็นปฏิสมมาตร ในกรณีนี้ ถ้า x และ y เป็นสมาชิกในเซต X ประพจน์ if $(x, y) \in R$ and $x \neq y$ then $(y, x) \notin R$ เป็นจริงเพราะว่าสมมติฐาน (hypothesis) เป็นเท็จ



จากรูปไดกราฟของ R จะเห็นว่าความสัมพันธ์ R เป็นสะท้อนและเป็นสมมาตร

ให้ R เป็นความสัมพันธ์ประกอบด้วยคู่อันดับทั้งหมด (x, y) ของนักศึกษาในมหาวิทยาลัยรามคำแหง เมื่อ x สอบได้จำนวนหน่วยกิตมากกว่า y สมมติว่า x สัมพันธ์กับ y และ y สัมพันธ์กับ z สิ่งนี้หมายความว่า x มีหน่วยกิตมากกว่า y และ y มีหน่วยกิตมากกว่า z แสดงว่า x สัมพันธ์กับ z สิ่งที่กล่าวมานี้คือคุณสมบัติการถ่ายทอด

บทนิยาม ความสัมพันธ์ R บนเซต A จะเรียกว่า **ความสัมพันธ์ถ่ายทอด** ถ้าเมื่อใดก็ตามที่ $(a, b) \in R$ และ $(b, c) \in R$ จะได้ $(a, c) \in R$ สำหรับ $a, b, c \in A$

(A relation R on a set A is called **transitive** if whenever $(a, b) \in R$ and $(b, c) \in R$ then $(a, c) \in R$, for $a, b, c \in A$.)

ตัวอย่าง 8 จากตัวอย่าง 1 หน้า 51 ความสัมพันธ์ชุดใดบ้างเป็นถ่ายทอด

ผลเฉลย

R_4, R_5 และ R_6 เป็นความสัมพันธ์ถ่ายทอด

ตัวอย่าง 9 ความสัมพันธ์ "divides" บนเซตของจำนวนเต็มบวกเป็นความสัมพันธ์ถ่ายทอดหรือไม่?

ผลเฉลย สมมติว่า a divides b และ b divides c

ให้ k และ l เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

จะได้ $b = ak$ และ $c = bl$

ดังนั้น $c = akl$ แสดงว่า a divides c

ความสัมพันธ์นี้จึงเป็นถ่ายทอด

ให้ R เป็นความสัมพันธ์จากเซต A ไปเซต B **ความสัมพันธ์ผกผัน** จาก B ไป A ใช้สัญลักษณ์ R^{-1} หมายถึงเซตของคู่อันดับ $\{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$

(Let R be a relation from a set A to a set B. The **inverse relation** from B to A, denoted by R^{-1}, is the set of ordered pair $\{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$.)

ความสัมพันธ์เติมเต็ม $\bar{R}$ หมายถึง เซตของคู่อันดับ $\{(a, b) \mid (a, b) \notin R\}$

(The **complementary relation** $\bar{R}$ is the set of ordered pair $\{(a, b) \mid (a, b) \notin R\}$.)

ตัวอย่าง 10 ให้

ผลเฉลย $R \subseteq X \times Y$ $|X \times Y| = |X| \cdot |Y| = 3.5 = 15$ ชุด

2.4 การรวมความสัมพันธ์ (Combining Relations)

เนื่องจากความสัมพันธ์จาก A ไป B เป็นเซตย่อยของ $A \times B$ ดังนั้น ความสัมพันธ์สองชุด จาก A ไป B สามารถรวมกัน (combined) ได้ในวิธีเดียวกับการรวมสองเซต

ตัวอย่างที่ 1

บทนิยาม ให้ R_1 เป็นความสัมพันธ์จากเซต X ไปเซต Y และ R_2 เป็นความสัมพันธ์จากเซต Y ไปเซต Z การประกอบของความสัมพันธ์ R_1 และ R_2 ใช้สัญลักษณ์ $R_2 \circ R_1$ หมายถึงความสัมพันธ์ จาก X ไป Z นิยามดังนี้

$$R_2 \circ R_1 = \{(x, z) \mid (x, y) \in R_1 \text{ and } (y, z) \in R_2 \text{ for some } y \in Y\}$$

ตัวอย่าง 2 ให้

จงหาการประกอบของความสัมพันธ์ R_1 และ R_2

$$R_2 \circ R_1 = \{(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1)\}$$

กำลังของความสัมพันธ์ R สามารถนิยามเชิงอุปนัยได้จาก บทนิยามของการประกอบของความสัมพันธ์สองชุด

$R^1 = R$ และ $R^{n+1} = R^n \circ R$ $R^3 = R^2 \circ R = (R \circ R) \circ R$

ตัวอย่าง 3 ให้ **แบบฝึกหัด 2.4**

2. a) จงหาคู่อันดับทั้งหมดในความสัมพันธ์ R = {(a, b) | a divides b} บนเซต {1, 2, 3, 4, 5}

   b) จงวาดภาพความสัมพันธ์นี้ เช่นที่แสดงในตัวอย่าง 1 หน้า 51

   c) จงวาดภาพความสัมพันธ์นี้ ในรูปตาราง เช่นที่แสดงในตัวอย่าง 1 หน้า 51

3. สำหรับความสัมพันธ์แต่ละชุดข้างล่างนี้ บนเซต {1, 2, 3, 4} จงพิจารณาว่า มันเป็นความสัมพันธ์สะท้อน, สมมาตร, ปฏิสมมาตร และถ่ายทอด หรือไม่

4. จงบอกว่าความสัมพันธ์ R บนเซตของคนทั้งหมด เป็นความสัมพันธ์สะท้อน, สมมาตร, ปฏิสมมาตร และ/หรือถ่ายทอดหรือไม่ เมื่อ (a, b) ∈ R ก็ต่อเมื่อ

5. จงหาว่าความสัมพันธ์ R บนเซตของจำนวนเต็มทั้งหมด เป็นความสัมพันธ์สะท้อน, สมมาตร, ปฏิสมมาตร และ/หรือ การถ่ายทอดหรือไม่ เมื่อ (x, y) ∈ R ก็ต่อเมื่อ

   f) x และ y เป็นค่าลบทั้งคู่หรือไม่เป็นค่าลบทั้งคู่

6. จงยกตัวอย่างของความสัมพันธ์บนเซต ซึ่งเป็นความสัมพันธ์

7. ในแบบฝึกหัดข้อ 3 ความสัมพันธ์ชุดใดเป็นไม่สะท้อน
8. ในแบบฝึกหัดข้อ 4 ความสัมพันธ์ชุดใดเป็นไม่สะท้อน
9. ความสัมพันธ์หนึ่งชุดบนเซต สามารถไม่เป็นความสัมพันธ์สะท้อนและไม่เป็นความสัมพันธ์ไม่สะท้อน ได้หรือไม่?
10. ในแบบฝึกหัดข้อ 3 ความสัมพันธ์ชุดใดเป็นอสมมาตร
11. ในแบบฝึกหัดข้อ 4 ความสัมพันธ์อันไหนเป็นอสมมาตร
12. ความสัมพันธ์อสมมาตรต้องเป็นปฏิสมมาตรหรือไม่?
13. ความสัมพันธ์ปฏิสมมาตรต้องเป็นอสมมาตรหรือไม่? จงบอกเหตุผลสำหรับคำตอบ

16. ให้ R เป็นความสัมพันธ์บนเซตของรัฐทั้งหมดในประเทศสหรัฐอเมริกา ประกอบด้วยคู่

17. สมมติว่าฟังก์ชัน f จาก A ไป B เป็น หนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง ให้ R เป็นความสัมพันธ์

21. ให้ R เป็นความสัมพันธ์บนเซตของคน ซึ่งประกอบด้วยคู่ (a, b) เมื่อ a เป็นบิดาของ b ให้ S เป็นความสัมพันธ์บนเซตของคน ประกอบด้วยคู่ (a, b) เมื่อ a และ b เป็นพี่น้องกัน (พี่ชายหรือพี่สาว) จงหา $S \circ R$ และ $R \circ S$

24. ความสัมพันธ์ 16 ชุด บนเซต {0, 1} ซึ่งท่านเขียนรายการไว้ในแบบฝึกหัดข้อ 22 มีชุดใดบ้างเป็นความสัมพันธ์

a) สะท้อน   b) ไม่สะท้อน

c) สมมาตร   d) ปฏิสมมาตร

e) อสมมาตร   f) ถ่ายทอด

25. มีความสัมพันธ์จำนวนเท่าไหร่ บนเซตซึ่งมีสมาชิก n ตัว ซึ่งเป็นความสัมพันธ์

e) สะท้อน และสมมาตร

f) ไม่เป็นสะท้อน และไม่เป็นไม่สะท้อน

26. มีความสัมพันธ์การถ่ายทอดจำนวนเท่าไหร่บนเซตซึ่งมีสมาชิก n ตัว ซึ่ง

a) $n = 1$ b) $n = 2$ c) $n = 3$

27. จงหาข้อผิดพลาดของการพิสูจน์ทฤษฎีบทข้างล่างนี้

28. สมมติว่า R และ S เป็นความสัมพันธ์การสะท้อนบนเซต A จงพิสูจน์ หรือพิสูจน์ว่า

29. จงแสดงให้เห็นว่าความสัมพันธ์ R บนเซต A เป็นสมมาตร ก็ต่อเมื่อ $R = R^{-1}$ เมื่อ R^{-1} เป็นความสัมพันธ์ผกผัน

30. จงแสดงให้เห็นว่าความสัมพันธ์ R บนเซต A เป็นปฏิสมมาตร ก็ต่อเมื่อ $R \cap R^{-1}$ เป็นเซตย่อยของความสัมพันธ์เฉียง $\Delta = \{(a, a) \mid a \in A\}$

31. จงแสดงให้เห็นว่าความสัมพันธ์ R บนเซต A เป็นสะท้อนก็ต่อเมื่อความสัมพันธ์ผกผัน R^{-1} เป็นสะท้อน

32. จงแสดงให้เห็นว่าความสัมพันธ์ R บนเซต A เป็นความสัมพันธ์สะท้อน ก็ต่อเมื่อความสัมพันธ์

เติมเต็ม $\dot{R}$ เป็นไม่สะท้อน

33. ให้ R เป็นความสัมพันธ์ ซึ่งเป็นสะท้อนและถ่ายทอด จงพิสูจน์ว่า $R^n = R$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ทุกตัว

34. ให้ R เป็นความสัมพันธ์บนเซต {1, 2, 3, 4, 5} ประกอบด้วยคู่อันดับ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 5), (4, 2), (4, 5), (5, 1), (5, 2) และ (5, 4) จงหา

    a) R^2　　b) R^3　　c) R^4　　d) R^5

35. ให้ R เป็นความสัมพันธ์สะท้อนบนเซต A จงแสดงให้เห็นว่า R^n เป็นสมมาตรสำหรับจำนวนเต็มบวก n ทั้งหมด

36. ให้ R เป็นความสัมพันธ์สมมาตรจงแสดงให้เห็นว่า R^n เป็นสมมาตรสำหรับจำนวนเต็มบวก n ทั้งหมด

37. สมมติว่าความสัมพันธ์ R เป็นไม่สะท้อน R^n จำเป็นต้องเป็นไม่สะท้อนหรือไม่ จงบอกเหตุผลสำหรับคำตอบของท่าน

แบบฝึกหัดเสริม 2.4

ข้อ 9-12 จงวาดไดกราฟของความสัมพันธ์ (draw the digraph of the relation)

12. ความสัมพันธ์ของข้อ 7

ในข้อ 13-16 จงเขียนความสัมพันธ์เป็นเซตของคู่อันดับ

17. จงหาโดเมนและพิสัยของความสัมพันธ์แต่ละชุด ในข้อ 1-16

27. ความสัมพันธ์ของข้อ 25 เป็นสะท้อน สมมาตร ปฏิสมมาตร หรือ ถ่ายทอด หรือไม่?

28. ความสัมพันธ์ของข้อ 26 เป็นสะท้อน สมมาตร ปฏิสมมาตร หรือ ถ่ายทอด หรือไม่?

ในข้อ 29-34 จงบอกว่าความสัมพันธ์ชุดไหนบ้าง นิยามบนเซตของจำนวนเต็มบวก เป็น สะท้อน สมมาตร ปฏิสมมาตร หรือ ถ่ายทอด หรือไม่?

35. ให้ X เป็นเซตไม่ว่าง นิยามความสัมพันธ์บน P เซตกำลังของ X เป็นดังนี้

$(A, B) \in R$ ถ้า $A \subseteq B$ ความสัมพันธ์นี้เป็น สะท้อน สมมาตร ปฏิสมมาตร ถ่ายทอด หรือไม่?

