บทที่ 1
ความรู้เบื้องต้น
(Introduction)

1.1 เซต (Sets)

1.2 การดำเนินการบนเซต (Set Operations)

1.3 ลำดับและการรวมยอด (Sequences and Summations)

1.4 จำนวนเต็มและการหาร (The Integers and Division)

1.5 จำนวนเต็มและอัลกอริทึม (Integers and Algorithms)

แนวคิดเรื่องเซตเป็นพื้นฐานของวิชาคณิตศาสตร์ทั้งหมดและงานประยุกต์ทางคณิตศาสตร์

1.1 เซต*

เซต หมายถึงกลุ่มของสิ่งของซึ่งให้นิยามดีแล้วสิ่งของนี้เรียกว่าสมาชิกของเซต

(A **set** is any well-defined collection of objects called the elements or members of the set.)

ตัวอย่างเช่น เซตของนักศึกษาทุกคนในชั้นเรียน CT 203, เซตของตัวสระในภาษาอังกฤษ, เซตของจำนวนจริงระหว่าง 0 ถึง 1 เป็นต้น

เซตที่มีขนาดไม่ใหญ่มากเรียกว่าเซตจำกัด (finite set) เราอธิบายเซตโดยเขียนรายการสมาชิกอยู่ภายในเครื่องหมายวงเล็บปีกกา สมาชิกแต่ละตัวให้คั่นด้วยเครื่องหมาย comma (,) ชื่อเซตใช้อักษรตัวใหญ่อยู่ทางซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับ สมาชิกแต่ละตัวใช้อักษรตัวเล็ก

ตัวอย่าง 1 ให้ V เป็นเซตของตัวสระในภาษาอังกฤษ เขียนดังนี้

$V = \{a, e, i, o, u\}$

ตัวอย่างอื่น ๆ เช่น

ให้ Z^+ = เซตของจำนวนเต็มบวก ได้แก่ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

N = เซตของจำนวนธรรมชาติ หรือเซตของจำนวนเต็มบวกไม่เป็นลบ ได้แก่ 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

R = เซตของจำนวนจริง (set or real numbers)

Q = เซตของจำนวนตรรกยะ (set of rational numbers)

ในที่นี้ Z, N, R และ Q เรียกว่าเซตอนันต์ (infinite set)

ตัวอย่าง 2 ให้ A เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก มีค่าน้อยกว่า 5 เขียนดังนี้

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

หมายถึง เซต A มีสมาชิกสี่ตัว คือ 1, 2, 3 และ 4 ดังนั้น A เป็นเซตจำกัด

ข้อสังเกต

(1) สมาชิกในเซตจะเรียงลำดับอย่างไรก็ได้ ดังนั้น เซต A อาจจะเขียนดังนี้

$A = \{1, 3, 4, 2\}$ หรือ $A = \{4, 1, 3, 2\}$ หรือ $A = \{2, 4, 3, 1\}$

ทั้งหมดมีความหมายเหมือนกัน

(2) สมาชิกทั้งหมดในเซตต้องแตกต่างกัน ดังนั้น สมาชิกซ้ำกันจึงถือว่ามีเพียงหนึ่งตัว

---

*Rosen หน้า 111 ให้นิยามเซตดังนี้

"A **set** is an unordered collection of objects."

"The objects in a set are also called the elements, or members, of the set."

จากตัวอย่างข้างต้น เซต A อาจเขียนดังนี้

$A = \{1, 2, 2, 3, 4, 4\}$ หรือ $A = \{4, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1\}$

ถ้าเป็นเซตจำกัดขนาดใหญ่ หรือ **เซตอนันต์** (infinite set) เราอธิบายเซต โดยเขียนคุณสมบัติที่จำเป็นสำหรับการเป็นสมาชิก

ตัวอย่างเช่น

$B = \{x \mid x \text{ is a positive, even integer}\}$

หมายถึง เซต B มีสมาชิกเป็นจำนวนเต็มคู่บวก ทั้งหมด

ดังนั้นเซตนี้จึงประกอบด้วยจำนวนเต็ม 2, 4, 6, 8, ... เพราะฉะนั้น B เป็นเซตอนันต์

ตัวอย่าง 3 เซตของจำนวนเต็มบวกมีค่าน้อยกว่า 100 ใช้สัญลักษณ์ ดังนี้

$\{1, 2, 3, 4, \ldots, 99\}$

The set of even integer is

$E = \{n \mid n \in z, 2 \text{ divides } n\}$

จากตัวอย่างแรก เขียนดังนี้

$A = \{x \mid x \text{ is a positive integer less than } 5\}$

เครื่องหมาย vertical bar "|" อ่านว่า such that สมการข้างต้นจึงอ่านว่า "A เท่ากับเซตของ x ทุกตัว โดยที่ x เป็นจำนวนเต็มบวกมีค่าน้อยกว่า 5" ในที่นี้ คุณสมบัติที่จำเป็นสำหรับการเป็นสมาชิกของเซต เรียกว่า **ประพจน์** (proposition) ซึ่งเป็นประโยค (sentence) หรือข้อความสั่ง (statement) เช่น จำนวนเต็มบวกมีค่าน้อยกว่า 5 โปรดสังเกตว่าคุณสมบัติของการเป็นสมาชิกของเซตจะปรากฏหลังเครื่องหมาย | เสมอ

ให้ N เป็นเซตของจำนวนเต็ม ไม่เป็นลบ (set of nonnegative integer)

ถ้า X เป็นเซตจำกัด มีสมาชิก n ตัว $n \in N$

เราให้

$|X|$ = จำนวนสมาชิกในเซต X หรือเรียกว่าจำนวนนับ (cardinality) ของเซต X

เพราะฉะนั้น $n = |X|$

ถ้า x อยู่ในเซต X หรือ x เป็นสมาชิกของเซต X เขียนดังนี้

$x \in X$ ถ้า x ไม่อยู่ในเซต X หรือ x ไม่ใช่สมาชิกของเซต X เขียนดังนี้ $x \notin X$

จากตัวอย่างข้างต้น $|A| = 4$ และ $|V| = 5$

$1 \in A$ แต่ $1 \notin B$, $a \in V$ แต่ $b \notin V$

เซตซึ่งไม่มีสมาชิก เรียกว่า **เซตว่าง** (empty หรือ null หรือ void set) ใช้สัญลักษณ์ ϕ

เพราะฉะนั้น $\phi = \{\ \}$ และ $|\phi| = 0$

ตัวอย่าง 4 เซตว่าง

$A = \{x \mid x \in Z^+ \text{ and } x^2 = 11\}$

$C = \{x \mid x \in R \text{ and } x^2 + 4 = 0\}$

บทนิยาม เซตสองชุดจะเท่ากันก็ต่อเมื่อทั้งสองเซตนี้มีสมาชิกเหมือนกัน

(Two sets are **equal** if and only if they have the same elements.)

ตัวอย่าง 5 ข้อใดเป็นคู่ของเซตที่เท่ากัน

1) $\{1, 1, 3\}, \{3, 3, 1\}$
2) $\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 2\}$
3) $\{1, 2, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}$
4) $\{1, 3\}, \{1, 1, 1, 3, 3, 3\}$
5) $\{2, 3, 5, 7\}, \{3, 5, 2, 7\}$

คำตอบ ถูกทุกข้อ

ตัวอย่าง 6 ให้เซต

$A = \{x \mid x^2 + x - 6 = 0\}, B = \{2, -3\}$

เพราะฉะนั้น $A = B$

ตัวอย่าง 7 ให้เซต

$P = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

$Q = \{x \mid x \text{ is a subset of the set } \{a,b\}\}$

เพราะฉะนั้น $P = Q$

ตัวอย่าง 8

ถ้า $A = \{1, 2, 3\}$

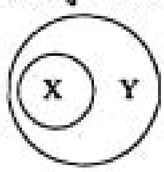
และ $B = \{x \mid x \text{ is a positive integer and } x^2 < 12\}$

เพราะฉะนั้น $A = B$

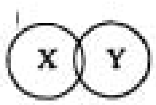
กำหนดให้ X และ Y เป็นเซตสองชุด ถ้าสมาชิกทุกตัวของเซต X เป็นสมาชิกของเซต Y เราพูดว่า X เป็นเซตย่อย (subset) ของ Y เขียนดังนี้ $X \subseteq Y$

ถ้า X ไม่ใช่เซตย่อยของ Y เขียนดังนี้ $X \not\subseteq Y$

แผนภาพเวนน์ (Venn diagram) หมายถึงแผนภาพที่ใช้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างเซต ตัวอย่างเช่นรูปข้างล่างนี้



$X \subseteq Y$



$X \not\subseteq Y$

ตัวอย่าง 9 ให้เซต

$C = \{1, 3\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$

ดังนั้น C เป็นเซตย่อย ของ A

เซตใด ๆ ก็ตาม จะเป็นเซตย่อยของตัวมันเอง (Every set is a subset of itself) เพราะว่า สมาชิกทุกตัว ของ X อยู่ในเซต X ดังนั้น $X \subseteq X$

ถ้า X เป็นเซตย่อยของ Y และ X ไม่เท่ากับ Y เราพูดว่า X เป็น**เซตย่อยแท้** (proper subset) ของ Y ใช้สัญลักษณ์ $X \subset Y$

เซตว่าง จะเป็นเซตย่อยของทุกเซต (The empty set is a subset of every set.)

บทนิยาม กำหนดให้ S เป็นเซต เซตกำลังของ S หมายถึง เซตของเซตย่อยทั้งหมดของเซต S ใช้สัญลักษณ์ P(S)

(Given a set S, the **power set*** of S is the set of all subsets of the set S and denoted by P(S).)

เพราะฉะนั้น $P(S) = \{X \mid X \subseteq S\}$

ทฤษฎีบท ถ้าเซต X มีสมาชิก n ตัว เซตกำลังของ X จะมีสมาชิก 2^n ตัว

(If $|X| = n$, then $|P(X)| = 2^n$.)