37. สะท้อน, สมมาตร, ไม่เป็นการถ่ายทอด
38. สะท้อน, ไม่เป็นสมมาตร, ไม่เป็นการถ่ายทอด
39. สะท้อน, ปฏิสมมาตร, ไม่เป็นการถ่ายทอด
40. ไม่เป็นสะท้อน, สมมาตร, ไม่เป็นปฏิสมมาตร, ถ่ายทอด
41. ไม่เป็นสะท้อน, ไม่เป็นสมมาตร, ถ่ายทอด

45. ถ้า R เป็นการถ่ายทอด, แล้ว R^{-1} เป็นถ่ายทอด
46. ถ้า R และ S เป็นสะท้อน, แล้ว $R \cup S$ เป็นสะท้อน
47. ถ้า R และ S เป็นสะท้อน, แล้ว $R \cap S$ เป็นสะท้อน
48. ถ้า R และ S เป็นสะท้อน, แล้ว $R \circ S$ เป็นสะท้อน
49. ถ้า R เป็นสะท้อน, แล้ว R^{-1} เป็นการสะท้อน

58. อะไรผิดกับข้อโต้แย้งข้างล่างนี้ ซึ่งสมมติว่า เป็นการแสดงให้เห็นว่า ความสัมพันธ์ R ใด ๆ บน X ซึ่งเป็นสมมาตร และถ่ายทอด จะเป็นสะท้อน ด้วย

ให้ $x \in X$ โดยใช้คุณสมบัติความสมมาตร เรามี (x, y) และ (y, x) ทั้งคู่ อยู่ใน R เนื่องจาก $(x, y), (y, x) \in R$ โดยคุณสมบัติถ่ายทอด เรามี $(x, x) \in R$ ดังนั้น R เป็นสะท้อน

2.5 การแทนที่ความสัมพันธ์

(Representing Relations)

มีหลายวิธี ในการแทนที่ ความสัมพันธ์ ระหว่างเซตจำกัด จากหัวข้อที่ผ่านมา วิธีหนึ่ง คือ เขียนรายการ คู่อันดับ ของมัน ในหัวข้อนี้ จะได้อภิปราย ทางเลือกอีก สองวิธี สำหรับ การแทนที่ความสัมพันธ์ วิธีที่หนึ่งใช้ เมทริกซ์ ศูนย์-หนึ่ง อีกวิธีหนึ่งใช้ กราฟมีทิศทาง

การแทนที่ความสัมพันธ์ โดยใช้ เมทริกซ์

(Representing Relations using Matrices)

ความสัมพันธ์ ระหว่าง เซตจำกัด สามารถถูกแทนที่ได้ โดยใช้ เมทริกซ์ ศูนย์-หนึ่ง (zero-one matrix)

สมมติว่า R เป็นความสัมพันธ์ จาก $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ ไป $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$

ในที่นี้ สมาชิก ของเซต A และเซต B จะมีรายชื่อ ในลำดับอย่างหนึ่ง (listed in a particular order) แต่ ลำดับนี้ จะเรียงอย่างไรก็ได้ นอกจากนี้แล้ว เมื่อ A = B เราใช้ การเรียงอันดับ เหมือนกัน สำหรับ A และ B

ความสัมพันธ์ R สามารถถูก แทนที่ด้วย เมทริกซ์ $M_R = [m_{ij}]$

เมื่อ

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ if } (a_i, b_j) \in R \\ \\ 0 \text{ if } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

พูดอีกอย่างหนึ่งคือ เมทริกซ์ ศูนย์-หนึ่ง ซึ่งแทน ความสัมพันธ์ R มี 1 เป็น entry ตัวที่ (i, j) เมื่อ a_i สัมพันธ์กับ b_j และ มี 0 ในตำแหน่งนี้ ถ้า a_i ไม่สัมพันธ์กับ b_j

การแทนที่ เช่นนี้ ขึ้นอยู่กับ การเรียงอันดับ ที่ใช้สำหรับ A และ B (Such a representation depends on the orderings used for A and B.)

ตัวอย่าง ให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{1, 2\}$

R เป็นความสัมพันธ์ จาก A ไป B ประกอบด้วย คู่อันดับ (a, b) ถ้า $a \in A, b \in B$ และ $a > b$ จงหาเมทริกซ์ ของ ความสัมพันธ์ R ถ้า $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ และ $a_3 = 3$ ส่วน $b_1 = 1$ และ $b_2 = 2$

ผลเฉลย

เนื่องจาก $R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง ให้ $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ และ $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ จงหาคู่อันดับต่างๆ ในความสัมพันธ์ R ซึ่งถูกแทนที่ ด้วย เมทริกซ์

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ผลเฉลย เนื่องจาก R ประกอบด้วย คู่อันดับ (a_i, b_j) โดยที่ $m_{ij} = 1$ ดังนั้น

$R = \{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_1), (a_3, b_3), (a_3, b_5)\}$

เมทริกซ์ ของ ความสัมพันธ์ บนเซต ซึ่งเป็นเมทริกซ์จัตุรัส (square matrix) สามารถนำมาใช้ บอกว่า ความสัมพันธ์นั้น มีคุณสมบัติ อย่างใด หรือไม่

จากที่เราทราบแล้ว ความสัมพันธ์ R บนเซต A จะเป็นการสะท้อน ถ้า $(a, a) \in R$ เมื่อใดก็ตามที่ $a \in A$ ดังนั้น R เป็นการสะท้อน ก็ต่อเมื่อ $(a_i, a_i) \in R$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, n$ เพราะฉะนั้น R เป็นการสะท้อน ก็ต่อเมื่อ $m_{ii} = 1$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, n$ พูดอีกอย่างหนึ่งคือ R เป็นการสะท้อน ถ้า สมาชิกทุกตัว บนเส้นทแยงมุมหลัก ของ M_R เท่ากับ 1 ดังรูปข้างล่างนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \cdot & & & & \\ & & & & \cdot & & & \\ & & & & & \cdot & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

รูป 1 เมทริกซ์ ศูนย์-หนึ่ง สำหรับความสัมพันธ์การสะท้อน

ความสัมพันธ์ R เป็นสมมาตร ถ้า $(a, b) \in R$ แสดงว่า $(b, a) \in R$ เพราะฉะนั้น ความสัมพันธ์ R บนเซต $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ จะเป็นสมมาตร ก็ต่อเมื่อ $(a_j, a_i) \in R$ ตราบใดที่ $(a_i, a_j) \in R$ ในเทอม สมาชิกของ M_R, R จะเป็นสมมาตรก็ต่อเมื่อ ถ้า $m_{ji} = 1$ ตราบใดที่ $m_{ij} = 1$ สิ่งนี้ หมายความว่า $m_{ji} = 0$ เมื่อใดก็ตามที่ $m_{ij} = 0$ เพราะฉะนั้น R เป็นสมมาตร ก็ต่อเมื่อ $m_{ij} = m_{ji}$ สำหรับ ทุกคู่ ของ จำนวนเต็ม i และ j โดยที่ $i = 1, 2, \ldots, n$ และ $j = 1, 2, \ldots, n$ จากบทนิยาม ของ การสลับเปลี่ยน (transpose) ของเมทริกซ์ จะเห็นว่า R เป็นสมมาตร ก็ต่อเมื่อ

$$M_R = (M_R)^t$$

นั่นคือ ถ้า M_R เป็นเมทริกซ์สมมาตร รูปแบบของเมทริกซ์ สำหรับ ความสัมพันธ์ คือ รูป 2 (a)

(a) สมมาตร (b) ปฏิสมมาตร

รูป 2 เมทริกซ์ ศูนย์-หนึ่ง สำหรับ ความสัมพันธ์ สมมาตร และปฏิสมมาตร

ความสัมพันธ์ R เป็นปฏิสมมาตร ก็ต่อเมื่อ ถ้า $(a, b) \in R$ และ $(b, a) \in R$ แสดงว่า $a = b$ เพราะฉะนั้น เมทริกซ์ของ ความสัมพันธ์ปฏิสมมาตร มีคุณสมบัติว่า ถ้า $m_{ij} = 1$ โดยที่ $i \neq j$ แล้ว $m_{ji} = 0$ หรือพูดอีกอย่างหนึ่งคือ เมื่อ $i \neq j$, $m_{ij} = 0$ หรือ $m_{ji} = 0$ อย่างใดอย่างหนึ่ง หรือเป็นศูนย์ ทั้งคู่ รูปแบบของเมทริกซ์ สำหรับ ความสัมพันธ์ปฏิสมมาตร ดูรูป 2 (b)

ตัวอย่าง ให้ R เป็นความสัมพันธ์ บนเซต ซึ่งแทนด้วย เมทริกซ์

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

R เป็นความสัมพันธ์ ชนิดใด?

ผลเฉลย

R เป็นการสะท้อน เพราะว่าสมาชิกทุกตัวบนเส้นทแยงมุมหลัก เท่ากับ 1

R เป็นสมมาตร เพราะว่า M_R เป็นเมทริกซ์สมมาตร

R ไม่ใช่ปฏิสมมาตร

เมทริกซ์ ที่แทน ผลผนวก ของ ความสัมพันธ์ R_1 และ R_2 จะมี 1 ในตำแหน่งที่ M_{R_1} มี 1 หรือ M_{R_2} มี 1 หรือมี 1 ทั้งคู่

เมทริกซ์ ซึ่ง แทนผลตัด ของ ความสัมพันธ์ R_1 และ R_2 จะมี 1 ในตำแหน่ง M_{R_1} และ M_{R_2} ทั้งคู่

เพราะฉะนั้น จากการดำเนินการแบบบูล (Boolean operations)

join และ meet :

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2}$$

และ

$$M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2}$$

ตัวอย่าง ให้ R_1 และ R_2 เป็นความสัมพันธ์ บนเซต A ถูกแทนด้วยเมทริกซ์

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จงหา เมทริกซ์ ซึ่ง แทนความสัมพันธ์ $R_1 \cup R_2$ และ $R_1 \cap R_2$

ผลเฉลย เมทริกซ์ ของ ความสัมพันธ์ เหล่านี้คือ

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ต่อไป ต้องการหา เมทริกซ์ สำหรับ ผลประกอบของ ความสัมพันธ์ เมทริกซ์นี้ สามารถหาได้ โดยใช้ ผลคูณแบบบูล ((Boolean product) ของเมทริกซ์ สำหรับความสัมพันธ์เหล่านี้

ให้ R เป็นความสัมพันธ์ จากเซต A ไป B และ S เป็นความสัมพันธ์ จาก B ไป C สมมติว่า เซต A, B และ C มีสมาชิก m, p และ n ตัว ตามลำดับ คู่อันดับ (a_i, c_j) จะอยู่ใน S o R ก็ต่อเมื่อ มีสมาชิก b_k โดยที่ (a_i, b_k) อยู่ใน R และ คู่อันดับ (b_k, c_j) อยู่ใน S จะได้ว่า $t_{ij} = 1$ ก็ต่อเมื่อ $r_{ik} = s_{kj} = 1$ สำหรับ k บางตัว จากบทนิยามของผลคูณแบบบูล สิ่งนี้ หมายความว่า

$$M_{SoR} = M_R \odot M_S$$

ตัวอย่าง จงหาเมทริกซ์ ซึ่งแทนความสัมพันธ์ SoR เมื่อ เมทริกซ์ แทนความสัมพันธ์ R และ S เป็นดังนี้

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ผลเฉลย เมทริกซ์ สำหรับ SoR คือ

$$M_{SoR} = M_R \odot M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ ซึ่งแทน ผลประกอบของความสัมพันธ์ สองชุด สามารถนำมาใช้ หา เมทริกซ์ สำหรับ M_{R^n} โดยเฉพาะ

$$M_{R^n} = M_R^{[n]}$$

ตัวอย่าง จงหา เมทริกซ์ ซึ่งแทนความสัมพันธ์ R^2 เมื่อเมทริกซ์ ซึ่งแทน R คือ

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ผลเฉลย เมทริกซ์ สำหรับ R^2 คือ

$$M_{R^2} = M_R^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

การคูณเมทริกซ์ สัมพันธ์กับ ผลประกอบของความสัมพันธ์

ตัวอย่าง

ให้ R_1 เป็นความสัมพันธ์ จาก $X = \{1, 2, 3\}$ ไป $Y = \{a, b\}$ นิยามดังนี้

$R_1 = \{(1., a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

และให้ R_2 เป็นความสัมพันธ์ จาก Y ไป $Z = \{x, y, z\}$ นิยมดังนี้

$R_2 = \{(a, x), (a, y), (b, y), (b, z)\}$

เมทริกซ์ ของ R_1 สัมพันธ์กับ การเรียงอันดับ 1, 2, 3 และ a, b ได้แก่

$$A_1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

และเมทริกซ์ R_2 สัมพันธ์กับ การเรียงอันดับ a, b และ x, y, z คือ

$$A_2 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

ผลคูณ (product) ของเมทริกซ์สองชุดนี้คือ

$$A_1A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{3x2} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2x3} = \begin{bmatrix} 1+0 & 1+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+1 & 0+1 \\ 1+0 & 1+1 & 0+1 \end{bmatrix}_{3x3}$$

$$A_1A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

การตีความหมายของผลคูณนี้ (Let us interpret this product) สมาชิกตัวที่ ik ใน A_1A_2 คำนวณจาก

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ i & \begin{bmatrix} s & t \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} k \\ \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \end{array} = su + tv$$

ถ้าค่านี้ ไม่เป็นศูนย์ (is nonzero) แสดงว่า su หรือ tv ไม่ใช่ค่าศูนย์ สมมติว่า $su \neq 0$ แสดงว่า $s \neq 0$ และ $u \neq 0$ สิ่งนี้ หมายความว่า $(i, a) \in R_1$ และ $(a, k) \in R_2$ โดยนัยคือ $(i, k) \in R_2 \circ R_1$ แสดงว่า ถ้าสมาชิกตัวที่ ik ใน A_1A_2 ไม่ใช่ค่าศูนย์, แล้ว $(i, k) \in R_2 \circ R_1$ การย้อนกลับ เป็นจริงด้วยเช่นกัน

ทฤษฎีบท

ให้ R_1 เป็นความสัมพันธ์ จาก X ไป Y และให้ R_2 เป็นความสัมพันธ์ จาก Y ไป Z เลือกการเลือกอันดับ ของ X, Y และ Z เมทริกซ์ ของ ความสัมพันธ์ ทุกชุด เกี่ยวข้องกับการเรียงอันดับเหล่านี้

ให้ A_1 เป็น เมทริกซ์ ของ R_1 และให้ A_2 เป็น เมทริกซ์ ของ R_2 เมทริกซ์ ของ ความสัมพันธ์ $R_2 \circ R_1$ ได้จากการ แทนที่ แต่ละเทอม ซึ่ง ไม่ใช่ค่าศูนย์ ใน ผลคูณ A_1A_2 ด้วย 1

(Let A_1 be the matrix of R_1 and let A_2 be the matrix of R_2. The matrix of the relation $R_2 \circ R_1$ is obtained by replacing each nonzero term in the matrix product A_1A_2 by 1.)[1]

---

[1] Johnsonbaugh หน้า 107

การแทนความสัมพันธ์ โดยใช้ ไดกราฟ

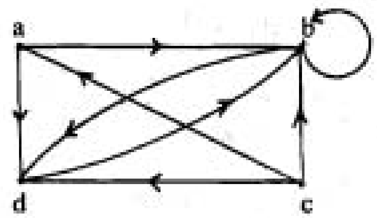
(Representing Relations using Digraphs)

จากที่ได้เห็นแล้วว่า ความสัมพันธ์ สามารถแทนด้วย รายการของ คู่อันดับ ทั้งหมด ของมัน หรือ โดยใช้ เมทริกซ์ ศูนย์-หนึ่ง อีกวิธีหนึ่งที่สำคัญ ของการแทนที่ ความสัมพันธ์ ใช้การแทนที่ด้วยรูปภาพ สมาชิกแต่ละตัวของเซต แทนด้วย หนึ่งจุด (point) คู่อันดับแต่ละคู่ แทนที่โดยการใช้ หนึ่งเส้น (arc) ทิศทางของมัน เป็นลูกศร เมื่อเราใช้ การแทนที่ด้วยภาพ ความสัมพันธ์ บนเซตจำกัด จะเป็นกราฟมีทิศทาง หรือ ไดกราฟ (directed graphs or digraphs)

บทนิยาม กราฟมีทิศทาง หรือ ไดกราฟ ประกอบด้วย เซต V ของจุด (vrertices) หรือ โหนด (nodes) รวมกับ เซต E ของคู่อันดับ ของ สมาชิก ของ V เรียกว่า **ด้าน** (edges หรือ arcs) จุด a เรียกว่า **จุดแรก** (initial vertex) ของเส้น (a, b) และ จุด b เรียกว่า **จุดปลาย** (terminal vertext) ของด้านนี้

ด้านของรูปแบบ (a, a) ถูกแทนที่ โดยใช้ หนึ่งเส้น จากจุด a กลับไปยังตัวมันเอง ด้านเช่นนี้ เรียกว่า **รูปบ่วง** (loop)

ตัวอย่าง กราฟมีทิศทาง ของจุด a, b, c และ d และด้านต่างๆ (a, b), (a, d), (b. b), (b, d), (c, a), (c, b), (c, d) และ (d ,b) แสดงด้วยรูปที่ 3

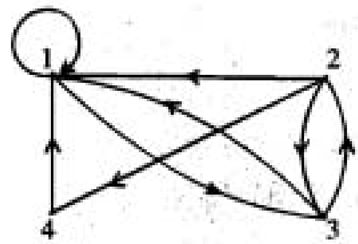


รูปที่ 3

โปรดสังเกตว่า ความสัมพันธ์ จากเซต A ไปยัง เซต B ไม่สามารถแทนด้วย กราฟมีทิศทางได้ ยกเว้น A = B

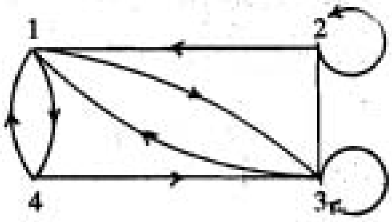
ตัวอย่าง กราฟมีทิศทางของความสัมพันธ์

R = {(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (4, 1)} บนเซต {1, 2, 3, 4}



รูปที่ 4

ตัวอย่าง จงหา คู่อันดับทั้งหมด ในความสัมพันธ์ R ซึ่งแทนด้วย กราฟมีทิศทาง ในรูปที่ 5



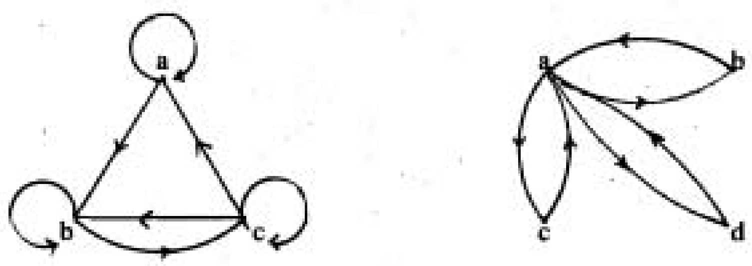
รูปที่ 5

ผลเฉลย

คู่อันดับ (x, y) ในความสัมพันธ์ คือ

R = {(1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 3)}

ตัวอย่าง ความสัมพันธ์ ซึ่งแทนด้วย ไดกราฟ รูปที่ 6 เป็นชนิดใดบ้าง?



a) ไดกราฟ ของ R (b) ไดกราฟ ของ S

รูปที่ 6

ผลเฉลย

R เป็นการสะท้อน, ไม่ใช่สมมาตร, ไม่ใช่ปฏิสมมาตร, ไม่ใช่ถ่ายทอด

S ไม่ใช่การสะท้อน, เป็นสมมาตร, ไม่ใช่ปฏิสมมาตร, ไม่ใช่ถ่ายทอด

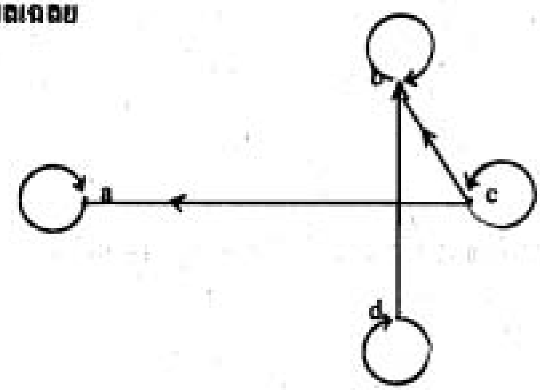
ถ้า R เป็นความสัมพันธ์ บนเซต A และ $a \in A$ แล้ว อินดีกรี (in-degree) ของ a หมายถึง จำนวนของ $b \in A$ โดยที่ คู่อันดับ $(b, a) \in R$ ส่วน เอ้าดีกรี (out-degree) ของ a หมายถึง จำนวนของ $b \in A$ โดยที่ คู่อันดับ $(a, b) \in R$

ตัวอย่าง ให้ $A = \{a, b, c, d\}$ และ R เป็นความสัมพันธ์ บน A ซึ่งมีเมทริกซ์

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จงสร้าง ไดกราฟ ของ R และเขียนรายการ in-degrees และ out-degrees ของทุกจุด

ผลเฉลย



	a	b	c	d
in-degree	2	3	1	1
out-degree	1	1	3	2

แบบฝึกหัดเสริม

ในแบบฝึกหัดข้อ 1-3 จงหาเมทริกซ์ ของ ความสัมพันธ์ R จาก X ไป Y สัมพันธ์ กับ การเรียงอันดับที่กำหนดให้

1. R = $\{(1, \delta), (2, \alpha), (2, \Sigma), (3, \beta), (3, \Sigma)\}$

   การเรียงอันดับ ของ X : 1, 2, 3

   การเรียงอันดับ ของ Y : $\alpha, \beta, \Sigma, \delta$

2. R เหมือนกับ ข้อ 1

   การเรียงอันดับ ของ X : 3, 2, 1

   การเรียงอันดับ ของ Y : $\Sigma, \beta, \alpha, \delta$

3. R = $\{(x, a), (x, c), (y, a), (y, b), (z, d)\}$

   การเรียงอันดับ ของ X : x, y, z

   การเรียงอันดับ ของ Y : a, b, c, d

ในแบบฝึกหัดข้อ 4-6 จงหาเมทริกซ์ ของ ความสัมพันธ์ R บน X สัมพันธ์กับ การเรียงอันดับที่กำหนดให้

4. R = $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$

   การเรียงอันดับของ X : 1, 2, 3, 4, 5

5. R เหมือนกับ ข้อ 4

   การเรียงอันดับของ X : 5, 3, 1, 2, 4

6. R = $\{(x, y) \mid x < y\}$

   การเรียงอันดับของ X : 1, 2, 3, 4

ในแบบฝึกหัดข้อ 7-9 จงเขียน ความสัมพันธ์ R เป็นเซตของคู่อันดับ, กำหนดโดย เมทริกซ์ข้างล่างนี้

7.
$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w & x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

8.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

9.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} w & x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} w \\ x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

10. How can we quickly determine whether a relation R is antisymmetric by examine the matrix of R (relative to same ordering)?

11. จงบอกว่า ความสัมพันธ์ ของ แบบฝึกหัดข้อ 9 เป็น การสะท้อน, สมมาตร, ถ่ายทอด, ปฏิสมมาตร, อันดับบางส่วน, และ/หรือ ความสัมพันธ์สมมูล หรือไม่?

12. กำหนดเมทริกซ์ ของ ความสัมพันธ์ R จาก X ไป Y ให้ เราสามารถ หา เมทริกซ์ ของ ความสัมพันธ์ ผกผัน R^{-1} ได้อย่างไร?

13. จงหาเมทริกซ์ ของ ความสัมพันธ์ ผกผัน ของ แบบฝึกหัดข้อ 7 และ ข้อ 8

ในแบบฝึกหัดข้อ 14-16, จงหา

(a) เมทริกซ์ A_1 ของความสัมพันธ์ R_1 (สัมพันธ์กับการเรียงอันดับที่กำหนดให้)

(b) เมทริกซ์ A_2 ของความสัมพันธ์ R_2 (สัมพันธ์กับการเรียงอันดับที่กำหนดให้)

(c) เมทริกซ์ผลคูณ A_1A_2

(d) จงใช้ ผลลัพธ์ ของ ข้อ (c) หา เมทริกซ์ ของ ความสัมพันธ์ $R_2 \circ R_1$

(e) จงใช้ ผลลัพธ์ ของ ข้อ (d) หา ความสัมพันธ์ $R_2 \circ R_1$ (เป็นเซตของคู่อันดับ)

14. $R_1 = \{(1, x), (1, y), (2, x) (2, y)\}$

$R_2 = \{(x, b), (y, b), (y, a) (y, c)\}$

การเรียงอันดับ : 1, 2, 3 ; x, y ; a, b, c

15. $R_1 = \{(x, y) \mid x \text{ divides } y\}$; R_1 is from X to Y

$R_2 = \{(y, z) \mid y > z\}$; R_2 is from Y to Z

การเรียงอันดับของ X และ Y : 2, 3, 4, 5

การเรียงอันดับของ Z : 1, 2, 3, 4

16. $R_1 = \{(x, y) \mid x + y \leq 6\}$; R_1 is from X to Y

$R_2 = \{(y, z) \mid y = z + 1\}$; R_2 is from Y to Z

การเรียงอันดับของ X, Y และ Z : 1, 2, 3, 4, 5

แบบฝึกหัด 2.5

1. จงแทน ความสัมพันธ์ บน {1, 2, 3} ข้างล่างนี้ ด้วยเมทริกซ์ (ให้สมาชิกของเซตนี้ เรียงลำดับ จากน้อยไปหามาก)

   a) {(1, 1), (1, 2), (1, 3)}

   b) {(1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)}

   c) {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)}

   d) {(1, 3), (3, 1)}

2. จงเขียนรายการ คู่อันดับ ในความสัมพันธ์ บน {1, 2, 3} สมนัยกับ เมทริกซ์ต่อไปนี้ (เมื่อแถว และสดมภ์ สมนัยกับ จำนวนเต็ม เรียงลำดับจาก น้อยไปหามาก)

   a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. ให้ R เป็นความสัมพันธ์ แทนด้วยเมทริกซ์

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   จงหา เมทริกซ์ ซึ่ง แทน

   a) R^{-1} b) $\overline{R}$ c) R^2

4. ให้ R_1 และ R_2 เป็นความสัมพันธ์ บนเซต A แทนด้วยเมทริกซ์

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   จงหาเมทริกซ์ ซึ่งแทน

   a) $R_1 \cup R_2$ b) $R_1 \cap R_2$ c) $R_2 \circ R_1$

   d) $R_1 \circ R_1$ e) $R_1 \oplus R_2$

5. ให้ R เป็นความสัมพันธ์ แทนด้วย เมทริกซ์

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

จงหาเมทริกซ์ ซึ่งแทน

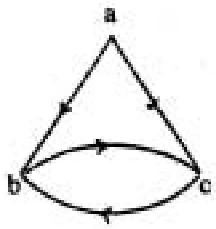
a) R^2 b) R^3 c) R^4

6. จงวาดรูป กราฟมีทิศทาง แทนความสัมพันธ์ แต่ละชุด ในข้อ 1
7. จงวาดรูป กราฟมีทิศทาง แทนความสัมพันธ์ แต่ละชุด ในข้อ 2
8. จงวาดรูป กราฟมีทิศทาง ซึ่งแทนความสัมพันธ์

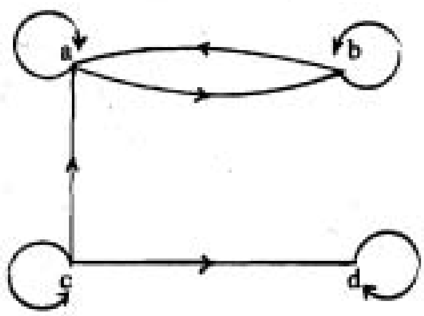
{(a, a), (a, b), (b, c), (c, b), (c, d), (d, a), (d, b)}

ในแบบฝึกหัดข้อ 9-11 จงเขียนรายการคู่อันดับ ใน ความสัมพันธ์ ซึ่ง แทนด้วยกราฟมีทิศทาง

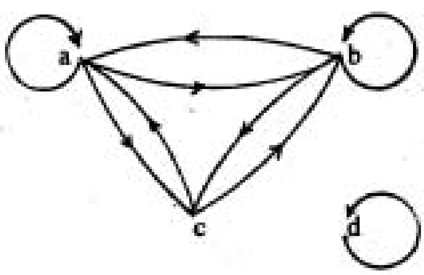
9.