หรือพูดอีกอย่างหนึ่งได้ว่า เซตที่มีสมาชิก n ตัวจะมีเซตย่อย 2^n ชุด

ตัวอย่าง 10 จงหาเซตกำลังของเซตว่าง

เนื่องจาก เซตว่าง คือเซตที่ไม่มีสมาชิกเลย $|\phi| = 0$ เพราะฉะนั้น $n = 0$ และ $2^n = 2^0 = 1$ เซตว่าง จึงมีเซตย่อยเพียงชุดเดียวคือตัวมันเอง เซตกำลังของเซตว่างเขียนดังนี้

$P(\phi) = \{\phi\}$

ตัวอย่าง 11 จงหาเซตกำลังของ $\{\phi\}$

เซต $\{\phi\}$ มีสมาชิกหนึ่งตัว คือ ϕ เพราะฉะนั้น $n = 1$ เซต $\{\phi\}$ จะมีเซตย่อย $= 2^n = 2^1 = 2$ ชุด คือ ϕ, $\{\phi\}$

ดังนั้น $P(\{\phi\}) = \{\phi, \{\phi\}\}$

ตัวอย่าง 12 ให้ $A = \{a, b, c\}$ a) จงหา P(A)

b) จงคำนวณหาจำนวนสมาชิกของ P(P(A))

---

*Johnsonbaugh หน้า 65 กล่าวว่า "The set of all subsets (proper or not) of a set X, denoted P(X), is called the power set of X."

a) เซต A มีสมาชิก 3 ตัว เพราะฉะนั้น จะมีเซตย่อย = $2^n = 2^3 = 8$ ชุด

ได้แก่ ϕ, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}

ดังนั้น

P(A) = {ϕ, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}}

b) เพราะว่า P(A) มีสมาชิก 8 ตัว ดังนั้น เซตกำลังของ P(A) จะมีเซตย่อย = $2^n = 2^8$ = 256 ชุด คำตอบคือ |P(P(A))| = 256 ตัว

ตัวอย่าง 13 จงหาเซตกำลัง ของ {1, 2}

เซตนี้ มีสมาชิกสองตัว n = 2 เนื่องจาก $2^n = 2^2 = 4$, เซตนี้ มีเซตย่อย 4 ชุด ได้แก่ ϕ, {1}, {2}, {1, 2} เพราะฉะนั้น P({1, 2}) = {ϕ, {1}, {2}, {1, 2}}

ตัวอย่าง 14 จงหา P(P(P(ϕ))) คำตอบคือ {ϕ, {ϕ}, {{ϕ}}, {ϕ, {ϕ}}}

แสดงวิธีทำ

แบบฝึกหัด 1.1

1. เซตข้างล่างนี้มีสมาชิกกี่ตัว

{{1, 2}, {1, 3}, {2}, {3}}

1) 3   2) 4   3) 5   4) 6

2. ตัวเลือกใดคือคู่ของเซตที่เท่ากัน

1) ∅, {∅}   2) {1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5}, {1, 3, 5}

3) {{8}}, {8, {8}}   4) {2, 2, 2, 2}, {4, 4, 4, 4}

3. ตัวเลือกใดไม่ถูกต้อง

1) ∅ และ {∅} เป็นเซตที่เท่ากัน   2) $\varnothing \in \{\varnothing\}$

3) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$ 4) $\varnothing \notin \varnothing$

4. เซตข้างล่างนี้มีสมาชิกกี่ตัว

P({a, b, {a, b}})

1) 2   2) 4   3) 8   4) 12

5. เซต P(P(∅)) มีสมาชิกกี่ตัว

1) 1   2) 2   3) 3   4)

6. ตัวเลือกใดคือเซตที่มีสมาชิก 1 ตัว

1) ∅   2) {∅}   3) {∅, ∅}   4) {∅, {∅}, {∅, {∅}}}

7. เซต $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ มีสมาชิกกี่ตัว

1) 0   2) 1   3) 2   4) 4

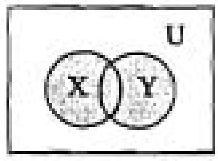
8. เซต $P(\{x, \{x\}, \{\{x\}\}\})$ มีสมาชิกกี่ตัว

1) 2   2) 4   3) 12   4) 16

1.2 การดำเนินการบนเซต (Operations on Sets)

ให้ X และ Y เป็นเซตสองชุด มีหลายวิธีในการรวมสองเซตนี้ให้เป็นเซตใหม่หนึ่งชุด ดังนี้

$$X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ or } x \in Y\}$$

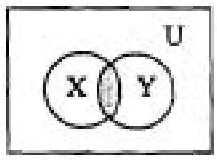


เรียกว่า ส่วนรวมหรือยูเนียน (union) ของเซต X และ Y หมายถึงเซตซึ่งประกอบด้วยสมาชิกทั้งหมดซึ่งอยู่ใน X หรืออยู่ใน Y หรืออยู่ในทั้งสองเซต

ตัวอย่าง 1 จงหาส่วนรวมของเซต $\{1, 3, 5\}$ และ $\{1, 2, 3\}$

คำตอบ = $\{1, 2, 3, 5\}$

$$X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ or } x \in Y\}$$

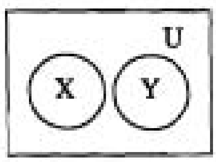


เรียกว่า ส่วนร่วมหรืออินเตอร์เซกชัน (intersection) ของ X และ Y หมายถึงเซตซึ่งประกอบด้วยสมาชิกทั้งหมดซึ่งอยู่ในเซต X และอยู่ในเซต Y ทั้งคู่

ตัวอย่าง 2 จงหาส่วนร่วมของเซต $\{1, 3, 5\}$ และ $\{1, 2, 3\}$

คำตอบ = $\{3\}$

เซต X และ Y จะเป็นเซตไม่มีส่วนร่วม (disjoint set) ถ้า $X \cap Y = \phi$



ตัวอย่าง 3 ให้ $X = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $Y = \{2, 4, 6, 8\}$

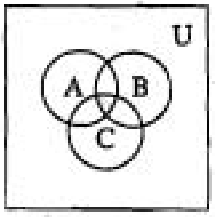
เนื่องจาก $X \cap Y = \phi$ เพราะฉะนั้น X และ Y เป็นเซตไม่มีส่วนร่วม

การดำเนินการของส่วนรวมและส่วนร่วม สามารถนิยามให้กับเซตสามชุดหรือมากกว่าสามชุด ในลักษณะเดียวกับที่กล่าวมาแล้วข้างต้นนี้

$A \cup B \cup C = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B \text{ or } x \in C\}$

และ $A \cap B \cap C = \{x \mid x \in A \text{ and } x \in B \text{ and } x \in C\}$

ตัวอย่างเช่น ในรูปข้างล่างนี้ พื้นที่แรเงาคือ $A \cap B \cap C$



เซตที่มีสมาชิกเป็นเซต ให้ชื่อว่า $\mathcal{Q}$ จะเรียกว่า **เซตไม่มีส่วนร่วมทุกคู่** เมื่อใดก็ตามที่ X และ Y เป็นเซตแตกต่างกันใน $\mathcal{Q}$ X และ Y เป็นเซตไม่มีส่วนร่วม

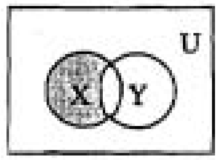
(A collection of sets $\mathcal{Q}$ is said to be **pairwise disjoint** if whenever X and Y are distinct sets in $\mathcal{Q}$, X and Y are disjoint.)

ตัวอย่าง 4 เซตไม่มีส่วนร่วมทุกคู่

$\mathcal{Q} = \{\{1, 4, 5\}, \{2, 6\}, \{3\}, \{7, 8\}$

$X - Y = \{x \mid x \in X \text{ and } x \notin Y\}$

เรียกว่า **เซตผลต่าง หรือ ส่วนเติมเต็มสัมพัทธ์** (difference or relative complement)) ของ X และ Y



X - Y

หมายถึง เซตผลต่าง X - Y ประกอบด้วย สมาชิกทั้งหมดใน X แต่ไม่อยู่ใน Y

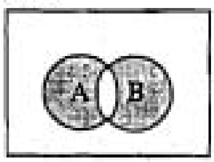
ผลต่างสมมาตร ของเซต A และ B หมายถึงเซตซึ่งประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ในเซต A หรือสมาชิกที่อยู่ในเซต B แต่ต้องไม่อยู่ในทั้งสองเซต

The symmetric difference $A \oplus B$ of the set A and B is the set

$A \oplus B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B \text{ but not both}\}$

หรือ

$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$



$A \oplus B$

ตัวอย่าง 5 ให้ $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{4, 5, 6\}$

ดังนั้น

$A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$

$A \cap B = \{5\}$

$A - B = \{1, 3\}$

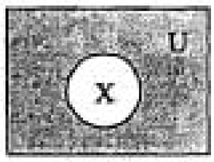
$B - A = \{4, 6\}$

$A \oplus B = \{1, 3, 4, 6\}$

บางครั้งเราเกี่ยวข้องกับเซตซึ่งเป็นเซตย่อยทั้งหมดของ U ในที่นี้ เซต U เรียกว่า **เอกภพสัมพัทธ์** หรือ **เอกภาพสัมพัทธ์** (Universal set or a universe) หมายถึงเซตซึ่งประกอบด้วยสมาชิกทั้งหมดของสิ่งที่เรากำลังศึกษาอยู่ เซต U ต้องกำหนดชัดแจ้งหรืออ้างเองจากบริบท (context)

กำหนดให้ U เป็นเอกภาพสัมพัทธ์ และ X เป็นเซตย่อยของ U

U − X เรียกว่า **ส่วนเติมเต็ม** (complement) ของ X ใช้สัญลักษณ์ $\overline{X}$

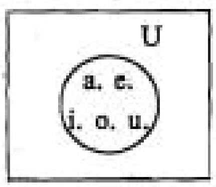


$\overline{X}$

$\overline{X} = \{x \mid x \notin X\}$

เอกภพสัมพัทธ์ U จะประกอบด้วยสิ่งของทั้งหมดซึ่งอยู่ภายใต้การพิจารณา ในแผนภาพเวนน์ (Venn diagram)* U ถูกแทนที่ด้วยรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ส่วนเซตอื่น ๆ จะใช้รูปวงกลม ส่วนสมาชิกของเซตบางครั้งจะแทนด้วยจุด และระบุชื่อ

ตัวอย่าง 6 แผนภาพเวนน์แทนเซตของตัวสระในภาษาอังกฤษ



*John Venn เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ ได้นำแผนภาพนี้มาใช้ในปี ค.ศ. 1881

ตัวอย่าง 7 ให้

$A = \{1, 3, 5\}$, U เป็นเอกภพสัมพัทธ์

$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

เพราะฉะนั้น $\overline{A} = \{2, 4\}$

ในทางตรงกันข้าม ถ้ากำหนดให้ $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $A = \{1, 3, 5\}$

เพราะฉะนั้น $\overline{A} = \{7, 9\}$

จะเห็นได้ชัดเจนว่า ส่วนเติมเต็มขึ้นอยู่กับเอกภพสัมพัทธ์ซึ่งเรากำลังทำงานด้วย

ทฤษฎีบท ให้ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และให้ A, B และ C เป็นเซตย่อยของ U คุณสมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

(a) กฎการเปลี่ยนหมู่ (Associative laws) :

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(b) กฎการสลับที่ (Commutative laws) :

$A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$

(c) กฎการแจกแจง (Distributive laws) :

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(d) กฎเอกลักษณ์ (Identity laws) :

$A \cup \phi = A$, $A \cap \cup = A$

(e) กฎส่วนเติมเต็ม (Complement laws) :

$A \cup \overline{A} = \cup$, $A \cap \overline{A} = \phi$

(f) Idempotent laws :

$A \cup A = A$, $A \cap A = A$

(g) กฎค่าขอบเขต (Bound laws) :

$A \cup U = U$, $A \cap \phi = \phi$

(h) กฎนิจพล (Absorption laws) :

$A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$

(i) กฎอาวัตนาการ (Involution laws) :

$\overline{\overline{A}} = A$

(j) 0/1 laws :

$\overline{\phi} = U$, $\overline{U} = \phi$

(k) กฎเดอมอร์แกน (De Morgan's law for sets) :

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B} \;,\; \overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

บทนิยาม ส่วนรวม $\mathcal{Q}$ ของกลุ่มของเซต หมายถึง เซตซึ่งประกอบด้วยสมาชิกต่าง ๆ ซึ่งอยู่ในอย่างน้อยที่สุดหนึ่งเซตในเซต $\mathcal{Q}$

(The **union** of a collection of sets is the set that contains those elements that are members of at least one set in the collection.)

$$\cup J = \{x \mid x \in X \text{ for some } X \in \mathcal{Q}\}$$

ในทำนองเดียวกัน เรานิยามส่วนร่วม $\mathcal{Q}$ ของกลุ่มของเซตให้เป็นเซตซึ่งประกอบด้วยสมาชิกซึ่งอยู่ในทุกเซต ใน $\mathcal{Q}$ เป็นทางการ ดังนี้

(The **intersection** of a collection of sets is the set that contains those elements that are members of all the sets in the collection.)

$$\cap \mathcal{Q} = \{x \mid x \in X \text{ for all } X \in \mathcal{Q}\}$$

ถ้า $\mathcal{Q} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$

เราเขียน

$$\cup \mathcal{Q} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad , \quad \cap \mathcal{Q} = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

และถ้า

$$\mathcal{Q} = \{A_1, A_2, \ldots\}$$

เราเขียน

$$\cup \mathcal{Q} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad , \quad \cap \mathcal{Q} = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

ตัวอย่าง 8 ให้เซต

$$A_n = \{n, n+1 \ldots\}$$

และ

$$\mathcal{Q} = \{A_1, A_2, \ldots\}$$

จะได้

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \cup \mathcal{Q} = \{1, 2, \ldots\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap \mathscr{Q} = \phi$$

ตัวอย่าง 9 ให้เซต

$A_i = \{i, i+1, i+2, \ldots\}$

จะได้

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, \ldots\}$$
$$= \{1, 2, 3, \ldots\} = N$$

และ

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, \ldots\}$$
$$= \{n, n+1, n+2, \ldots\}$$

ผลแบ่งกั้นหรือเซตผลหารของเซตไม่ว่าง S หมายถึง เซตของเซตย่อยไม่ว่าง ซึ่งเป็นเซตไร้สมาชิกร่วม และมีส่วนรวมเป็น S

(A **partition** or **quotient set** of a nonempty set S is a collection of nonempty subsets which are disjoint and whose union is S.)

ตัวอย่าง 10 ให้เซต

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$X_1 = \{1, 4, 5\}, X_2 = \{2, 6\}, X_3 = \{3\}, X_4 = \{7, 8\}$

เนื่องจากสมาชิกแต่ละตัวของ เซต X อยู่ในเซตใด เซตหนึ่ง ใน

$\mathscr{Q} = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$

$\quad = \{\{1, 4, 5\}, \{2, 6\}, \{3\}, \{7, 8\}\}$

และ $\bigcup \mathscr{Q} = X$, เพราะฉะนั้น $\mathscr{Q}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ X

ตอนเริ่มต้นของหัวข้อนี้ เราชี้ให้เห็นว่า เซตหมายถึง กลุ่มของสมาชิกแบบไม่มีอันดับ นั่นคือ เซต บอกได้โดยสมาชิกของมันไม่ใช่บอกได้โดยลำดับของสมาชิกในรายการ บางครั้งเราต้องการให้นำอันดับมาคิดด้วย

คู่อันดับ (odered pair)* ของสมาชิก เขียนดังนี้

(a, b) ซึ่งแตกต่างจากคู่อันดับ (b, a) เว้นเสียแต่ว่า a = b พูดอีกอย่างหนึ่งคือ (a, b) = (c, d) ก็ต่อเมื่อ a = c และ b = d

บทนิยาม ถ้า A และ B เป็นเซตไม่ว่างสองชุด เรานิยาม**เซตผลคูณ** หรือ **ผลคูณคาร์ทีเซียน** $A \times B$ ให้เป็นเซตของคู่อันดับ (a, b) ทั้งหมด โดยที่ $a \in A$ และ $b \in B$ ดังนั้น

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ and } b \in B\}$$

(If A and B are two nonempty sets, we define the **product set** or **Cartesian product** $A \times B$ as the set of all ordered pairs (a, b) with $a \in A$ and $b \in B$. Thus $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ and } b \in B\}$.)

ตัวอย่าง 11 ถ้า X = {1, 2, 3} และ Y = {a, b}

จะได้

$$X \times Y = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

$$Y \times X = \{(a, 1), (b, 1), (a, 2), (b, 2), (a, 3), (b, 3)\}$$

$$X \times X = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\ (3, 3)\}$$

$$Y \times Y = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$$

จากตัวอย่างข้างต้นนี้จะเห็นว่าโดยทั่วไปแล้ว $X \times Y \neq Y \times X$

โปรดสังเกตว่า

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$$

รายการแบบอันดับไม่ได้ถูกจำกัดให้กับสมาชิกสองตัวเท่านั้น

n-ทูเปิล เขียนดังนี้ $(a_1, a_2, ..., a_n)$ มีการนำอันดับมาพิจารณา :

ก็ต่อเมื่อ

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, ..., a_n = b_n$$

ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต $X_1, X_2, ..., X_n$ นิยามให้เป็นเซตของ n-ทูเปิล ทั้งหมด $(x_1, x_2, ..., x_n)$ เมื่อ $x_i \in x_i$ สำหรับ i = 1, 2, ..., n

$$X_1 \times X_2 \times ... \times X_n = \{x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in X_i \text{ for } i = 1, 2, ..., n\}$$

---

*Levy (หน้า 40) กล่าวว่า The ordered pair (a, b) is the sequence of two elements (a, b).

ตัวอย่าง 12 ถ้า เซต

$X = \{1, 2\}, Y = \{a, b\}, Z = \{\alpha, \beta\}$

จะได้

$X \times Y \times Z = \{(1, a, \alpha), (1, a, \beta), (1, b, \alpha), (1, b, \beta),$
$(2, a, \alpha), (2, a, \beta), (2, b, \alpha), (2, b, \beta)\}$

โปรดสังเกตว่า ในตัวอย่างข้างต้นนี้ $|X \times Y \times Z| = |X| \cdot |Y| \cdot |Z|$
โดยทั่วไป $|X_1 \times X_2 \times ... \times X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot ... \cdot |X_n|$

ตัวอย่าง 13 ถ้า A เป็นเซตของอาหารว่าง, M เป็นเซตของอาหารหลัก และ D เป็นเซตของของหวาน

ผลคูณคาร์ทีเซียน $A \times M \times D$ คือ รายการอาหารค่ำ ที่เป็นไปได้ทั้งหมด ประกอบด้วยอาหารว่าง 1 อย่าง อาหารหลัก 1 อย่าง และของหวานอีก 1 อย่าง

แบบฝึกหัด 1.2

ตั้งแต่ข้อ 1 - 16 ให้เอกภพสัมพัทธ์คือ เซต $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
ให้ $A = \{1, 4, 7, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และ $C = \{2, 4, 6, 8\}$
จงเขียนรายการสมาชิกของแต่ละเซต

1. $A \cup B$
2. $B \cap C$
3. $A - B$
4. $B - A$
5. $\overline{A}$
6. $U - C$
7. $\overline{U}$
8. $A \cup \phi$
9. $B \cap \phi$
10. $A \cup U$
11. $B \cap U$
12. $A \cap (B \cup C)$
13. $\overline{B} \cap (C - A)$
14. $(A \cap B) - C$
15. $A \cap \overline{B} \cup C$
16. $(A \cup B) - (C - B)$

ตั้งแต่ข้อ 17 - 20 ให้ $X = \{1, 2\}$ และ $Y = \{a, b, c\}$ จงเขียนรายการสมาชิกของแต่ละเซต

17. $X \times Y$
18. $Y \times X$
19. $X \times X$
20. $Y \times Y$

ตั้งแต่ข้อ 21 - 24 ให้ $X = \{1, 2\}$, $Y = \{a\}$, $Z = \{\alpha, \beta\}$ จงเขียนรายการสมาชิกของแต่ละเซต

21. $X \times Y \times Z$
22. $X \times Y \times Y$
23. $X \times X \times X$
24. $Y \times X \times Y \times Z$

ตั้งแต่ข้อ 25 - 28 จงเขียนรายการผลแบ่งกั้นของเซต

25. $\{1\}$

26. $\{1, 2\}$

27. $\{a, b, c\}$

28. $\{a, b, c, d\}$

ตั้งแต่ข้อ 29 - 32 จงตอบคำถามว่าเป็นจริง หรือ เป็นเท็จ

29. $\{x\} \subseteq \{x\}$

30. $\{x\} \in \{x\}$

31. $\{x\} \in \{x, \{x\}\}$

32. $\{x\} \subseteq \{x, \{x\}\}$

ตั้งแต่ข้อ 33 - 37 จงบอกว่าแต่ละคู่ของเซตเท่ากันหรือไม่?