10.



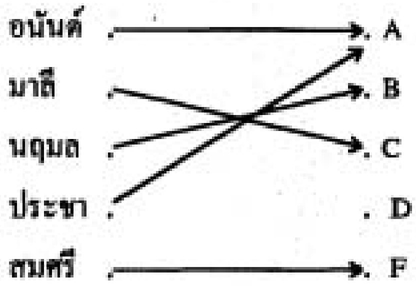
11.



12. ความสัมพันธ์ ซึ่ง แทนด้วย กราฟมีทิศทาง ในแบบฝึกหัดข้อ 9-11 เป็นความสัมพันธ์ ชนิดใดบ้าง?

2.6 ฟังก์ชัน (Functions)

ในหลายกรณี เรากำหนดค่าให้สมาชิกแต่ละตัวของเซตด้วยสมาชิกใดโดยเฉพาะของเซตที่สอง (ซึ่งอาจจะเป็นเซตเดียวกับชุดแรก) ตัวอย่างเช่น นักศึกษาแต่ละคน ในชั้นเรียนโครงสร้างไม่ต่อเนื่อง มีการกำหนดเกรดเป็นตัวอักษร จากเซต {A, B, C, D, E, F} เช่น อนันต์ ได้เกรด A, มาลี ได้เกรด C, นฤมล ได้เกรด B, ประชา ได้เกรด A และ สมศรี ได้เกรด F การกำหนดค่าของเกรดแสดงให้เห็นในรูป 1



รูป 1 การกำหนดเกรด ในชั้นเรียนโครงสร้างไม่ต่อเนื่อง

การกำหนดค่านี้ เป็นตัวอย่างของฟังก์ชัน แนวคิดของฟังก์ชันมีความสำคัญมากในโครงสร้างไม่ต่อเนื่อง ฟังก์ชันนำไปใช้ในบทนิยามของโครงสร้างไม่ต่อเนื่อง เช่น ลำดับ (sequences) และสายอักขระ (strings) ฟังก์ชันยังนำไปใช้ในการแทน เวลานานเพียงใดที่ให้คอมพิวเตอร์แก้ปัญหา ซึ่งมีขนาดอินพุทเท่าที่กำหนดให้ ฟังก์ชันเวียนบังเกิด ซึ่งเป็นฟังก์ชันนิยามในเทอมของตัวมันเอง ใช้ในสาขาคอมพิวเตอร์ ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงแนวคิดพื้นฐานเกี่ยวกับฟังก์ชันที่จำเป็นในคณิตศาสตร์ไม่ต่อเนื่อง

ฟังก์ชัน f จากเซต A ไปเซต B ใช้สัญลักษณ์ $f: A \rightarrow B$ หมายถึงความสัมพันธ์ชนิดหนึ่ง จาก A ไป B มีคุณสมบัติดังนี้

- โดเมนของ f คือเซต A
- ถ้าคู่อันดับ (a, b) และ $(a, c) \in R$ แล้ว $b = c$

บทนิยาม 1 ให้ A และ B เป็นเซต ฟังก์ชัน f จาก A ไป B หมายถึงการกำหนดค่า ของสมาชิกเพียงค่าเดียว ของ B ให้กับสมาชิกแต่ละตัวของ A เราเขียน $f(a) = b$ ถ้า b เป็นสมาชิกเพียงค่าเดียว ของ B กำหนดโดยฟังก์ชัน f ให้กับสมาชิก a ของ A ถ้า f เป็นฟังก์ชัน จาก A ไป

B เราเขียน f: A→B

(Let A and B be sets. A **function** f from A to B is an assignment of a unique element of B to each element of A. We write f(a) = b if b is the unique element of b assigned by the function f to the element a of A. If f is a function from A to B, we write f: A→B)

ฟังก์ชัน มีการกำหนดในหลายวิธีที่แตกต่างกัน บางครั้ง กำหนดค่าอย่างชัดแจ้ง บ่อยครั้งให้เป็นสูตร เช่น $f(x) = x + 1$ ในการนิยามฟังก์ชัน หลายครั้งเราใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการกำหนดฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 1.1 ความสัมพันธ์

$$f = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}$$

จาก $X = \{1, 2, 3\}$ ไป $Y = \{a, b, c\}$ เป็นฟังก์ชันจาก X ไป Y

โดเมนของ f คือ $\{1, 2, 3\}$ และพิสัยของ f คือ $\{a, b\}$

ตัวอย่าง 1.2 ความสัมพันธ์

$$f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (1, b)\}$$

จาก $X = \{1, 2, 3\}$ ไป $Y = \{a, b, c\}$ ไม่ใช่ฟังก์ชัน เพราะว่าขาดคุณสมบัติข้อ 2 ตัวอย่างข้อนี้ มีคู่อันดับ (1, a) และ (1, b) อยู่ใน R แต่ $a \neq b$

บทนิยาม 2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เราพูดว่า A เป็น โดเมน (domain) ของ f และ B เป็น โคโดเมน (codomain) ของ f, ถ้า f(a) = b เราพูดว่า b เป็น อิเมจ (image)ของ a และ a เป็น พี-อิเมจ (pre-image) ของ b, พิสัย (range) ของ f หมายถึง เซตของอิเมจทั้งหมดของสมาชิกของ A ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เราพูดว่า f ส่ง A ไป B

(If f is a function from A to B, we say that A is domain of f and B is the codomain of f. If f(a) = b, we say that b is the image of a and a is a pre-image of b. The range of f is the set of all images of elements of A. Also, if f is a function from A to B, we say that f maps A to B.)

รูป 2 แทนฟังก์ชัน f จาก A ไป B

จงพิจารณาตัวอย่างแรกของหัวข้อนี้ ให้ G เป็นฟังก์ชันซึ่งกำหนดเกรดให้กับนักศึกษาในชั้นเรียนโครงสร้างไม่ต่อเนื่อง โปรดสังเกตว่า G(อนันต์) = A

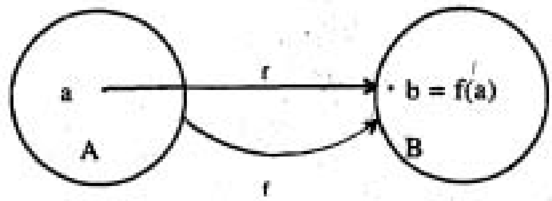
โดเมนของ G คือเซต {อนันต์, มาลี, นฤมล, ประชา, สมศรี}

โคโดเมนของ G คือเซต {A, B, C, D, F}

พิสัยของ G คือเซต {A, B, C, F} เพราะว่า มีนักศึกษาซึ่งมีการกำหนดแต่ละเกรดให้ ยกเว้นเกรด D

ตัวอย่าง 1 ให้ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง กำหนดค่า 2 บิตสุดท้ายของสายบิต (bit string) ของความยาว 2 หรือมากกว่าให้กับสายอักขระนั้น ดังนั้น โดเมนของ f คือ เซตของสายบิตทั้งหมดของความยาว 2 หรือมากกว่า และ โคโดเมนและพิสัย ทั้งคู่คือเซต {00, 01, 10, 11}

ตัวอย่าง 2 ให้ f เป็นฟังก์ชัน จาก Z ไป Z กำหนดค่ากำลังสองของจำนวนเต็มให้กับจำนวนเต็มนี้ ดังนั้น $f(x) = x^2$ เมื่อ โดเมนของ f คือเซตของ จำนวนเต็มทั้งหมด, โคโดเมนของ f ถูกเลือกให้เป็นเซตของจำนวนเต็มทั้งหมด และพิสัยของ f คือเซตของจำนวนเต็ม ไม่เป็นค่าลบทั้งหมด คือกำลังสองสมบูรณ์ ได้แก่ {0, 1, 4, 9, . . .}



รูป 2 ฟังก์ชัน f ส่ง A ไป B

ตัวอย่าง 3 โดเมน และ โคโดเมน ของฟังก์ชัน บ่อยครั้ง กำหนดในภาษาโปรแกรม ตัวอย่างเช่น คำสั่งของ Pascal

```
function floor(x : real) : integer
```

กำหนดว่า โดเมนของฟังก์ชัน floor คือเซตของจำนวนจริง และ โคโดเมนของมันคือเซตของจำนวนเต็ม

ฟังก์ชันค่าจริง 2 ชุด ซึ่งมีโดเมนชุดเดียวกันสามารถบวกกันและคูณกันได้

บทนิยาม 3 ให้ f_1 และ f_2 เป็นฟังก์ชันจาก A ไป R แล้ว $f_1 + f_2$ และ f_1f_2 เป็นฟังก์ชันจาก A ไป R นิยามโดย

$$(f_1 + f_2)x = f_1(x) + f_2(x)$$

$$f_1f_2(x) = f_1(x)f_2(x)$$

(Let f_1 and f_2 be functions from A to R. Then $f_1 + f_2$ and f_1f_2 are also functions from A to R defined by

$$(f_1 + f_2)x = f_1(x) + f_2(x)$$

$$f_1f_2(x) = f_1(x)f_2(x) \quad)$$

โปรดสังเกตว่า ฟังก์ชัน $f_1 + f_2$ และ f_1f_2 นิยามโดยกำหนดค่าของมัน ที่ x ในเทอมของค่าของ f_1 และ f_2 ที่ x

ตัวอย่าง 4 ให้ f_1 และ f_2 เป็นฟังก์ชันจาก R ไป R โดยที่ $f_1(x) = x^2$ และ $f_2(x) = x - x^2$ จงคำนวณหาฟังก์ชัน $f_1 + f_2$ และ f_1f_2

ผลเฉลย จากคำจำกัดความ ของผลบวกและผลคูณของฟังก์ชัน จะได้ว่า

$$(f_1 + f_2)x = f_1(x) + f_2(x) = x^2 + (x - x^2) = x$$

และ

$$f_1f_2(x) = f_1(x)f_2(x) = x^2(x - x^2) = x^3 - x^4$$

เมื่อ f เป็นฟังก์ชันจากเซต A ไปเซต B, อิเมทของเซตย่อยของ A สามารถนิยามได้

บทนิยาม 4 ให้ f เป็นฟังก์ชันจากเซต A ไปเซต B และให้ S เป็นเซตย่อยของ A, อิเมทของ S คือเซตย่อยของ B ซึ่งประกอบด้วย อิเมทของสมาชิกของ S เราใช้สัญลักษณ์ อิเมทของ S โดย f(S) ดังนั้น

$$f(S) = \{f(s) \mid s \in S\}$$

(Let f be a function from the set A to the set B and let S be a subset of A. The image of S is the subset of B that consists of the images of the elements of S. We denote the image of S by f(s), so that

$$f(S) = \{f(s) \mid s \in S\} \quad)$$

ตัวอย่าง 5 ให้ $A = \{a, b, c, d, e\}$ และ $B = \{1, 2, 3, 4\}$ โดยที่ $f(a) = 2$, $f(b) = 1$, $f(c) = 4$, $f(d) = 1$ และ $f(e) = 1$ อิเมทของ เซตย่อย $S = \{b, c, d\}$ คือเซต $f(S) = \{1, 4\}$

ฟังก์ชัน หนึ่งต่อหนึ่ง และฟังก์ชันไปทั่วถึง

(One-to-one and onto functions)

บางฟังก์ชัน มีอิเมทแตกต่างกัน ที่ สมาชิกแตกต่างกันของโดเมนของมัน ฟังก์ชันเหล่านี้ เรียกว่า **หนึ่งต่อหนึ่ง**

บทนิยาม 5 ฟังก์ชัน f เรียกว่า หนึ่งต่อหนึ่ง หรือ injective ก็ต่อเมื่อ $f(x) = f(y)$ โดยนัย $x = y$ สำหรับทุกค่า x และ y ในโดเมนของ f ฟังก์ชันจะเรียกว่า injection ถ้ามันเป็น หนึ่งต่อหนึ่ง (A function f is said to be one-to-one, or injective, if and only if $f(x) = f(y)$ implies that $x = y$ for all x and y in the domain of f. A function is said to be an injection if it is one-to-one.)

หมายเหตุ ฟังก์ชัน f เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ $f(x) \neq f(y)$ ตราบใดที่ $x \neq y$ การแสดงเช่นนี้ f เป็น หนึ่งต่อหนึ่ง ได้มาจาก เอา ข้อความแย้งสลับที่ ของ การวางโดยนัย ในคำจำกัดความ

ตัวอย่าง 6 จงบอกว่า ฟังก์ชัน f จาก {a, b, c, d} ไป {1, 2, 3, 4, 5} ด้วย $f(a) = 4$, $f(b) = 5$, $f(c) = 1$ และ $f(d) = 3$ เป็นหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่?