33. $\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 2\}$

34. $\{1, 2, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}$

35. $\{1, 1, 3\}, \{3, 3, 1\}$

36. $\{x \mid x^2 + x = 2\}, \{1, -2\}$

37. $\{x \mid x \text{ is a real number and } 0 < x \leq 2\}, \{1, 2\}$

38. จงเขียนรายการสมาชิกของ $P(\{a, b\})$

    ชุดไหนคือเซตย่อยแท้ของ $\{a, b\}$

39. จงเขียนรายการสมาชิกของ $P(\{a, b, c, d\})$

    ชุดไหนคือเซตย่อยแท้ของ $\{a, b, c, d\}$

40. ถ้า X มีสมาชิกเท่ากับ 10 แล้ว P(X) จะมีจำนวนสมาชิกเท่าใด, เซตย่อยแท้ของ X จะมีกี่ชุด

41. ถ้า X มีสมาชิกเท่ากับ n, X จะมีเซตย่อยแท้จำนวนกี่ชุด

42. ถ้า X และ Y เป็นเซตไม่ว่างสองชุด และ $X \times Y = Y \times X$ เราสามารถสรุปอะไรได้บ้างเกี่ยวกับ X และ Y

ตั้งแต่ข้อ 43 - 62 ถ้าข้อความเป็นจริง ให้ตอบ จริง ถ้าข้อความเป็นเท็จ ให้ยกตัวอย่างประกอบ เซต X, Y และ Z เป็นเซตย่อยของ เอกภาพสัมพัทธ์ U สมมติว่า เอกภพสัมพัทธ์ของผลคูณคาร์ทีเซียน คือ $U \times U$

43. สำหรับเซต X และ Y ใด ๆ X อาจจะเป็นเซตย่อยของ Y หรือ Y อาจจะเป็นเซตย่อยของ X

44. $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$ สำหรับทุกเซต X และ Y

45. $X \cap (Y - Z) = (X \cap Y) - (X \cap Z)$ สำหรับทุกเซต X, Y และ Z

46. $X \cap Y = Y \cap X$ สำหรับทุกเซต X และ Y

47. $(X - Y) \cap (Y - X) = \phi$ สำหรับทุกเซต X และ Y

48. $\overline{\overline{X}} = X$ สำหรับเซต X ใด ๆ

49. $X - (Y \cup Z) = (X - Y) \cup Z$ สำหรับทุกเซต X, Y และ Z

50. $\overline{X - Y} = \overline{Y - X}$ สำหรับทุกเซต X และ Y

51. $X \cup \phi = X$ สำหรับเซต X ใด ๆ

52. $\overline{U} = \phi$

53. $\overline{X \cap Y} \subseteq X$ สำหรับทุกเซต X และ Y

54. $X \cap \overline{X} = \phi$ สำหรับเซต X ใด ๆ

55. $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$ สำหรับทุกเซต X และ Y

56. $(X \cap Y) \cup (Y - X) = X$ สำหรับทุกเซต X และ Y

57. $X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z)$ สำหรับทุกเซต X, Y และ Z

58. $\overline{X \times Y} = \overline{X} \times \overline{Y}$ สำหรับทุกเซต X และ Y

59. $X \times (Y - Z) = (X \times Y) - (X \times Z)$ สำหรับทุกเซต X, Y และ Z

60. $X - (Y \times Z) = (X - Y) \times (X - Z)$ สำหรับทุกเซต X, Y และ Z

61. $X \cap (Y \times Z) = (X \cap Y) \times (X \cap Z)$ สำหรับทุกเซต X, Y และ Z

62. $X \times \phi = \phi$ สำหรับเซต X ใด ๆ

63. จงแสดงให้เห็นว่า สำหรับเซต X ใดๆ, $\phi \subseteq X$

สำหรับแต่ละเงื่อนไขในข้อ 64 - 67 ความสัมพันธ์อะไรต้องมีอยู่ ระหว่างเซต A และ B

64. $A \cap B = A$ 65. $A \cup B = A$

66. $\overline{A} \cap U = \phi$ 67. $\overline{A \cap B} = \overline{B}$

ผลต่างสมมาตร (symmetric difference) ของเซต A และ B หมายถึงเซต

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

หรือ

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

68. ถ้า $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{2, 3, 4, 5\}$ จงหา $A \Delta B$

69. จงอธิบายผลต่างสมมาตร ของเซต A และ B ด้วยคำพูด

70. กำหนดให้ U เป็นเอกภาพสัมพัทธ์ จงอธิบาย

$A \Delta A$, $A \Delta \overline{A}$, $U \Delta A$ และ $\phi \Delta A$

71. จงแสดงให้เห็นว่า

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

72. จงหาสูตรสำหรับ $|A \cup B \cup C|$ คล้ายกับสูตรในแบบฝึกหัดข้อ 71 จงแสดงให้เห็นว่าสูตรของท่านเป็นจริงสำหรับทุกเซต A, B และ C

73. ให้ C เป็นวงกลมหนึ่งวง และให้ $\mathscr{D}$ เป็นเซตของเส้นผ่าศูนย์กลางทั้งหมดของ C จงบอกความหมายของ $\cap\mathscr{D}$

74. ให้ P เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกมีค่ามากกว่า 1 สำหรับ $i \geq 2$

นิยาม $x_i = \{ik \mid k \geq 2, k \in P\}$

จงอธิบาย $P - \bigcup_{i=2}^{\infty} X_i$

แบบฝึกหัดเสริม 1.2

1. ให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และ $B = \{0, 3, 6\}$

   จงหา

   a) $A \cup B$ b) $A \cap B$

   c) $A - B$ d) $B - A$

2. ให้ $A = \{a, b, c, d, e\}$ และ $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

   จงหา

   a) $A \cup B$ b) $A \cap B$

   c) $A - B$ d) $B - A$

3. จงหาเซต A และเซต B ถ้า

   $A - B = \{1, 5, 7, 8\}$

   $B - A = \{2, 10\}$

   และ $A \cap B = \{3, 6, 9\}$

4. ให้ $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$

   $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

   และ $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

   จงหา

   a) $A \cap B \cap C$ b) $A \cup B \cup C$

   c) $(A \cup B) \cap C$ d) $(A \cap B) \cup C$

5. จงวาดแผนภาพเวนน์ สำหรับการจัดหมู่ (combination) แต่ละชุดของเซต A, B และ C ต่อไปนี้

   a) $A \cap (B \cup C)$ b) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

   c) $(A - B) \cup (A - C) \cup (B - C)$

6. ถ้าสิ่งต่อไปนี้เป็นจริง เซต A และเซต B จะต้องมีคุณสมบัติอย่างไร?

   a) $A \cup B = A$ b) $A \cap B = A$

   c) $A - B = A$ d) $A \cap B = B \cap A$

   e) $A - B = B - A$

7. จงหาผลต่างสมมาตรของเซต $\{1, 3, 5\}$ และ $\{1, 2, 3\}$

8. จงวาดแผนภาพเวนน์ของผลต่างสมมาตรของเซต A และ B

9. จงแสดงให้เห็นว่า ถ้า A เป็นเซตย่อยของเอกภพสัมพัทธ์ U จะได้

   a) $A \oplus A = \phi$ b) $A \oplus \phi = A$

   c) $A \oplus U = \overline{A}$ d) $A \oplus \overline{A} = U$

10. ถ้า $A \oplus B = A$ จงบอกคุณสมบัติของเซต A และ B

11. ให้ $A_i = \{1, 2, 3, ..., i\}$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, ...$ จงหา

a) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ b) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

13. ให้ $A_i = \{i, i+1, i+2, ...\}$ จงหา

a) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ b) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

1.8 ลำดับและการรวมยอด (Sequences and Summations)

ตารางข้างล่างนี้ คือ อัตราค่าโดยสารรถแท็กซี่มิเตอร์ในเมืองแห่งหนึ่ง จากระยะทาง 1 กิโลเมตร ถึง 10 กิโลเมตร (ระยะทางหนึ่งกิโลเมตรแรกคิด \$1, ทุกหนึ่งกิโลเมตรถัดไปคิดเพิ่มอีกกิโลเมตรละ 50 cents)

ระยะทาง (ก.ม.)	ค่าโดยสาร (\$)
1	1.00
2	1.50
3	2.00
4	2.50
5	3.00
6	3.50
7	4.00
8	4.50
9	5.00
10	5.50

ให้ C_n เป็นค่าโดยสารของระยะทาง n กิโลเมตร ซึ่งคำนวณค่าโดยสารดังนี้ 1.00 (ค่าโดยสารหนึ่งกิโลเมตรแรก) บวก 0.50 คูณด้วย (n - 1) ซึ่งเป็นระยะทางที่เพิ่ม จะได้

$$\boxed{C_n = 1 + 0.50\,(n - 1)}$$

เพราะฉะนั้น

$$C_1 = 1 + 0.5(1 - 1) = 1 + 0.5(0) = 1.0$$

$$C_2 = 1 + 0.5(2 - 1) = 1 + 0.5(1) = 1.5$$

$$C_5 = 1 + 0.5(5 - 1) = 1 + 0.5(4) = 3.0$$

ลำดับ หมายถึงรายการซึ่งมีอันดับเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย

(A **sequence** is a list in which order is taken into account.)*

จากตัวอย่างข้างต้น รายการของค่าโดยสาร

1.00, 1.50, 2.00, 2.50, 3.00, ...

หมายถึงลำดับโปรดสังเกตว่าอันดับมีความสำคัญ ตัวอย่างเช่น ถ้าสมาชิกตัวที่ 1 และสมาชิกตัวที่ 5 สลับที่กัน แสดงว่า ค่าโดยสารระยะทาง 1 กิโลเมตร คือ \$3.00 ซึ่งแตกต่างจากค่าโดยสารระยะทาง 1 กิโลเมตร คือ \$1.00

ให้ S เป็นลำดับชุดหนึ่ง, สมาชิกตัวแรกของลำดับเราใช้สัญลักษณ์ S_1, สมาชิกตัวที่สองใช้สัญลักษณ์ S_2 เช่นนี้เรื่อยไป โดยทั่วไปแล้ว S_n หมายถึง สมาชิกตัวที่ n ของลำดับ เราเรียก n ว่า **ดรรชนีของลำดับ** (**index** of the sequence)

ตัวอย่าง 1 รายการแบบอันดับ (ordered list)

2, 4, 6, ..., 2n, ...

หมายถึง ลำดับชุดหนึ่ง, สมาชิกตัวแรกของลำดับ คือ 2, สมาชิกตัวที่สอง คือ 4, ..., สมาชิกตัวที่ n คือ 2n ถ้าเราให้ S แทนลำดับชุดนี้ จะได้ว่า

$$S_1 = 2, S_2 = 4, S_3 = 6, ..., S_n = 2n, ...$$

ตัวอย่าง 2 รายการแบบอันดับ

a, a, b, a, b

เป็นลำดับหนึ่งชุด สมาชิกตัวแรกของลำดับคือ a, สมาชิกตัวที่สองคือ a, ตัวที่สามคือ b เช่นนี้เรื่อยไป ถ้าเราให้ t แทนลำดับชุดนี้ จะได้

$$t_1 = a, t_2 = a, t_3 = b, t_4 = a, t_5 = b$$

จากตัวอย่างข้างต้นนี้ แสดงให้เห็นว่า ลำดับไม่เหมือนกับเซต ลำดับอาจมีการซ้ำกัน (repetitions) ของสมาชิกได้

---

*Rosen หน้า 149 กล่าวว่า Sequences are ordered lists of elements.

ลำดับ อาจมีสมาชิกจำนวนอนันต์ (infinite number) เช่นลำดับของตัวอย่างที่ 1 หรือมีสมาชิกจำนวนจำกัด (finite number) เช่นลำดับของตัวอย่างที่ 2

สัญกรณ์ทางเลือกสำหรับลำดับคือ $\{S_n\}$ ในที่นี้ S หรือ $\{S_n\}$ หมายถึง ลำดับทั้งหมด (the entire sequence)

$S_1, S_2, S_3, \ldots$

เราใช้สัญกรณ์ S_n แทนสมาชิกตัวที่ n ของลำดับ S

ตัวอย่าง 3 จงนิยามลำดับ $\{t_n\}$ โดยกฎ

$t_n = n^2 - 1, n \geq 1$

ห้าเทอมแรกของลำดับชุดนี้ คือ

0, 3, 8, 15, 24

เทอมที่ 55 คือ

$t_{55} = 55^2 - 1 = 3024$

ตัวอย่าง 4 จงนิยามลำดับ u โดยใช้กฎ u_n คือตัวอักษรที่ n ในคำว่า digital จะได้

$u_1 = d, u_2 = u_4 = i$ และ $u_7 = l$

ลำดับชุดนี้ เป็นลำดับจำกัด

ถึงแม้ว่าในหนังสือเล่มนี้บ่อยครั้งเราแทนสัญลักษณ์ตัวแรกของลำดับ S ด้วย S_1 โดยทั่วไปแล้ว สมาชิกตัวแรกอาจมีดรรชนีเป็นจำนวนเต็มใด ๆ ตัวอย่างเช่น ถ้า v คือลำดับซึ่งมีสมาชิกตัวแรกเป็น v_0 ลำดับชุดนี้คือ

$v_0, v_1, v_2, \ldots$

เมื่อเราต้องการกล่าวอย่างชัดแจ้งถึงดรรชนีตัวแรกของลำดับอนันต์ S เขียนดังนี้

$$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$$

ลำดับอนันต์ v ซึ่งดรรชนีตัวแรก คือ 0 หมายถึง

$$\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$$

ลำดับจำกัด x ดรรชนีจาก -1 ถึง 4 หมายถึง

$$\{X_n\}_{n=-1}^{4}$$

ตัวอย่าง 5 ถ้า x คือลำดับ นิยามดังนี้

$$X_n = \frac{1}{2^n}, \ -1 \le n \le 4$$

สมาชิกของ x คือ

$$2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16}$$

มีอยู่สองวิธีที่สำคัญในการสร้างลำดับใหม่จากลำดับตัวเลข คือการบวกและการคูณของเทอมต่าง ๆ เข้าด้วยกัน

บทนิยาม 6

ถ้า $\{a_i\}_{i=m}^{n}$ คือ ลำดับชุดหนึ่ง, เรานิยาม

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_(1)}$$

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_(2)}$$

รูปแบบ $\sum_{i=m}^{n} a_i$ = เรียกว่า **สัญกรณ์รวมยอด (sum or sigma notation)**

และ $\prod_{i=m}^{n} a_i$ เรียกว่า **สัญกรณ์คูณ (product notation)**

ในที่นี้ i เรียกว่า ดรรชนี (index)

m เรียกว่า ขีดจำกัดล่าง (lower limit)

n เรียกว่า ขีดจำกัดบน (upper limit)

ตัวอย่าง 7 ให้ a เป็นลำดับ นิยามโดย

$$a_n = 2n,\ n \ge 1$$

ดังนั้น

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = a_1 + a_2 + a_3 = 2 + 4 + 6 = 12$$

ตัวอย่าง 8 จงหาค่าของ $\sum_{j=1}^{5} j^2$

$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

ตัวอย่าง 9 จงหาค่าของ $\sum_{k=4}^{8} (-1)^k$

$$= (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6 + (-1)^7 + (-1)^8 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1$$

ตัวอย่าง 10 จงหาค่าของ $\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} ij$

$$= \sum_{i=1}^{4} (i + 2i + 3i) = \sum_{i=1}^{4} (6i) = 6 + 12 + 18 + 24 = 60$$

ตัวอย่าง 11

$$\prod_{i=1}^{3} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$$

ผลบวกเรขาคณิต (geometric sum)

$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n$

สามารถเขียนให้กระชับขึ้น โดยใช้สัญกรณ์รวมยอด ดังนี้

$$\sum_{i=0}^{n} ar^i$$

ชื่อดรรชนีในสมการ (1) และ (2) ไม่สำคัญ

ตัวอย่างเช่น

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

และ

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{s=1}^{n} a_s$$

บางครั้งไม่เพียงแต่การเปลี่ยนชื่อของดรรชนีจะเป็นประโยชน์เท่านั้น แต่การเปลี่ยนขีดจำกัดของมันมีประโยชน์ด้วยเช่นกัน

ตัวอย่าง 12 การเปลี่ยนดรรชนีและขีดจำกัด ในผลบวก (Changing the Index and Limits in a Sum)

Rewrite the sum

$$\sum_{i=0}^{n} i r^{n-i}$$

replacing the index i by j, where $i = j - 1$

ผลเฉลย

เนื่องจาก $i = j - 1$ ดังนั้นเทอม ir^{n-i} เปลี่ยนเป็น

$(j-1)r^{n-(j-1)} = (j-1)r^{n-j+1}$

เนื่องจาก $j = i + 1$ เมื่อ $i = 0$, $j = 1$ ดังนั้น ขีดจำกัดล่าง สำหรับ j คือ 1 ในทำนองเดียวกัน เมื่อ $i = n$, $j = n + 1$ และขีดจำกัดบนสำหรับ j คือ $n + 1$

จะได้ว่า

$$\sum_{i=0}^{n} i r^{n-i} = \sum_{j=1}^{n+1} (j-1) r^{n-j+1}$$

ตัวอย่าง 13 ให้ a เป็นลำดับนิยาม โดยกฎ $a_n = 2(-1)^n$, $n \geq 0$ จงหาสูตร สำหรับลำดับ S นิยามโดย

$$S_n = \sum^{n} a_i$$

ผลเฉลย

$$S_n = 2(-1)^0 + 2(-1)^1 + 2(-1)^2 + \dots + 2(-1)^n$$
$$= 2 - 2 + 2 - \dots \pm 2$$
$$= \begin{cases} 2, & \text{if } n \text{ is even} \\ 0, & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

บางครั้ง สัญกรณ์รวมยอดและสัญกรณ์คูณ ถูกดัดแปร (modified) ให้แทนผลบวก และผลคูณเหนือเซตใด ๆ ของจำนวนเต็ม พูดเป็นทางการคือ ถ้า S เป็นเซต ของจำนวนเต็ม และ a เป็นลำดับชุดหนึ่ง

$\sum_{i \in S} a_i$ หมายถึงผลบวกของสมาชิก $\{a_i \mid i \in S\}$

ในทำนองเดียวกัน

$\prod_{i \in S} a_i$ หมายถึงผลคูณของสมาชิก $\{a_i \mid i \in S\}$

ตัวอย่าง 14 ถ้า S เป็นเซตของจำนวนเฉพาะมีค่าน้อยกว่า 20

$$\sum_{i \in S} \frac{1}{i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{19}$$
$$= 1.455$$

ในบริบทเฉพาะเรียกลำดับจำกัดว่า **สายอักขระ**

(In certain contexts, a finite sequence is called a **string**.)

บทนิยาม

สายอักขระเหนือ X หมายถึง ลำดับจำกัดของสมาชิกจากเซต X

(A **string over** X is a finite sequence of elements from X.)

ตัวอย่าง 15 ให้ X = {a, b, c} ถ้าเราให้

$\beta_1 = b, \beta_2 = a, \beta_3 = a, \beta_4 = c$

จะได้อักขระเหนือ X เขียนดังนี้ baac

เพราะว่า สายอักขระเป็นลำดับหนึ่งชุด เรื่องอันดับ (order) จึงต้องนำมาคิดด้วย ตัวอย่างเช่น สาย baac จะแตกต่างจาก สาย acab

การซ้ำกันในสายอักขระหนึ่งชุด สามารถกำหนดได้ โดยดรรชนีบน (Repetitions in a string can be specified by superscripts.) ตัวอย่างเช่น สายอักขระ bbaaac อาจเขียนเป็น b^2a^3c

สายอักขระ ซึ่งไม่มีสมาชิก เรียกว่า สายอักขระว่าง (null string) และใช้สัญลักษณ์ λ เราใช้ X^* แทนเซตของสายอักขระทั้งหมด เหนือ X ซึ่งรวมสายอักขระว่างด้วย และเราให้ X^+ แทนเซตของสายอักขระไม่ว่างทั้งหมด เหนือ X (The string with no elements is called the **null string** and is denoted λ. W let X^* denote the set of all string over X, including the null string, and we let X^+ denote the set of all nonnull strings over X.)

ตัวอย่าง 16 ให้ X = {a, b} สมาชิกบางตัว ใน X^* คือ

λ, a, b, abab, $b^{20}a^3ba$

ความยาว (length) ของสายอักขระ α หมายถึงจำนวนสมาชิกใน α สำหรับความยาวของสายอักขระ α ใช้สัญลักษณ์ $|\alpha|$

ตัวอย่าง 17 ถ้า α = aabab และ $\beta = a^3b^4a^{32}$

จะได้ $|\alpha| = 5$ และ $|\beta| = 39$

ถ้า α และ β เป็นสายอักขระสองชุด สายอักขระซึ่งประกอบด้วย α ตามด้วย β เขียนดังนี้ $\alpha\beta$, เรียกว่า **การต่อกัน** (concatenation) ของ α และ β

ตัวอย่าง 18 ถ้า γ = aab และ θ = cabd

จะได้

$$\gamma\theta = \text{aabcabd}$$

$$\theta\gamma = \text{cabdaab}$$

$$\gamma\lambda = \gamma = \text{aab}$$

$$\lambda\gamma = \gamma = \text{aab}$$

แบบฝึกหัด 1.3

1. จงตอบคำถาม ข้อ (a) - (c) สำหรับลำดับ S นิยามดังนี้

   c, d, d, c, d, c

   a) จงหา S_1
   b) จงหา S_4
   c) จงเขียนสายอักขระ S

   คำตอบ (a) c (b) c (c) cddcdc

2. จงตอบคำถาม ข้อ (a) - (i) สำหรับลำดับ t นิยามดังนี้

   $t_n = 2n-1$, $n \geq 1$

   จงหา

(a) t_3

(b) t_7

(c) t_{100}

(d) t_{2077}

(e) $\sum_{i=3}^{3} t_i$

(f) $\sum_{i=3}^{7} t_i$

(g) $\prod_{i=3}^{3} t_i$

(h) $\prod_{i=3}^{6} t_i$

(i) จงหาสูตรซึ่งแทนลำดับชุดนี้ ซึ่งเป็นลำดับมีดรรชนีล่างเป็น 0

3. จงตอบคำถาม ข้อ (a) - (d) สำหรับ ลำดับ v นิยามดังนี้

$$v_n = n(n-1) \ldots 2 \cdot 1 + 2, \quad n \geq 1$$

จงหา

(a) v_3

(b) v_4

(c) $\sum_{i=1}^{4} v_i$

(d) $\sum_{i=3}^{3} v_i$

4. จงคำนวณปริมาณซึ่งกำหนดให้โดยใช้ลำดับ a นิยามดังนี้

$$a_n = n^4 - 3n + 3$$

(a) $\sum_{i=1}^{4} a_i$

(b) $\sum_{j=3}^{5} a_j$

(c) $\sum_{i=4}^{4} a_i$

(d) $\sum_{k=1}^{6} a_k$

(e) $\prod_{i=1}^{2} a_i$

(f) $\prod_{i=1}^{3} a_i$

(g) $\prod_{n=2}^{2} a_n$

(h) $\prod_{x=3}^{4} a_x$

5. จงตอบคำถาม ข้อ (a) - (d) สำหรับลำดับ b ซึ่งนิยามดังนี้

$$b_n = n(-1)^n$$

จงหา

(a) $\sum_{i=1}^{4} b_i$

(b) $\sum_{i=1}^{10} b_i$

(c) สูตรสำหรับลำดับ c นิยามดังนี้ $c_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$