ผลเฉลย ฟังก์ชัน f เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง เพราะว่า f อยู่บนค่าแตกต่างกัน ที่ สมาชิก 4 ตัวของโดเมนของมัน สิ่งนี้แสดงให้เห็นในรูป 3

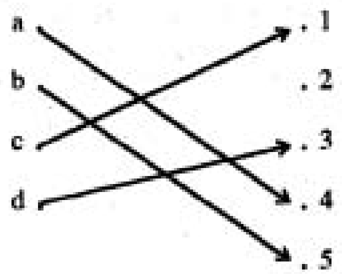
ตัวอย่าง 7 จงบอกว่า ฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ จาก เซตของจำนวนเต็ม ไปเซตของจำนวนเต็ม เป็นหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

ผลเฉลย ฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ ไม่เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง ตัวอย่างเช่น $f(1) = f(-1) = 1$ แต่ $1 \neq -1$

ตัวอย่าง 8 จงบอกว่า ฟังก์ชัน $f(x) = x + 1$ เป็นหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่?

ผลเฉลย ฟังก์ชัน $f(x) = x + 1$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง การแสดงตัวอย่างให้เห็น โปรดสังเกตว่า $x + 1 \neq y + 1$ เมื่อ $x \neq y$

ขณะนี้ เราให้เงื่อนไขบางอย่างซึ่งรับประกันว่า ฟังก์ชันเป็นหนึ่งต่อหนึ่ง



รูป 3 ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

บทนิยาม 6 ฟังก์ชัน f ซึ่งมีโดเมน และ โคโดเมน เป็นเซตย่อย ของเซตของจำนวนจริง เรียกว่า เพิ่มโดยแท้ ถ้า $f(x) < f(y)$ ตราบใดที่ $x < y$ และ x และ y อยู่ในโดเมนของ f ในทำนองเดียวกัน f เรียกว่า ลดโดยแท้ ถ้า $f(x) > f(y)$ ตราบใดที่ $x < y$ และ x และ y อยู่ในโดเมนของ f

(A function f whose domain and codomain are subsets of the set of real numbers is called **strictly increasing** if $f(x) < f(y)$ whenever $x < y$ and x and y are in the domain of f. Similarly, f is called **strictly decreasing** if $f(x) > f(y)$ whenever $x < y$ and a and y are the domain of f.)

จากคำจำกัดความนี้ จะเห็นว่า ฟังก์ชัน ซึ่งไม่ว่าจะเป็น เพิ่มโดยแท้ หรือ ลดโดยแท้ ต้องเป็น หนึ่งต่อหนึ่ง

บางฟังก์ชัน พิสัยและโคโดเมนเท่ากัน นั่นคือ สมาชิกทุกตัวของโคโดเมน เป็นอิเมท ของสมาชิกบางตัวของโดเมน ฟังก์ชัน ซึ่งมีคุณสมบัตินี้ เรียกว่า ฟังก์ชันไปทั่วถึง

บทนิยาม 7 ฟังก์ชัน f จาก A ไป B เรียกว่า ไปทั่วถึง หรือ surjective ก็ต่อเมื่อ สำหรับสมาชิกทุกตัว $b \in B$ มีสมาชิกหนึ่งตัว $a \in A$ ด้วย $f(a) = b$ ฟังก์ชัน f เรียกว่า surjection ถ้ามันเป็น ไปทั่วถึง

(A function f from A to B is called **onto**, or **surjective**, if and only if for every element $b \in B$ there is an element $a \in A$ with $f(a) = b$. A function f is called a **surjection** if it is onto.)

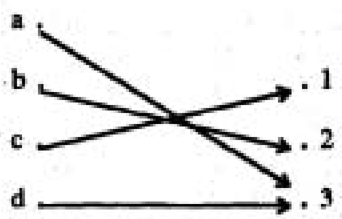
ตัวอย่าง 9 ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก $\{a, b, c, d\}$ ไป $\{1, 2, 3\}$ นิยามโดย $f(a) = 3$, $f(b) = 2$, $f(c) = 1$ และ $f(d) = 3$ ถามว่า f เป็นฟังก์ชันไปทั่วถึงหรือไม่?

ผลเฉลย เนื่องจากสมาชิกทั้งหมด 3 ตัว ของโคโดเมน เป็นอิเมทของสมาชิก ในโดเมน ฟังก์ชัน f จึงเป็นไปทั่วถึง สิ่งนี้แสดงให้เห็นในรูป 4

ตัวอย่าง 9.1 ฟังก์ชัน

$$f = \{(1, a), (2, c), (3, b)\}$$

จาก $X = \{1, 2, 3\}$ ไป $Y = \{a, b, c\}$ เป็นแบบหนึ่งต่อหนึ่ง และไปทั่วถึง Y



รูป 4 ฟังก์ชันไปทั่วถึง

ตัวอย่าง 10 ฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ จากเซตของจำนวนเต็ม ไปเซตของจำนวนเต็ม เป็น ไปทั่วถึง หรือไม่?

ผลเฉลย ฟังก์ชัน f ไม่เป็น ไปทั่วถึง เนื่องจากไม่มีจำนวนเต็ม x ด้วย $x^2 = -1$ เป็นตัวอย่าง

ตัวอย่าง 11 ฟังก์ชัน $f(x) = x + 1$ จากเซตของจำนวนเต็มไปเซตของจำนวนเต็ม เป็น ไปทั่วถึง หรือไม่?

ผลเฉลย ฟังก์ชันนี้เป็น ไปทั่วถึง เพราะว่าสำหรับจำนวนเต็มทุกตัว มี จำนวนเต็ม x โดยที่ $f(x) = y$ โปรดสังเกตว่า $f(x) = y$ ก็ต่อเมื่อ $x + 1 = y$ เป็นจริงก็ต่อเมื่อ $x = y - 1$

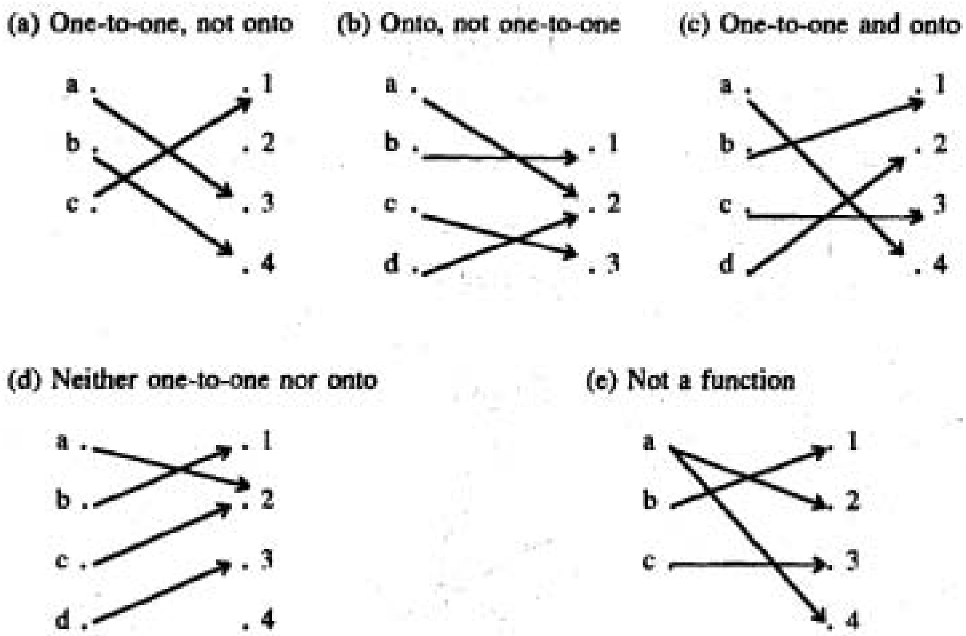
บทนิยาม 8 ฟังก์ชัน f เป็น หนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง หรือ bijection ถ้ามันเป็น หนึ่งต่อหนึ่ง และไปทั่วถึง ทั้งคู่

(The function f is a one-to-one correspondence or a bijection if it is both one-to-one and onto.)

ตัวอย่าง 12 ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก $\{a, b, c, d\}$ ไป $\{1, 2, 3, 4\}$ ด้วย $f(a) = 4, f(b) = 2, f(c) = 1$ และ $f(d) = 3$ ถามว่า f เป็น bijection หรือไม่?

ผลเฉลย ฟังก์ชัน f เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง และ ไปทั่วถึง มันเป็นหนึ่งต่อหนึ่ง เพราะว่าฟังก์ชันมันรับเอาค่าแตกต่างกัน มันเป็นไปทั่วถึง เพราะว่าสมาชิกทั้งหมด 4 ตัวของโคโดเมนเป็นอิเมทของสมาชิกในโดเมน ดังนั้น f เป็น bijection

รูป 5 แสดงให้เห็นฟังก์ชัน 4 แบบ ชุดแรกเป็นแบบหนึ่งต่อหนึ่งแต่ไม่ใช่ไปทั่วถึง, ชุดที่สองเป็นแบบไปทั่วถึงแต่ไม่ใช่หนึ่งต่อหนึ่ง, ชุดที่สาม เป็นแบบหนึ่งต่อหนึ่งและไปทั่วถึง ทั้งคู่, ชุดที่สี่ ไม่ใช่แบบหนึ่งต่อหนึ่งและไม่ใช่ไปทั่วถึง ชุดที่ห้า ไม่ใช่ฟังก์ชัน เพราะว่ามันส่งสมาชิกหนึ่งตัวให้กับสมาชิกแตกต่างกันสองตัว



รูป 5 ตัวอย่างชนิดต่างๆ ของการสมนัย

ตัวอย่าง 13 ให้ A เป็นเซต, ฟังก์ชันเอกลักษณ์ (identity function) บน A หมายถึงฟังก์ชัน $i_A : A \rightarrow A$ คือ

$$i_A(x) = x$$

เมื่อ $x \in A$ พูดอีกอย่างหนึ่งคือ ฟังก์ชันเอกลักษณ์ i_A หมายถึง ฟังก์ชัน ซึ่งกำหนดสมาชิกแต่ละตัวให้กับตัวเอง ฟังก์ชัน i_A เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง และไปทั่วถึง ดังนั้น มันเป็น bijection

ฟังก์ชันผกผันและผลประกอบของฟังก์ชัน

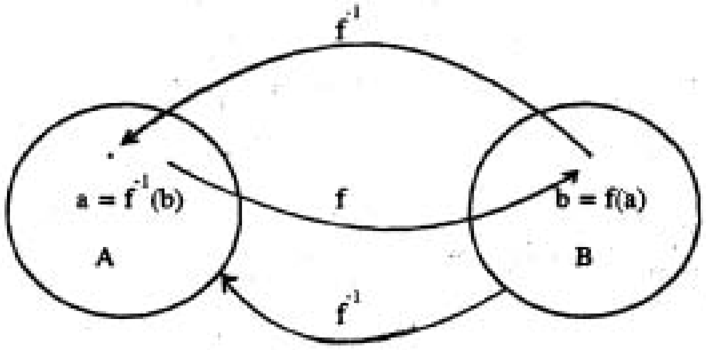
(Inverse functions and Compositions of functions)

จงพิจารณาฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่งและไปทั่วถึง f จากเซต A ไปเซต B เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันไปทั่วถึง สมาชิกทุกตัวของ B เป็นอิเมจของสมาชิกบางตัวใน A นอกจากนี้แล้ว เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งด้วย สมาชิกทุกตัวของ B เป็นอิเมจของสมาชิกเพียงค่าเดียวของ A ดังนั้นเราสามารถนิยามฟังก์ชันใหม่จาก B ไป A ซึ่งผกผันกับการสมนัย กำหนดให้โดย f สิ่งนี้นำไปสู่คำจำกัดความต่อไปนี้

บทนิยาม 9 ให้ f เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่งและไปทั่วถึง จากเซต A ไปเซต B, ฟังก์ชันผกผัน ของ f หมายถึงฟังก์ชัน ซึ่งกำหนดค่าให้กับ สมาชิก b อยู่ใน B ด้วยเพียงค่าเดียว สมาชิก a ใน A โดยที่ $f(a) = b$ ฟังก์ชันผกผัน f ใช้สัญลักษณ์ f^{-1} ดังนั้น $f^{-1}(b) = a$ เมื่อ $f(a) = b$

(Let f be a one-to-one correspondence from the set A to the set B. The inverse function of f is the function that assigns to an element b belonging to B the unique element a in A such that $f(a) = b$. The inverse function of f is denoited by f^{-1}. Hence, $f^{-1}(b) = a$ when $f(a) = b$.)