(d) สูตรสำหรับลำดับ d นิยามดังนี้ $d_n = \prod_{i=1}^{n} b_i$

6. จงตอบคำถาม ข้อ (a) - (d) สำหรับลำดับ Ω นิยามดังนี้

$\Omega_n = 3$ สำหรับทุกค่า n

จงหา

(a) $\sum_{i=1}^{3} \Omega_i$

(b) $\sum_{i=1}^{10} \Omega_i$

(c) สูตรสำหรับลำดับ c นิยามดังนี้

$$c_n = \sum_{i=1}^{n} \Omega_i$$

(d) สูตรสำหรับลำดับ d นิยามดังนี้

$$d_n = \prod_{i=1}^{n} \Omega_i$$

7. จงตอบคำถาม ข้อ (a) - (c) สำหรับลำดับ x นิยามดังนี้

$$x_1 = 2,\ x_n = 3 + x_{n-1}\ ,\ n \geq 2$$

จงหา

(a) $\sum_{i=1}^{3} x_i$

(b) $\sum_{i=1}^{10} x_i$

(c) สูตรสำหรับลำดับ c นิยามดังนี้

$$c_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

8. จงตอบคำถาม ข้อ (a) - (d) สำหรับลำดับ w นิยามดังนี้

$$w_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\ ,\ n \geq 1$$

จงหา

(a) $\sum_{i=1}^{3} w_i$

(b) $\sum_{i=1}^{10} w_i$

(c) สูตรสำหรับลำดับ c นิยามดังนี้

$$c_n = \sum_{i=1}^{n} w_i$$

(d) สูตรสำหรับลำดับ d นิยามดังนี้

$$d_n = \prod_{i=1}^{n} w_i$$

9. ให้ u เป็นลำดับนิยามดังนี้

$u_1 = 2,\ u_n = 3 + u_{n-1}\ ,\ n \geq 2$

จงหา สูตรสำหรับ ลำดับ d นิยามดังนี้

$$d_n = \prod_{i=1}^{n} u_i$$

10. จงตอบคำถาม ข้อ (a) - (d) โดยใช้ลำดับ y และ z นิยามดังนี้

$y_n = 2^n - 1\ ,\ z_n = n(n-1)$

จงหา

(a) $\left(\sum_{i=1}^{3} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3} z_i\right)$

(b) $\left(\sum_{i=1}^{5} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{4} z_i\right)$

(c) $\sum_{i=1}^{3} y_i z_i$

(d) $\left(\sum_{i=3}^{4} y_i\right)\left(\sum_{i=2}^{4} z_i\right)$

11. จงตอบคำถาม ข้อ (a) - (h) สำหรับ ลำดับ r นิยามดังนี้

$r_n = 3 \cdot 2^n - 4 \cdot 5^n\ ,\ n \geq 0$

จงหา

(a) r_0

(b) r_1

(c) r_2

(d) r_3

(e) สูตรสำหรับ r_p

(f) สูตรสำหรับ r_{n-1}

(g) สูตรสำหรับ r_{n-2}

(h) จงแสดงให้เห็นว่า $\{r_n\}$ มีคุณสมบัติ

$$r_n = 7r_{n-1} - 10r_{n-2} \quad , \quad n \geq 2$$

12. จงตอบคำถาม ข้อ (a) - (h) สำหรับลำดับ z นิยามดังนี้

$$z_n = (2 + n)3^n \quad , \quad n \geq 0$$

(a) จงหา z_0

(b) จงหา z_1

(c) จงหา z_2

(d) จงหา z_3

(e) จงหาสูตร สำหรับ z_i

(f) จงหาสูตร สำหรับ z_{n-1}

(g) จงหาสูตร สำหรับ z_{n-2}

(h) จงแสดงให้เห็นว่า $\{z_n\}$ มีคุณสมบัติ

$$z_n = 6z_{n-1} - 9z_{n-2} \quad , \quad n \geq 2$$

แบบฝึกหัดเสริม 2.3

1. Find the following terms of the sequence $\{a_n\}$ where $a_n = 2.(-3)^n + 5^n$

   a) a_0 b) a_1 c) a_4 d) a_5

2. What is the term a_8 of the sequence $\{a_n\}$ if a_n equals

   a) 2^{n-1} b) 7 c) $1+(-1)^n$ d) $-(-2)^n$

3. What are the terms a_0, a_1, a_2, and a_3 of the sequence $\{a_n\}$ where a_n equals

   a) $2^n + 1$ b) $(n+1)^{n+1}$ c) $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ d) $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

4. จงหาค่าของ

   a) $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=0}^{2} i$ b) $\sum_{i=0}^{2} \sum_{j=1}^{3} ij$ c) $\pi_{k=1}^{100} (-1)^k$ d) $\pi_{i=5}^{8} i$ e) $\pi_{a=1}^{3} (\pi_{b=0}^{a} b)$

5. จงหาค่าของ

   a) $\sum_{i=0}^{3}(\sum_{j=0}^{4} ij)$ b) $\sum_{i=1}^{5}(\sum_{j=0}^{i} 1)$ c) $\pi_{j=1}^{4} (\sum_{i=0}^{3} j)$ d) $\pi_{i=1}^{3} (\pi_{j=0}^{i} j)$ e) $\sum_{j=0}^{4} j!$

1.4 จำนวนเต็มและการหาร (The Integers and Division)*

บทนิยาม 1 จำนวนเต็มบวก p มีค่ามากกว่า 1 จะเรียกว่า **จำนวนเฉพาะ** ถ้าเลขตัวนี้มีตัวประกอบบวกเป็น 1 และ p เท่านั้น

(A positive integer p greater than 1 is called **prime** if the only positive factors of p are 1 and p.)[1]

จำนวนเต็มบวก ซึ่งมีค่ามากกว่า 1 และไม่ใช่จำนวนเฉพาะเรียกว่าจำนวนประกอบ

(A positive integer that is greater than 1 and is not prime is called **composite**.)

จำนวน p มากกว่า 1 ในเซตของจำนวนเต็มบวกจะเรียกว่า **จำนวนเฉพาะ** ถ้าจำนวนเต็มบวกมีเพียง p และ 1 เท่านั้น ซึ่งหาร p ลงตัว

(A number $p > 1$ in Z^+ is called **prime** if the only positive integer that divide p are p and 1.)[2]

ตัวอย่าง 1 จำนวนเฉพาะ

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71

ตัวอย่าง 2 ไม่ใช่จำนวนเฉพาะ

4, 10, 16, 21

ทฤษฎีบท 1 จำนวนเต็มบวกทุกตัว $n > 1$ สามารถเขียนในรูปแบบหนึ่งอย่างเท่านั้น คือ

$$\boxed{n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s}}$$

ในที่นี้ $p_1 < p_2 < \dots < p_s$ หมายถึงจำนวนเฉพาะไม่ซ้ำกันซึ่งหาร n ลงตัวและ k's เป็นจำนวนเต็มบวก กำหนดให้เป็นจำนวนครั้งของจำนวนเฉพาะที่เกิดขึ้นและเป็นผลประกอบของ n

---

*Rosen หน้า 200 กล่าวว่า ส่วนของคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับเลขจำนวนเต็มและคุณสมบัติของมันอยู่ในสาขาของคณิตศาสตร์ที่ เรียกว่าทฤษฎีจำนวน (number theory)

[1] Rosen หน้า 210

[2] Kolman หน้า 60

(Every positive integer $n > 1$ can be uniquely written as

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s}$$

where $p_1 < p_2 < \ldots < p_s$ are the distinct primes that divide n, and the k's are positive integers giving the number of times each prime occurs as a factor of n.)

ตัวอย่าง 3 จงหาการแยกตัวประกอบเฉพาะ (prime factorization) ของ 100, 641, 999 และ 1024

ผลเฉลย

$$100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2$$

$641 = 641^1$ (เป็นจำนวนเฉพาะ)

$$999 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37 = 3^3 \cdot 37^1$$

$$1024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{10}$$

ตัวอย่าง 4 จงหาการแยกตัวประกอบเฉพาะของ 9, 24 และ 30

$$9 = 3 \cdot 3 = 3^2$$

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^1$$

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$

ทฤษฎีบท 2 ถ้า n เป็นจำนวนเต็มประกอบ, ตัวหารซึ่งเป็นจำนวนเฉพาะแล้วหาร n ลงตัวจะมีค่าน้อยกว่า หรือเท่ากับ $\sqrt{n}$

(If n is a composite integer, then n has a prime divisor less than or equal to $\sqrt{n}$.)

จากทฤษฎีบทข้างต้นนี้จะได้ว่า n จะเป็นจำนวนเฉพาะถ้าตัวหารที่เป็นจำนวนเฉพาะแล้วหาร n ไม่ลงตัว มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ $\sqrt{n}$

(Fom this theorem, it follow that an integer is prime if it is not divisible by any prime less than or equal to its square root.)

ตัวอย่าง 5 จงแสดงให้เห็นว่า 101 เป็นจำนวนเฉพาะ

ผลเฉลย จำนวนเฉพาะ ที่มีค่าไม่กว่า $\sqrt{101}$ ได้แก่ 2, 3, 5 และ 7

เนื่องจาก 101 หารด้วย 2, 3, 5 หรือ 7 ไม่ลงตัว (ผลหารของ 101 ด้วยตัวหารเหล่านี้ ทุกตัวไม่ใช่จำนวนเต็ม) แสดงว่า 101 เป็นจำนวนเฉพาะ

ตัวอย่าง 6 จงหาการแยกตัวประกอบเฉพาะของ 7007

ผลเฉลย จำนวนเฉพาะ 2, 3 และ 5 ไม่มีตัวใด หาร 7007 ลงตัว

แต่ 7 หาร 7007 ลงตัว

$$\frac{7007}{7} = 1001$$

ต่อไป $\frac{1001}{7} = 143$, $\frac{143}{7} = 13$

เนื่องจาก 13 เป็นจำนวนเฉพาะเมื่อกระบวนการนี้เสร็จสิ้นจะได้ว่า การแยกตัวประกอบเฉพาะของ 7007 คือ

$$7 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 7^2 \cdot 11^1 \cdot 13^1$$

หรือ

$$\begin{aligned} 7007 &= 7 \cdot 1001 \\ &= 7 \cdot 7 \cdot 143 \\ &= 7 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \\ &= 7^2 \cdot 11^1 \cdot 13^1 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 7 จงหา ผลหาร (quotient) และเศษเหลือ (remainder) ของเลข 101 หารด้วย 11 (101 เป็นตัวตั้ง (divident) 11 เป็นตัวหาร (divisor))

ผลเฉลย

$$101 = 11 \cdot 9 + 2$$

ดังนั้น ผลหาร คือ 9 และเศษเหลือ คือ 2 (หรือ $2 = 101 \bmod 11$)

ตัวอย่าง 8 จงหาผลหาร และเศษเหลือของเลข -11 หารด้วย 3

ผลเฉลย

$$-11 = 3(-4) + 1$$

ดังนั้น ผลหารคือ -4 เศษเหลือคือ 1

โปรดสังเกตว่า เศษเหลือต้องไม่ใช่ค่าลบ

(Note that the remainder connot be negative.)

เศษ ไม่ใช่ -2 ถึงแม้ว่า

$$-11 = 3(-3) - 2$$

เพราะว่า $r = -2$ ไม่เป็นไปตามหลัก $0 \leq r < 3$

บทนิยาม 2 ให้ a เป็นจำนวนเต็ม และ d เป็นจำนวนเต็มบวก เราใช้สัญลักษณ์ **a mod d** คือ เศษเหลือ เมื่อ a เป็นตัวตั้ง และ d เป็นตัวหาร

(Let a be an integer and d be a positive integer. We denoted by **a mod d** the remainder when a is divided by d.)

จากบทนิยามของเศษ จะได้ว่า a mod d คือ จำนวนเต็ม r โดยที่ $a = qd + r$ และ $0 \leq r < d$

ในที่นี้ a = ตัวตั้ง (dividend) , q = ผลหาร (quotient)

d = ตัวหาร (divisor) , r = เศษ (remainder)

ตัวอย่าง 9

$17 \bmod 5 = 2$

$-133 \bmod 9 = 2$

$2001 \bmod 101 = 82$

บทนิยาม 8 ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มไม่ใช่ศูนย์ทั้งคู่ จำนวนเต็มใหญ่ที่สุด d โดยที่ d หาร a ลงตัว และ d หาร b ลงตัว เรียกว่า **ตัวหารร่วมมาก** ของ a และ b ตัวหารร่วมมากของ a และ b ใช้สัญลักษณ์ gcd (a, b)

(Let a and b be integers, not both zero. The largest integer d such that $d \mid a$ and $d \mid b$ is called the **greatest common divisor** of a and b. The greatest common divisor of a and b is denoted by gcd (a, b).)

ตัวอย่าง 10 จงหา gcd ของ 24 และ 36

ผลเฉลย ตัวหารร่วม (common divisors) ของ 24 และ 36 ได้แก่ 1, 2, 3, 4, 6 และ 12

เนื่องจาก 12 มีค่ามากที่สุด

เพราะฉะนั้น gcd (24, 36) = 12

ตัวอย่าง 11 จงหา gcd (12, 30)

ตัวหารร่วมของ 12 และ 30 ได้แก่ 1, 2, 3 และ 6

เนื่องจาก 6 เป็นเลขใหญ่สุด

เพราะฉะนั้น gcd (12, 30) = 6

Rosen หน้า 201 สัญกรณ์ $a \mid b$ หมายถึง a หาร b ลงตัว เราเขียน $a \nmid b$ เมื่อ a หาร b ไม่ลงตัว

(The notation $a \mid b$ denotes that a divides b. We write $a \nmid b$ when a does not divide b.)

ตัวอย่าง 12 จงหา gcd ของ 17 และ 22

ผลเฉลย จำนวนเต็ม 17 และ 22 มีตัวหารร่วม เป็น 1 เท่านั้น

ดังนั้น $\gcd(17, 22) = 1$

บทนิยาม 4 จำนวนเต็ม a และ b จะเป็น**จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์** ถ้าเลขทั้งสองตัวนี้มีตัวหารร่วมมากเป็น 1

(The integers a and b are **relatively prime** if their greatest common divisor is 1.)

ตัวอย่าง 13 จำนวนเต็ม 17 และ 22 เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์เพราะว่า $\gcd(17, 22) = 1$

ตัวอย่าง 14 $\gcd(17, 95) = 1$ เพราะฉะนั้น 17 และ 95 เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

บทนิยาม 5 จำนวนเต็ม $a_1, a_2, \ldots, a_n$ จะเป็น**จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ทุกคู่** ถ้า $\gcd(a_i, a_j) = 1$ เมื่อใดก็ตามที่ $1 \leq i < j \leq n$

(The integer $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are **pairwise relative prime** if $\gcd(a_i, a_j) = 1$ whenever $1 \leq i < j \leq n$)

ตัวอย่าง 15 จงบอกว่า จำนวนเต็ม 10, 17 และ 21 เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์หรือไม่?

ผลเฉลย

$\gcd(10, 17) = 1$

$\gcd(10, 21) = 1$

$\gcd(17, 21) = 1$

แสดงว่า 10, 17, 21 เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ทุกคู่

ตัวอย่าง 16 จำนวนเต็ม 10, 19 และ 24 เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ทุกคู่ หรือไม่?

ผลเฉลย

$\gcd(10, 24) = 2 > 1$

แสดงว่า 10, 19 และ 24 ไม่ใช่จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ทุกคู่

อีกวิธีหนึ่ง ในการหาตัวหารร่วมมากของจำนวนเต็มสองตัวคือ ใช้การแยกตัวประกอบเฉพาะ (prime factorizations) ของเลขสองตัวนี้

$$a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n}, \quad b = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_n^{b_n}$$

เมื่อเลขชี้กำลังทุกตัวเป็นเลขจำนวนเต็มไม่เป็นลบ

จะได้

$$\boxed{\gcd(a, b) = p_1^{\min(a_1, b_1)} p_2^{\min(a_2, b_2)} \cdots p_n^{\min(a_n, b_n)}}$$

ตัวอย่าง 17 จงหา gcd ของ 10 และ 12

ผลเฉลย การแยกตัวประกอบเฉพาะของ

$10 = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^1$, $12 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0$

$$\begin{aligned} \gcd(10, 12) &= 2^{\min(1,2)} \cdot 3^{\min(0,1)} \cdot 5^{\min(1,0)} = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 18 จงหา gcd (120, 500)

ผลเฉลย การแยกตัวประกอบเฉพาะของ

$120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$, $500 = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^3$

$$\begin{aligned} \gcd(120, 500) &= 2^{\min(3,2)} \cdot 3^{\min(1,0)} \cdot 5^{\min(1,3)} = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \\ &= 20 \end{aligned}$$

บทนิยาม 6 ตัวคูณร่วมน้อย ของจำนวนเต็มบวก a และ b หมายถึง จำนวนเต็มบวกเล็กที่สุด ซึ่งหารด้วย a ลงตัวและหารด้วย b ลงตัว ตัวคูณร่วมน้อยของ a และ b ใช้สัญลักษณ์ lcm (a, b) (The **least common multiple** of the positive integers a and b is the smallest positive integer that is divisible by both a and b. The least common multiple of a and b is denoted by lcm (a, b).)

ตัวอย่าง 19 จงหา lcm ของ 12 และ 10

ผลเฉลย

$$\begin{aligned} \mathrm{lcm}(10,12) &= 2^{\max(1,2)} \cdot 3^{\max(0,1)} \cdot 5^{\max(1,0)} = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \\ &= 60 \end{aligned}$$

อีกวิธีหนึ่ง

$$\boxed{\mathrm{lcm}(a,b) = p_1^{\max(a_1, b_1)} p_2^{\max(a_2, b_2)} \cdots p_n^{\max(a_n, b_n)}}$$

จากตัวอย่างข้างต้น

$$\text{lcm}(10, 12) = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 60 \text{ หรือ } \text{lcm}(10, 12) = \frac{10.12}{\gcd(10,12)} = \frac{120}{2} = 60$$

$$\text{lcm}(120, 500) = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^3 = 3000 \text{ หรือ } \text{lcm}(120, 500) = \frac{120 \cdot 500}{\gcd(120,500)}$$

$$= \frac{60000}{20} = 3000$$

ตัวอย่าง 20 จงหา gcd และ lcm ของ 10 และ 25

ผลเฉลย

$$10 = 2^1 \cdot 5^1 \ , \ 25 = 5^2 = 2^0 \cdot 5^2$$

$$\gcd(10, 25) = 2^{\min(1,0)} \cdot 5^{\min(1,2)} = 2^0 \cdot 5^1 = 5$$

$$\text{lcm}(10, 25) = 2^{\max(1,0)} \cdot 5^{\max(1,2)} = 2^1 \cdot 5^2 = 50$$

ตัวอย่าง 21 จงหา gcd และ lcm ของ 168 และ 450

ผลเฉลย

$$168 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 7^1 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^1 \ , \ 450 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^0$$

จะได้ $\gcd(168, 450) = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0 = 6$

$$\text{lcm}(168, 450) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 12{,}600$$

ตัวอย่าง 22 จงหาตัวคูณร่วมน้อยของ $2^3\ 3^5\ 7^2$ และ $2^4\ 3^3$

ผลเฉลย

$$\text{lcm}(2^3\ 3^5\ 7^2\ ,\ 2^4\ 3^3\ 7^0) = 2^{\max(3,4)}\ 3^{\max(5,3)}\ 7^{\max(2,0)}$$

$$= 2^4\ 3^5\ 7^2$$

ทฤษฎีบท 8 ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้

$$\boxed{ab = \gcd(a, b) \cdot \text{lcm}(a, b)}$$

(Let a and b be positive integers, then ab = gcd (a, b,)·lcm (a, b).)