รูป 6 แสดงให้เห็นแนวความคิดของฟังก์ชันผกผัน



รูป 6 ฟังก์ชัน f^{-1} เป็นการผกผันของฟังก์ชัน f

ถ้าฟังก์ชัน f ไม่ใช่แบบหนึ่งต่อหนึ่งและไปทั่วถึง เราไม่สามารถนิยามฟังก์ชันผกผันของ f เมื่อ f ไม่เป็นหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง ไม่ว่ามัน ไม่ใช่แบบหนึ่งต่อหนึ่ง หรือ ไม่ใช่แบบไปทั่วถึง ถ้า f ไม่ใช่แบบหนึ่งต่อหนึ่ง จะมีสมาชิกบางตัว b ในโคโดเมน เป็นอิเมจของ

สมาชิกมากกว่าหนึ่งตัวในโดเมน ถ้า f ไม่ใช่แบบทั่วถึง สำหรับสมาชิกบางตัว b ในโคโดเมน จะไม่มีสมาชิก a ในโดเมนอยู่ สำหรับ $f(a) = b$ นอกจากนี้แล้ว ถ้า f ไม่ใช่หนึ่งต่อหนึ่งแบบไปทั่วถึง เราไม่สามารถกำหนดค่าให้กับสมาชิก b แต่ละตัวในโคโดเมน ด้วยสมาชิกเพียงค่าเดียว a ในโดเมน โดยที่ $f(a) = b$ (เพราะว่า สำหรับ b บางตัว อาจจะไม่มีมากกว่าหนึ่ง เช่น a หรือไม่มี a)

หนึ่งต่อหนึ่งแบบไปทั่วถึง เรียกว่า **หาตัวผกผันได้** (invertible) เนื่องจากเราสามารถนิยามการผกผันของฟังก์ชันนี้ได้ ฟังก์ชันซึ่งไม่เป็น ฟังก์ชันหาตัวผกผันได้ (not invertible) ถ้ามันไม่ใช่แบบหนึ่งต่อหนึ่งและไปทั่วถึง เพราะว่า การผกผันของฟังก์ชันเช่นนี้ ไม่มีอยู่จริง

ตัวอย่าง 14 ให้ f เป็นฟังก์ชัน จาก {a, b, c} ไป {1, 2, 3} โดยที่ $f(a) = 2, f(b) = 3$ และ $f(c) = 1$ ถามว่า f หาตัวผกผันได้หรือไม่? และถ้าเป็น อะไรคือฟังก์ชันผกผัน?

ผลเฉลย ฟังก์ชัน f หาตัวผกผันได้เนื่องจากมันเป็นหนึ่งต่อหนึ่งแบบไปทั่วถึง ฟังก์ชันผกผัน f^{-1} ย้อนลำดับการสมนัยกับที่กำหนดโดย f ดังนั้น $f^{-1}(1) = c, f^{-1}(2) = a, f^{-1}(3) = b$

ตัวอย่าง 15 ให้ f เป็นฟังก์ชันจากเซตของจำนวนเต็ม ไปเซตของจำนวนเต็ม โดยที่ $f(x) = x + 1$, ถามว่า f หาตัวผกผันได้หรือไม่? และถ้าหาได้ อะไรเป็นฟังก์ชันผกผัน?

ผลเฉลย ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันหาตัวผกผันได้ เพราะว่ามันเป็นหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง เช่นที่เราได้แสดงให้เห็นแล้ว การย้อนลำดับการสมนัย สมมติว่า y เป็น อิเมทของ x ดังนั้น $y = x + 1$ แล้ว $x = y - 1$ สิ่งนี้หมายความว่า $y - 1$ เป็นสมาชิกเพียงค่าเดียวของ **Z** นั่นคือส่งค่าไป y ด้วย f ดังนั้น $f^{-1}(y) = y - 1$

ตัวอย่าง 15.1 ฟังก์ชัน

$$f = \{(1, a), (2, c), (3, b)\}$$

จาก $X = \{1, 2, 3\}$ ไป $Y = \{a, b, c\}$ เป็นแบบหนึ่งต่อหนึ่ง และไปทั่วถึง

$$f^{-1} = \{(a, 1), (c, 2), (b, 3)\}$$

เป็นฟังก์ชันผกผัน

ตัวอย่าง 16 ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก **Z** ไป **Z** ด้วย $f(x) = x^2$ ถามว่า f หาตัวผกผันได้หรือไม่?

ผลเฉลย เนื่องจาก $f(-1) = f(1) = 1$, f จึงไม่ใช่แบบ หนึ่งต่อหนึ่ง ถ้าฟังก์ชันผกผันถูกนิยาม มันจะกำหนดสมาชิกสองตัวให้ 1 ดังนั้น f ไม่เป็น หาตัวผกผันได้

บทนิยาม 10 ให้ g เป็นฟังก์ชันจากเซต A ไปเซต B และให้ f เป็นฟังก์ชันจากเซต B ไปเซต C ผลประกอบของฟังก์ชัน f และ g ใช้สัญลักษณ์ fog นิยามดังนี้

$$(fog)(a) = f(g(a))$$

(Let g be a function from the set A to the set B and let f be a function from the set B to the set C. The **composition** of the function f and g, denoted by fog is defined by

$$(fog)(a) = f(g(a)) \quad)$$

พูดอีกอย่างหนึ่งคือ fog เป็นฟังก์ชันซึ่งกำหนดค่าให้กับสมาชิก a ของ A ด้วยสมาชิกซึ่งกำหนดค่าโดย f ไป g(a) โปรดสังเกตว่า ผลประกอบ fog ไม่สามารถนิยามได้ ถ้าพิสัยของ g ไม่เป็นเซตย่อยของโดเมนของ f ในรูป 7 แสดงให้เห็นผลประกอบของฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 17 ให้ g เป็นฟังก์ชัน จากเซต {a, b, c} ไปยังตัวมันเอง โดยที่ $g(a) = b$, $g(b) = c$ และ $g(c) = a$ ให้ f เป็นฟังก์ชันจากเซต {a, b, c} ไปเซต {1, 2, 3} โดยที่ $f(a) = 3$, $f(b) = 2$ และ $f(c) = 1$ จงหาผลประกอบของ f และ g และอะไรคือผลประกอบของ g และf?

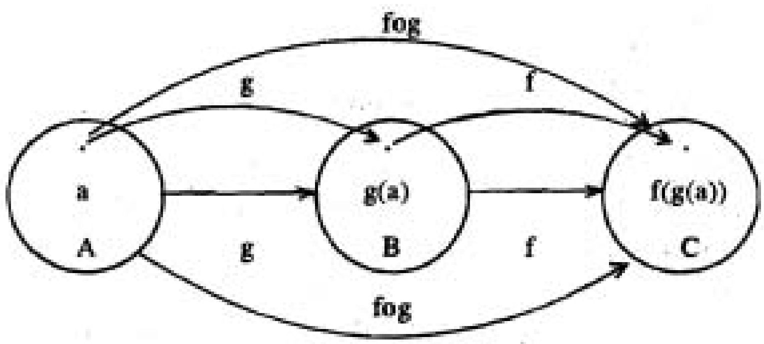
ผลเฉลย ผลประกอบ fog นิยามโดย

$$(fog)(a) = f(g(a)) = f(b) = 2$$

$$(fog)(b) = f(g(b)) = f(c) = 1$$

$$(fog)(c) = f(g(c)) = f(a) = 3$$

โปรดสังเกตว่า gof นิยามไม่ได้ เพราะว่า พิสัยของ f ไม่เป็น เซตย่อยของโดเมนของ g



รูป 7 ผลประกอบของฟังก์ชัน f และ g

ตัวอย่าง 17.1 ให้

$g = \{(1, a), (2, a), (3, c)\}$ เป็นฟังก์ชัน จาก $X = \{1, 2, 3\}$ ไป $Y = \{a, b, c\}$ และ $f = \{(a, y), (b, x), (c, z)\}$ เป็นฟังก์ชัน จาก Y ไป $Z = \{x, y, z\}$ ผลประกอบของฟังก์ชันจาก X ไป Z คือ

$$fog = \{(1, y), (2, y), (3, z)\}$$

ตัวอย่าง 18 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจากเซตของจำนวนเต็ม ไปเซตของจำนวนเต็ม นิยามโดย $f(x) = 2x + 3$ และ $g(x) = 3x + 2$ จงหาผลประกอบของ f และ g, จงหาผลประกอบของ g และ f

ผลเฉลย ผลประกอบของ fog และ gof ทั้งคู่นิยามดังนี้

$$(fog)(x) = f(g(x)) = g(3x + 2) = 2(3x + 2) + 3 = 6x + 7$$

และ

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = 3(2x + 3) + 2 = 6x + 11$$

หมายเหตุ ถึงแม้ว่า fog และ gof นิยามได้ สำหรับฟังก์ชัน f และ g ในตัวอย่าง 18 อย่างไรก็ตาม fog และ gof ไม่เท่ากัน พูดอีกอย่างหนึ่ง คือ กฎการสลับที่ (commutative law) ไม่เป็นจริงสำหรับผลประกอบของฟังก์ชัน

เมื่อผลประกอบของฟังก์ชันและการผกผันของมัน กำหนดขึ้นมาไม่ว่าจะเป็นอันดับอย่างไรก็ตาม ฟังก์ชันเอกลักษณ์จะได้มาด้วย เช่น สมมติว่า f เป็นหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึงจากเซต A ไปเซต B แล้วฟังก์ชันผกผัน $f^{-1}(b) = a$ เมื่อ $f(a) = b$ และ $f(a) = b$ เมื่อ $f^{-1}(b) = a$

ดังนั้น $(f^{-1}of)(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a$

และ $(fof^{-1})(b) = f(f^{-1}(b)) = f(a) = b$

ดังนั้น $f^{-1}of = i_A$ และ $fof^{-1} = i_B$ เมื่อ i_A และ i_B เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ บนเซต A และ B ตามลำดับ นั่นคือ $(f^{-1})^{-1} = f$

กราฟของฟังก์ชัน (The Graphs of Functions)

เราสามารถ associate เซตของคู่ต่างๆ ใน $A \times B$ ให้กับแต่ละฟังก์ชันจาก A ไป B เซตของคู่ต่างๆ เรียกว่า กราฟ (graph) ของฟังก์ชัน และบ่อยครั้งแสดงด้วยภาพ เพื่อช่วยในการทำความเข้าใจพฤติกรรมของฟังก์ชัน

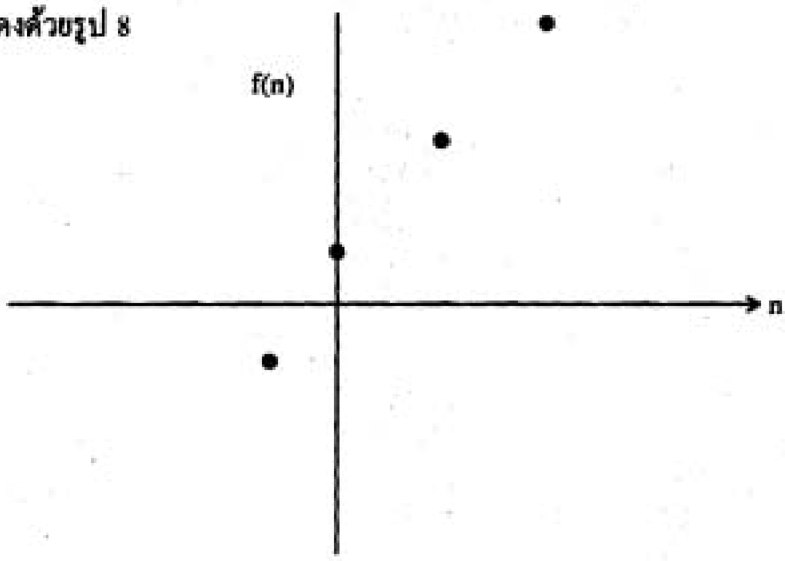
บทนิยาม 11 ให้ f เป็นฟังก์ชัน จากเซต A ไปเซต B กราฟของฟังก์ชัน f คือเซตของคู่อันดับ $\{(a, b) \mid a \in A$ และ $f(a) = b\}$

(Let f be a function from the set A to the set B. The graph of the function f is the set of ordered pairs $\{(a, b) \mid a \in A$ and $f(a) = b\}$.)

จากคำจำกัดความนี้ กราฟของฟังก์ชัน f จาก A ไป B คือเซตย่อยของ $A \times B$ ประกอบด้วย คู่อันดับต่าง ด้วยตัวที่สอง เท่ากับสมาชิกของ B กำหนดค่าโดย f ไปยังตัวแรก

ตัวอย่าง 19 จงวาดภาพ กราฟของฟังก์ชัน $f(n) = 2n + 1$ จงหาเซตของจำนวนเต็ม ไปเซตของจำนวนเต็ม

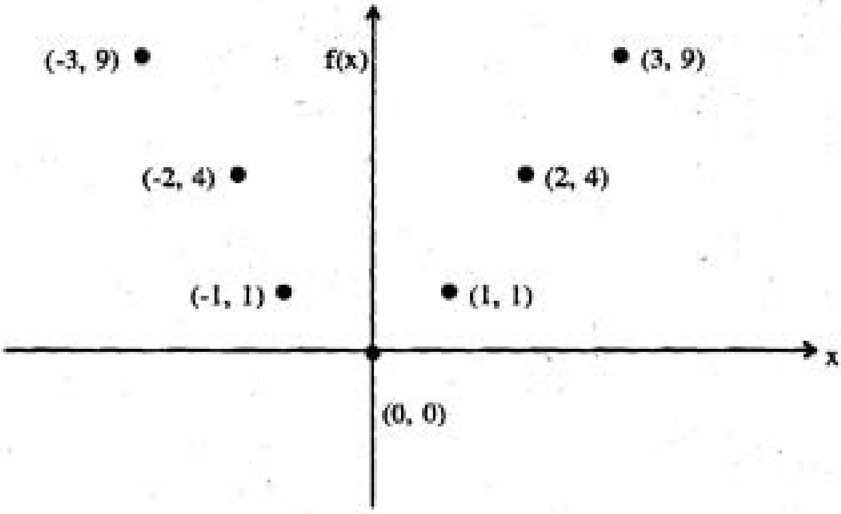
ผลเฉลย กราฟของ f คือเซตของคู่อันดับ ของรูปแบบ $(n, 2n + 1)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม, กราฟนี้ แสดงด้วยรูป 8



รูป 8 กราฟของฟังก์ชัน $f(n) = 2n + 1$ จาก Z ไป Z

ตัวอย่าง 20 จงวาดภาพ กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ จากเซตของจำนวนเต็ม ไปยังเซตของจำนวนเต็ม

ผลเฉลย กราฟของ f คือ เซตของคู่อันดับต่าง ของรูปแบบ $(x, f(x)) = (x, x^2)$ เมื่อ x เป็นจำนวนเต็ม กราฟนี้ แสดงในรูป 9



รูป 9 กราฟของ $f(x) = x^2$ จาก Z ไป Z

ฟังก์ชันที่สำคัญ (Some Important Functions)

ต่อไป เราจะแนะนำ ฟังก์ชันที่สำคัญ 2 ชุด ในคณิตศาสตร์ไม่ต่อเนื่อง ชื่อ ฟังก์ชันฟลอร์ (floor) และ ฟังก์ชันซีลอิง (ceiling) ให้ x เป็นจำนวนจริง ฟังก์ชันฟลอร์ ปัดเศษ x ให้ใกล้จำนวนเต็มที่สุด ซึ่งน้อยกว่าหรือเท่ากับ x และฟังก์ชันซีลอิง ปัดเศษ x ให้ใกล้จำนวนเต็มซึ่งมากกว่าหรือเท่ากับ x ฟังก์ชันนี้ บ่อยครั้งใช้เมื่อมีการนับสิ่งของ มันมีบทบาทสำคัญ ในการวิเคราะห์ จำนวนของขั้นตอนซึ่งใช้โดยกระบวนการแก้ปัญหาของขนาด อย่างใดอย่างหนึ่ง

บทนิยาม 12 ฟังก์ชันฟลอร์ กำหนดค่าให้กับ จำนวนจริง x ด้วยจำนวนเต็มใหญ่ที่สุด ซึ่งมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ x และค่าของฟังก์ชันฟลอร์ที่ x ใช้สัญลักษณ์ $\lfloor x \rfloor$ ฟังก์ชันซีลอิง กำหนดค่าให้กับจำนวนจริง x ด้วยจำนวนเต็มเล็กที่สุด ซึ่งมากกว่าหรือเท่ากับ x ค่าของฟังก์ชันซีลอิงที่ x ใช้สัญลักษณ์ $\lceil x \rceil$

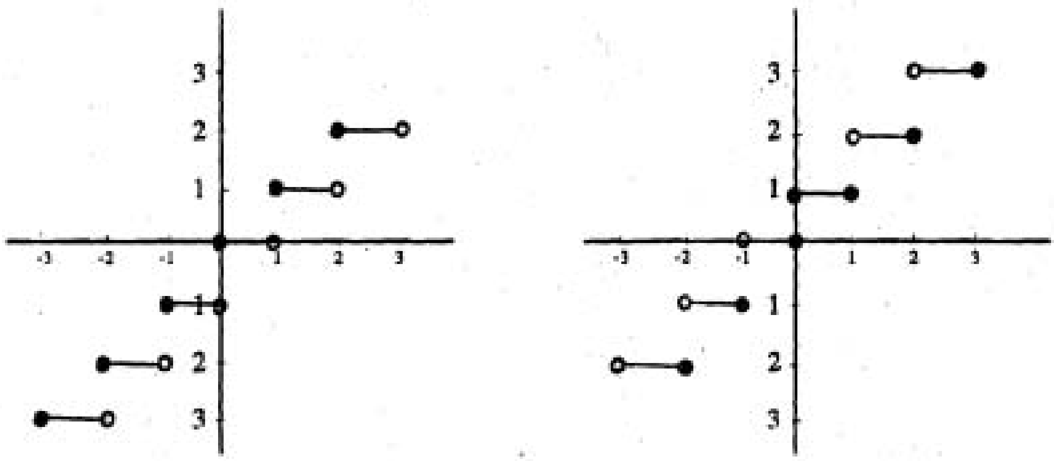
(The **floor function** assigns to the real number x the largest integer that is less than or equal to x. The value of the floor function at x is denoted by $\lfloor x \rfloor$. The **ceiling function** assigns to the real number x the smallest integer that is greater than or equal to x. The value of the ceiling function at x is denoted by $\lceil x \rceil$.)

หมายเหตุ ฟังก์ชันฟลอร์ บ่อยครั้ง เรียกว่า ฟังก์ชันจำนวนเต็มบวก (greatest integer function) ใช้สัญลักษณ์ $\lfloor x \rfloor$

ตัวอย่าง 21 จงแสดงค่าของฟังก์ชันฟลอร์ และฟังก์ชันซีลอิง

$$\lfloor 1/2 \rfloor = 0, \qquad \lceil 1/2 \rceil = 1$$
$$\lfloor -1/2 \rfloor = -1, \qquad \lceil -1/2 \rceil = 0$$
$$\lfloor 3.1 \rfloor = 3, \qquad \lceil 3.1 \rceil = 4$$
$$\lfloor 7 \rfloor = 7, \qquad \lceil 7 \rceil = 7$$

เราแสดงกราฟของฟังก์ชันฟลอร์และฟังก์ชันซีลอิง ในรูป 10 มีฟังก์ชันบางชนิดซึ่งจะใช้ในหนังสือเล่มนี้ ได้แก่ พหุนาม (polynomial), ลอการิทึม (logarithm) และ ฟังก์ชันชี้กำลัง (exponential function) ในหนังสือเล่มนี้ สัญลักษณ์ log x จะใช้แทนลอการิทึม ฐานสองของ x เพราะว่าสองเป็นเลขฐานซึ่งปกติจะใช้สำหรับลอการิทึม เราใช้ลอการิทึมฐาน b เมื่อ b เป็นเลขจำนวนจริงใดๆ มีค่ามากกว่า 1 ใช้สัญลักษณ์ $\log_b x$



(a) $y = \lfloor x \rfloor$ (b) $y = \lceil x \rceil$

รูป 10 กราฟของฟังก์ชันฟลอร์ และฟังก์ชันซีลอิง

The floor of x "round x down" while the ceiling of x "round x up".

ตัวอย่าง 22 ค่าแสตมป์ไปรษณีย์ $P(w)$ เป็นฟังก์ชันของ น้ำหนัก w กำหนดโดยสมการข้างล่างนี้

$$P(w) = 29 + 23\lceil w - 1 \rceil, \quad 11 \geq w > 0$$

จงหา $P(3.7)$ และ $P(2)$

ผลเฉลย

$$\begin{aligned} P(3.7) &= 29 + 23\lceil 3.7 - 1 \rceil \\ &= 29 + 23\lceil 2.7 \rceil \\ &= 29 + 23 \cdot 3 \\ &= 29 + 69 = 98 \\ P(2) &= 29 + 23\lceil 2 - 1 \rceil \\ &= 29 + 23\lceil 1 \rceil \\ &= 29 + 23 \cdot 1 = 52 \end{aligned}$$

บทนิยาม 13 ถ้า x เป็น จำนวนเต็ม ไม่ใช่ค่าลบ และ y เป็น จำนวนเต็มบวก เรานิยาม **x mod y** ให้เป็นเศษ ของ x หารด้วย y

(If x is a nonnegative integer and y is a positive integer, we define **x mod y** to be the remainder when x is divided by y.)

ตัวอย่าง 23

$$6 \bmod 2 = 0 \quad , \quad 8 \bmod 12 = 8$$

$$5 \bmod 1 = 0 \quad ; \quad 199673 \bmod 2 = 1$$

ตัวอย่าง 24 **ฟังก์ชันแบบแฮช** (Hash Functions) สมมติว่าเรามีเซลล์ (cells) ใน หน่วยความจำคอมพิวเตอร์ ดรรชนี จาก 0 ถึง 10 (ดูรูป 11) ต้องการเก็บและค้นคืน จำนวนเต็มไม่ใช่ค่าลบใดๆ ในเซลล์เหล่านี้ กลยุทธวิธีหนึ่ง (one approach) คือใช้ ฟังก์ชันแบบแฮช

ฟังก์ชันแบบแฮช จะนำข้อมูล (data item) เข้าไปเก็บ หรือ ค้นคืน และคำนวณทางเลือกที่หนึ่งสำหรับตำแหน่งให้กับข้อมูลตัวนั้น ตัวอย่างเช่น ต้องการเก็บหรือค้นคืน จำนวน n เลือกสิ่งแรกสำหรับตำแหน่ง $n \bmod 11$ ฟังก์ชันแบบแฮช เป็นดังนี้

$h(n) = n \bmod 11$

รูป 11 แสดงผลลัพธ์ ของการเก็บ 15, 558, 32, 132, 102 และ 5 ในอันดับนี้ ซึ่งตอนเริ่มต้นเป็นเซลล์ว่าง

ต่อไป สมมติว่า ต้องการเก็บเลข 257 เพราะว่า $h(257) = 4$, 257 จัดการเก็บที่ตำแหน่ง 4 อย่างไรก็ตาม ตำแหน่งนี้ มีการเก็บข้อมูลไปเรียบร้อยแล้ว ในกรณีเช่นนี้ เรียกว่า การชนกัน (collision) เกิดขึ้น เพื่อให้ชัดเจนมากขึ้น การชนกันเกิดขึ้น สำหรับฟังก์ชันแบบแฮช H ถ้า $H(x) = H(y)$ แต่ $x \neq y$ การแก้ปัญหานี้

132			102	15	5	257		558		32
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

รูป 11

นโยบายแก้ปัญหาการชนกัน (collision resolution policy) จึงจำเป็นต้องมี นโยบายเบื้องต้นวิธีหนึ่งคือ หาเซลล์ว่างสูงสุดถัดไป (สมมติว่า 0 ต่อจาก 10) ถ้าเราใช้นโยบายแก้ปัญหาการชนกันนี้ เราจะเก็บ 257 ที่ตำแหน่ง 6 (ดูรูป 11)

ถ้าเราต้องการหาตำแหน่งที่อยู่ซึ่งเก็บ ค่า n ให้คำนวณ $m = h(n)$ และเริ่มด้วยการมองหาที่ตำแหน่ง m ถ้า n ไม่ได้อยู่ที่ตำแหน่งนี้ ให้มองที่ตำแหน่งสูงสุดถัดไป (สมมติว่า 0 ต่อจาก 10) ถ้า n ไม่ได้อยู่ที่ตำแหน่งนี้อีก ให้ดำเนินการต่อไป กับตำแหน่งสูงสุดถัดไป เช่นนี้เรื่อยๆ ถ้าเรามาถึงเซลล์ว่าง หรือ กลับคืน ยังตำแหน่งเริ่มต้น จึงสรุปได้ว่า n ไม่ได้อยู่ในหน่วยความจำ กรณีอื่นๆ แสดงว่า เราได้ตำแหน่งของ n

แบบฝึกหัดเสริม

จงบอกว่า ความสัมพันธ์แต่ละชุด ในข้อ 1-5 จาก $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ไป $Y = \{a, b, c, d\}$ เป็นฟังก์ชัน หรือไม่? ถ้าเป็นฟังก์ชัน จงหา โดเมนและพิสัยของมัน และจงบอกว่าเป็นฟังก์ชันแบบ หนึ่งต่อหนึ่ง หรือ ไปทั่วถึง ถ้าเป็นแบบ หนึ่งต่อหนึ่ง และไปทั่วถึง ทั้งคู่ จงให้รายละเอียดของฟังก์ชันผกผัน เป็นเซตของคู่อันดับ และจงบอกโดเมนและพิสัยของฟังก์ชันผกผัน

1. $\{(1, a), (2, a), (3, c), (4, b)\}$
2. $\{(1, c), (2, a), (3, b), (4, c), (2, d)\}$
3. $\{(1, c), (2, d), (3, a), (4, b)\}$
4. $\{(1, d), (2, d), 4, a)\}$
5. $\{(1, b), (2, b), (3, b), (4, b)\}$
6. จงยกตัวอย่างฟังก์ชัน ซึ่งเป็นแบบหนึ่งต่อหนึ่ง แต่ไม่ใช่ ไปทั่วถึง
7. จงยกตัวอย่างฟังก์ชัน ซึ่งเป็นแบบไปทั่วถึง แต่ไม่ใช่ หนึ่งต่อหนึ่ง
8. จงยกตัวอย่างฟังก์ชัน ซึ่งไม่ใช่แบบหนึ่งต่อหนึ่ง และไม่ใช่แบบ ไปทั่วถึง
9. กำหนดให้

   $g = \{(1, b), (2, c), (3, a)\}$

   เป็นฟังก์ชัน จาก $X = \{1, 2, 3\}$ ไป $Y = \{a, b, c, d\}$ และ

   $f = \{(a, x), (b, x), (c, z), (d, w)\}$

   เป็นฟังก์ชัน จาก Y ไป $Z = \{w, x, y, z\}$

   จงเขียน $f \circ g$ เป็นเซตของคู่อันดับ
10. กำหนดให้

    $f = \{(x, x^2) \mid x \in X\}$

    เป็นฟังก์ชัน จาก $X = \{-5, -4, \ldots, 4, 5\}$ ไปเซตของจำนวนเต็ม จงเขียน f เป็นเซตของคู่อันดับ และ f เป็นฟังก์ชันแบบ หนึ่งต่อหนึ่ง หรือ ไปทั่วถึง หรือไม่ ?
11. จะมีจำนวนฟังก์ชัน จาก $\{1, 2\}$ ไป $\{a, b\}$ เท่าไหร่? ชุดไหนบ้างเป็นแบบหนึ่งต่อหนึ่ง, ชุดไหนบ้างเป็นแบบ ไปทั่วถึง
12. กำหนดให้

    $f = \{(a, b), (b, a), (c, b)\}$

    เป็นฟังก์ชัน จาก $X = \{a, b, c\}$ ไป X :

(a) จงเขียน $f \circ f$ และ $f \circ f \circ f$ เป็นเซตของคู่อันดับ

(b) นิยาม

$$f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$$

เป็นผลประกอบ n-fold ของ f กับตัวมันเอง

จงหา f^8 และ f^{623}

13. ให้ f เป็นฟังก์ชัน จาก $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ไป X นิยามดังนี้

$$f(x) = 4x \bmod 5$$

จงเขียน f เป็นเซตของคู่อันดับ, f เป็นฟังก์ชันแบบ หนึ่งต่อหนึ่ง หรือแบบ ไปทั่วถึง?

14. ให้ f เป็นฟังก์ชัน จาก $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ไป X นิยามดังนี้

$$f(x) = 4x \bmod 6$$

จงเขียน f เป็นเซตของคู่อันดับ, f เป็นฟังก์ชันแบบ หนึ่งต่อหนึ่ง หรือแบบ ไปทั่วถึง?

15. ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก

$$X = \{0, 1, \ldots, m-1\}$$

นิยามดังนี้

$$f(x) = nx \bmod m$$

จงหาเงื่อนไข บน m และ n ซึ่งแน่ใจว่า f เป็นฟังก์ชันแบบ หนึ่งต่อหนึ่ง และ ไปทั่วถึง

สำหรับ ฟังก์ชันแบบแฮชแต่ละชุด ในข้อ 16-19 จงแสดงว่า ข้อมูลจะใส่เข้าไปเป็นอันดับ ซึ่งเริ่มต้นกำหนดเป็น เซลล์ว่างอย่างไร? ให้ใช้นโยบายแก้ปัญหาการชนกัน ของ ตัวอย่าง 24

16. $h(x) = x \bmod 11$, เซลล์ มีดรรชนี เป็น 0 ไป 10

ข้อมูลคือ 53, 13, 281, 743, 377, 20, 10, 796

17. $h(x) = x \bmod 17$, เซลล์ มีดรรชนี เป็น 0 ไป 16

ข้อมูลคือ 714, 631, 26, 373, 775, 906, 509, 2032, 42, 4, 136, 1028

18. $h(x) = x^2 \bmod 11$, เซลล์ และข้อมูล เหมือนข้อ 16

19. $h(x) = (x^2 + x) \bmod 17$, เซลล์ และข้อมูล เหมือนข้อ 17

20. สมมติว่าเราเก็บและค้นคืนข้อมูล เช่นที่อธิบายในตัวอย่าง 24 ถ้าเราเอาข้อมูลออก จะมีปัญหาอะไรเกิดขึ้นหรือไม่? อธิบาย

21. สมมติว่าเราเก็บข้อมูล เช่นที่อธิบายในตัวอย่าง 24 และเราไม่เคยเก็บ ข้อมูลมากกว่า 10 ตัว จะมีปัญหาใดเกิดขึ้นหรือไม่ เมื่อค้นคืนข้อมูล ถ้าเราหยุดค้นหาเมื่อพบเซลล์ว่าง? อธิบาย

22. สมมติว่าเราเก็บข้อมูล เช่นที่อธิบายในตัวอย่าง 24 และค้นคืนข้อมูล เช่นที่อธิบายในข้อ 21. จะมีปัญหาใดๆ เกิดขึ้นหรือไม่? ถ้าเราเอาข้อมูลออก, อธิบาย

ให้ g เป็นฟังก์ชัน จาก X ไป Y และให้ f เป็นฟังก์ชัน จาก Y ไป Z สำหรับข้อความแต่ละชุด ในข้อ 23-29 ถ้าข้อความเป็นจริง จงเขียน จริง ถ้าข้อความเป็นเท็จ จงยกตัวอย่าง

23. ถ้า f เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว $f \circ g$ เป็น หนึ่งต่อหนึ่ง

24. ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันแบบ ไปทั่วถึง, แล้ว $f \circ g$ เป็น ไปทั่วถึง

25. ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่งและ ไปทั่วถึง, แล้ว $f \circ g$ เป็น หนึ่งต่อหนึ่งและไปทั่วถึง

26. ถ้า $f \circ g$ เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง, แล้ว f เป็นฟังก์ชันแบบ หนึ่งต่อหนึ่ง

27. ถ้า $f \circ g$ เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง, แล้ว g เป็นฟังก์ชันแบบ หนึ่งต่อหนึ่ง

28. ถ้า $f \circ g$ เป็นฟังก์ชันแบบ ไปทั่วถึง, แล้ว f เป็นฟังก์ชันแบบ ไปทั่วถึง

29. ถ้า $f \circ g$ เป็นฟังก์ชันแบบ ไปทั่วถึง แล้ว g เป็นฟังก์ชันแบบ ไปทั่วถึง

ถ้า f เป็นฟังก์ชัน จาก X ไป Y และ $A \subseteq X$ และ $B \subseteq Y$ เรานิยาม

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

เราเรียก $f^{-1}(B)$ เป็น ภาพผกผัน (inverse image) ของ B ภายใต้ f

30. ให้ $g = \{(1, a), (2, c), (3, c)\}$

เป็นฟังก์ชัน จาก $X = \{1, 2, 3\}$ ไป $Y = \{a, b, c, d\}$

ให้ $S = \{1\}$, $T = \{1, 3\}$, $U = \{a\}$ และ $V = \{a, c\}$

จงหา $g(S)$, $g(T)$, $g^{-1}(U)$ และ $g^{-1}(V)$

แบบฝึกหัด 2.6

1. ทำไม f ไม่ใช่ฟังก์ชัน จาก R ไป R ในสมการต่อไปนี้

   a) $f(x) = 1/x$ b) $f(x) = \sqrt{x}$

   c) $f(x) = \pm\sqrt{(x^2 + 1)}$

2. จงบอกว่า f เป็นฟังก์ชัน จาก Z ไป R หรือไม่? ถ้า

   a) $f(n) = \pm n$ b) $f(n) = \sqrt{n^2 + 1}$

   c) $f(n) = 1/(n^2 - 4)$

3. จงบอกว่า f เป็นฟังก์ชัน จากเซตของสายบิตทั้งหมด (all bit strings) ไป เซตของจำนวนเต็มหรือไม่? ถ้า

   a) f(S) เป็นตำแหน่งของบิตศูนย์ใน S

   b) f(S) เป็นจำนวนบิตหนึ่งใน S

   c) f(S) เป็น จำนวนเต็ม i เล็กที่สุด โดยที่บิตที่ i ของ S เท่ากับ 1 และ f(S) = 0 เมื่อ S เป็นสายอักขระว่าง (empty string) คือสายอักขระซึ่งไม่มีบิตใดๆ

4. จงหาโดเมนและพิสัยของฟังก์ชันต่อไปนี้

   a) ฟังก์ชันซึ่งกำหนดค่าให้กับ จำนวนเต็มไม่เป็นค่าลบแต่ละตัวด้วยเลขหลักสุดท้ายของมัน

   b) ฟังก์ชันซึ่งกำหนดค่า จำนวนเต็มใหญ่ที่สุดถัดไปให้กับจำนวนเต็มบวก

   c) ฟังก์ชันซึ่งกำหนดค่าให้กับสายบิต ด้วยจำนวนบิตหนึ่งในสายอักขระ

   d) ฟังก์ชันซึ่งกำหนดค่าให้กับสายบิต ด้วยจำนวนบิตในสายอักขระ

5. จงคำนวณหา

   a) $\lceil 3/4 \rceil$ b) $\lfloor 7/8 \rfloor$ c) $\lceil -3/4 \rceil$

   d) $\lfloor -7/8 \rfloor$ e) $\lceil 3 \rceil$ f) $\lfloor -1 \rfloor$

6. จงบอกว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้แต่ละชุดจาก {a, b, c, d} ไปยังตัวมันเองเป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่?

   a) f(a) = b, f(b) = a, f(c) = c, f(d) = d

   b) f(a) = b, f(b) = b, f(c) = d, f(d) = c

   c) f(a) = d, f(b) = b, f(c) = d, f(d) = d

7. ฟังก์ชันชุดไหน? ในแบบฝึกหัดข้อ 6 เป็นฟังก์ชันแบบไปทั่วถึง

8. จงบอกว่า ฟังก์ชันแต่ละชุดต่อไปนี้ จาก Z ไป Z เป็นแบบหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

a) $f(n) = n - 1$ b) $f(n) = n^2 + 1$

c) $f(n) = n^3$ d) $f(n) = \lceil n/2 \rceil$

9. ฟังก์ชันชุดไหน? ในแบบฝึกหัดข้อ 8 เป็นฟังก์ชันแบบไปทั่วถึง

10. จงให้ตัวอย่างของฟังก์ชันจาก N ไป N ซึ่งเป็นแบบ

a) หนึ่งต่อหนึ่งแต่ไม่ใช่ไปทั่วถึง

b) ไปทั่วถึงแต่ไม่ใช่หนึ่งต่อหนึ่ง

c) ไปทั่วถึงและหนึ่งต่อหนึ่ง ทั้งคู่ (แต่แตกต่างจาก ฟังก์ชันเอกลักษณ์)

11. จงบอกว่า ฟังก์ชันแต่ละชุดต่อไปนี้ เป็น bijection จาก R ไป R หรือไม่

a) $f(x) = 2x + 1$ b) $f(x) = x^2 + 1$

c) $f(x) = x^3$ d) $f(x) = (x^2 + 1)/(x^2 + 2)$

12. ให้ $f(x) = 2x$ จงหา

a) f(Z) b) f(N) c) f(R)

13. สมมติว่า g เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B และ f เป็นฟังก์ชันจาก B ไป C

a) จงแสดงให้เห็นว่า ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่งทั้งคู่ ดังนั้น f o g จะเป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่งด้วย

b) จงแสดงให้เห็นว่า ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันแบบไปทั่วถึงทั้งคู่ ดังนั้น f o g จะเป็นฟังก์ชันแบบไปทั่วถึงด้วย

14. ถ้า f และ f o g เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง, แล้ว g จะเป็นหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่? จงให้เหตุผล

15. ถ้า f และ f o g เป็นไปทั่วถึง, แล้ว g จะเป็นไปทั่วถึงหรือไม่? จงให้เหตุผล

16. จงหา f o g และ g o f เมื่อ $f(x) = x^2 + 1$ และ $g(x) = x + 2$ เป็นฟังก์ชันจาก R ไป R

17. จงหา f + g และ fg สำหรับฟังก์ชัน f และ g ซึ่งกำหนดให้ในแบบฝึกหัดข้อ 16

18. ให้ $f(x) = ax + b$ และ $g(x) = cx + d$ เมื่อ a, b, c และ d เป็นค่าคงที่ จงบอกว่าค่าคงที่ตัวไหน a, b, c และ d ซึ่งจะทำให้ f o g = g o f เป็นจริง

19. จงแสดงให้เห็นว่า ฟังก์ชัน $f(x) = ax = b$ จาก R ไป R เป็นฟังก์ชันหาตัวผกผันได้ เมื่อ a และ b เป็นค่าคงที่ ซึ่ง $a \neq 0$ และ จงหาฟังก์ชันผกผันของ f

20. ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปเซต B ให้ S และ T เป็นเซตย่อยของ A จงแสดงให้เห็นว่า

a) $f(S \cup T) = F(S) \cup F(T)$ b) $F(S \cap T) = F(S) \cap F(T)$

21. จงให้ตัวอย่างเพื่อแสดงให้เห็นว่า การเป็นเซตย่อย ในส่วน (b) ในแบบฝึกหัดข้อ 20 อาจเป็นสิ่งถูกต้อง

ให้ f เป็นฟังก์ชันจากเซต A ไปเซต B ให้ S เป็นเซตย่อยของ B เรานิยาม ภาพผกผัน (inverse image) ของ S เป็นเซตย่อยของ A ประกอบด้วย pre-image ทั้งหมดของสมาชิกของ S เราใช้สัญลักษณ์ ภาพผกผันของ S ด้วย $f^{-1}(S)$ ดังนั้น

$$f^{-1}(S) = \{a \in A \mid f(a) \in S\}$$

22. ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก R ไป R นิยามโดย $f(x) = x^2$ จงหา

a) $f^{-1}(\{1\})$ b) $f^{-1}(\{x \mid 0 < x < 1\})$

c) $f^{-1}(\{x \mid x > 4\})$

23. ให้ $g(x) = \lfloor x \rfloor$ จงหา

a) $g^{-1}(\{0\})$ b) $g^{-1}(\{-1, 0, 1\})$

c) $g^{-1}(\{x \mid 0 < x < 1\})$

24. ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ให้ S และ T เป็นเซตย่อยของ B จงแสดงให้เห็นว่า

a) $f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$

b) $f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$

25. ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ให้ S เป็นเซตย่อยของ B จงแสดงให้เห็นว่า $f^{-1}(\overline{S}) = \overline{f^{-1}(S)}$

26. จงแสดงให้เห็นว่า $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$

27. ให้ x เป็นจำนวนจริง จงแสดงให้เห็นว่า

$$\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + 1/2 \rfloor$$

28. จงวาดกราฟของฟังก์ชัน $f(n) = 1 - n^2$ จาก Z ไป Z

29. จงวาดกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \lfloor 2x \rfloor$ จาก R ไป R

30. จงวาดกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 + 1$

32. สมมติว่า f เป็นฟังก์ชันหาตัวผกผันได้ จาก Y ไป Z และ g เป็นฟังก์ชันหาตัวผกผันได้ จาก X ไป Y จงแสดงให้เห็นว่า การผกผันของผลประกอบ f o g ถูกกำหนดโดย

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$