ตัวอย่าง 23 ให้ $a = 540$, $b = 504$

ผลเฉลย

$$a = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^0, \quad b = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^1$$

$$\begin{aligned}
\gcd(540, 504) &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^0 = 36 \\
\mathrm{lcm}(540, 504) &= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 7{,}560 \\
a \cdot b &= 540 \times 504 \\
&= 272{,}160
\end{aligned}$$

อัลกอริทึมแบบยุคลิด

(Euclidean algorithm)

$$\boxed{\gcd(a, b) = \begin{cases} \gcd(b, a \bmod b) & \text{if } a > b \\ a & \text{if } b = 0 \end{cases}}$$

ตัวอย่าง 24 จงหา gcd ของ 108 และ 60

ผลเฉลย

$$\begin{aligned}
\gcd(108, 60) &= \gcd(60, 108 \bmod 60) && \because 108 > 60 \\
&= \gcd(60, 48) \\
&= \gcd(48, 60 \bmod 48) && \because 60 > 48 \\
&= \gcd(48, 12) \\
&= \gcd(12, 48 \bmod 12) && \because 48 > 12 \\
&= \gcd(12, 0) \\
&= 12 && \because b = 0
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 25 จงหา gcd (190, 34)

ผลเฉลย

$$\begin{aligned}
\gcd(190, 34) &= \gcd(34, 190 \bmod 34) \\
&= \gcd(34, 20) \\
&= \gcd(20, 34 \bmod 20) \\
&= \gcd(20, 14) \\
&= \gcd(14, 20 \bmod 14) \\
&= \gcd(14, 6)
\end{aligned}$$

$= \gcd(6, 14 \bmod 6)$

$= \gcd(6, 2)$

$= \gcd(2, 6 \bmod 2)$

$= \gcd(2, 0)$

$= 2$

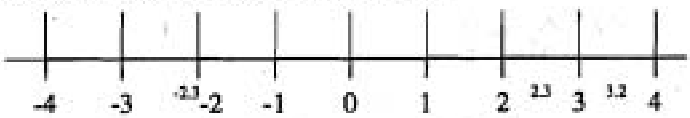
บทนิยาม **ฟอร์ของ x ใช้สัญลักษณ์ $\lfloor x \rfloor$ หมายถึง จำนวนเต็มใหญ่ที่สุดซึ่งมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ x**

(The **floor** of x, denote $\lfloor x \rfloor$, is the greatest integer less than or equal to x.)[3]

ซิลลิง ของ x ใช้สัญลักษณ์ $\lceil x \rceil$ หมายถึง จำนวนเต็มเล็กที่สุดซึ่งมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ x

(The **ceiling** of x, denoted $\lceil x \rceil$, is the least integer greater than or equal to x.)[4]

ตัวอย่าง 26 จงพิจารณาเส้นของจำนวนข้างล่างนี้



แล้วคำนวณหา

$\lfloor 2.3 \rfloor = 2$ $\qquad$ $\lceil 6 \rceil = 6$

$\lfloor -2.7 \rfloor = -3$ $\qquad$ $\lceil 9.1 \rceil = 10$

$\lfloor -2.3 \rfloor = -3$ $\qquad$ $\lceil -8 \rceil = -8$

$\lfloor 3.2 \rfloor = 3$ $\qquad$ $\lceil 3.2 \rceil = 4$

$\lceil 2.3 \rceil = 3$

$\lceil -2.3 \rceil = -2$

ข้อสังเกต

The floor of x "round x down while the ceiling of x "round x up"

---

[3] Johnsonbaugh หน้า 118

[4] Johnsonbaugh หน้า 118

แบบฝึกหัด 1.4

1. เลขตัวใดเป็นจำนวนเฉพาะ

   a) 19 b) 27 c) 93

   d) 101 e) 107 f) 113

2. ในแต่ละข้อย่อยข้างล่างนี้ ผลหารคืออะไร เศษเหลือคืออะไร (In each of the following cases, what are the quotient and remainder?)

   a) 19 หารด้วย 7 b) -111 หารด้วย 11

   c) 789 หารด้วย 23 d) 1001 หารด้วย 13

   e) 0 หารด้วย 19 f) 3 หารด้วย 5

   g) -1 หารด้วย 3 h) 4 หารด้วย 1

3. จงหาการแยกตัวประกอบเฉพาะ (prime factorization) ของเลขข้างล่างนี้

   a) 39 b) 81 c) 101

   d) 143 e) 289 f) 899

   g) 1001 h) 1111 i) 909, 090

4. จงหา prime factorization ของ 10! (คำตอบ $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1$)

5. เซตของจำนวนเต็มข้างล่างนี้เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ทุกคู่หรือไม่

   a) (11, 15, 19) b) (14, 15, 21)

   c) (12, 17, 31, 37) d) (7, 8, 9, 11)

6. จงหาตัวหารร่วมมากของคู่ของจำนวนเต็มข้างล่างนี้

   a) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5$, $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2$

   b) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, $2^{11} \cdot 3^9 \cdot 11 \cdot 17^4$

   c) 17, 17^{17}

   d) $2^2 \cdot 7$, $5^3 \cdot 13$

   e) 0, 5

   f) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

7. จงหา prime factorization ของ 500

   a) $5 \cdot 10 \cdot 10$ b) $4 \cdot 125$ c) $2^2 \cdot 5^3$ d) $5 \cdot 10^2$

8. จงหา prime factorization ของ 7007

   a) $7^2 \cdot 143$ b) $7^2 \cdot 11 \cdot 13$ c) $7 \cdot 1001$ d) $11 \cdot 13 \cdot 49$

9. เลข -11 หารด้วย 3 ผลหารคืออะไร? เศษคืออะไร?

   a) -4, 1 b) 4, -1 c) -3, -2 4) 4, -2

10. จงประเมินผลปริมาณข้างล่างนี้ (Evaluate the following quantities.)

a) 13 mod 3   b) -97 mod 11   c) 155 mod 19   d) -221 mod 23

11. ถ้าผลคูณของจำนวนเต็มสองตัวคือ $2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^2 \cdot 7^{11}$ และตัวหารร่วมมากคือ $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$ จงหาตัวคูณร่วมน้อยของเลขสองตัวนี้

12. จงหาค่าของ $\left\lceil \frac{-4}{5} \right\rceil$

a) -1   b) 0   c) 1   d) 2

13. จงหาค่าของ $\left\lfloor \frac{-6}{7} \right\rfloor$

a) -1   b) 0   c) 1   d) 2

1.5 จำนวนเต็มและอัลกอริทึม (Integers and Algorithms)

มีอัลกอริทึมที่สำคัญมากมายซึ่งเกี่ยวข้องกับจำนวนเต็ม นอกเหนือจากอัลกอริทึมที่ใช้ในทางคำนวณ เราจะเริ่มต้นอภิปรายหัวข้อนี้ด้วยอัลกอริทึมแบบยุคลิด ซึ่งเป็นอัลกอริทึมที่มีประโยชน์มากที่สุดชุดหนึ่ง และเป็นอัลกอริทึมเก่าที่สุดในวิชาคณิตศาสตร์ จากนั้นจะอภิปรายอัลกอริทึมสำหรับการกระจายเลขฐาน b ของจำนวนเต็มบวกสำหรับเลขฐาน b ใด ๆ (an algorithm for finding the base b expansion of a positive integer for any base b.)

อัลกอริทึมแบบยุคลิด (The Euclidean Algorithm)

อัลกอริทึมนี้ เป็นที่รู้จักกันตั้งแต่สมัยโบราณ ใช้ในการหาตัวหารร่วมมากของจำนวนเต็มสองตัว และเป็นวิธีซึ่งมีประสิทธิภาพมากกว่า การใช้ prime factorization ที่ได้กล่าวมาแล้ว ยุคลิดเป็นนักคณิตศาสตร์ชาวกรีก

ตัวอย่าง 1 จงหา gcd (91, 287)

$$287 = 91 \cdot 3 + 4$$

$$91 = 14 \cdot 6 + 7$$

$$14 = 7 \cdot 2$$

เพราะว่า 7 หาร 14 ลงตัว เพราะฉะนั้น gcd (14, 7) = 7

สรุป gcd (287, 91) = gcd (91, 14)

= gcd (14, 7)

= 7

โดยทั่วไปแล้ว อัลกอริทึมแบบยุคลิดทำงานดังนี้ : ใช้การหารอย่างสืบเนื่อง เพื่อลด (reduce) ปัญหาการหาปัญหาตัวหารร่วมมากของจำนวนเต็มบวกสองตัว ให้เป็นปัญหาเดิม โดยที่จำนวนเต็มคณิตศาสตร์ขนาดเล็กกว่าจนกระทั่งจำนวนเต็มตัวหนึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์

ให้ $a = bq + r$ เมื่อ a, b, q และ r เป็นจำนวนเต็ม

จะได้

$$\gcd(a, b) = \begin{cases} \gcd(b, r), & a > b \\ a, & b = 0 \end{cases}$$

ตัวอย่าง 2 จงหาตัวหารร่วมมากของ 414 และ 662 โดยใช้อัลกอริทึมแบบยุคลิด

ผลเฉลย

$$662 = 414 \cdot 1 + 248$$
$$414 = 248 \cdot 1 + 166$$
$$248 = 166 \cdot 1 + 82$$
$$166 = 82 \cdot 2 + 2$$
$$82 = 2 \cdot 41$$

ดังนั้น

gcd (414, 62) = 2 เพราะว่า 2 เป็นเศษเหลือตัวสุดท้าย ซึ่งไม่เท่ากับศูนย์

Algorithm 1 The Euclidean Algorithm

```
procedure gcd (a, b : positive integers)
    x := a
    y := b
    while y ≠ 0
    begin
        r := x mod y
        x := y
        y := r
    end  {gcd (a, b) is x}
```

ตัวแทนจำนวนเต็ม (Representations of Integers)

ในชีวิตประจำวันเราใช้สัญกรณ์ฐานสิบเพื่อแสดงจำนวนเต็ม ตัวอย่างเช่น 965 ใช้แทน $9 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 5$ อย่างไรก็ตาม บ่อยครั้งจะสะดวกเมื่อใช้เลขฐานอื่นแทนเลขฐานสิบ โดยเฉพาะเครื่องคอมพิวเตอร์ ใช้สัญกรณ์ฐานสอง (binary notation) เมื่อคำนวณ และสัญกรณ์ฐานแปด หรือสัญกรณ์ฐานสิบหกเมื่อแสดงถึงตัวอักขระ เช่น ตัวอักษร หรือ เลขโดด จริง ๆ แล้วเราสามารถใช้เลขจำนวนบวกใด ๆ ซึ่งมากกว่า 1 เป็นฐาน เมื่อแสดงถึงจำนวนเต็ม

ทฤษฎีบท ให้ b เป็นเลขจำนวนเต็มบวก มีค่ามากกว่า 1 จะได้ว่า ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก เราสามารถแสดงให้อยู่ในรูปแบบได้อย่างเดียว ดังนี้

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \ldots + a_1 b + a_0$$

เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก ไม่เป็นลบ ,

$a_1, a_2, \ldots, a_k$ เป็นจำนวนเต็มบวก ไม่เป็นลบ มีค่าน้อยกว่า b และ $a_k \neq 0$

การกระจายของ n ด้วยฐาน b ใช้สัญลักษณ์ $(a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0)_b$

(The base b expansion of n is denoted by $(a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0)$)

ตัวอย่างเช่น $(245)_8$ แทน $2 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 + 5 = 165$

ถ้าเลือก 2 เป็นฐาน เรียกว่า **การกระจายฐานสอง** (binary expansion) ของจำนวนเต็ม ในสัญกรณ์เลขฐานสอง เลขโดดแต่ละตัวอาจจะเป็น 0 หรือ 1 พูดอีกอย่างหนึ่งคือ การกระจายฐานสองใช้ในคอมพิวเตอร์ ใช้แทนและทำการคำนวณกับจำนวนเต็ม

ตัวอย่าง 8 จงหาการกระจายฐานสิบของจำนวนเต็มซึ่งมีการกระจายฐานสองเป็น $(101011111)_2$

ผลเฉลย

$$\begin{aligned}(101011111)_2 &= 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 \\ &= 351\end{aligned}$$

ฐานสิบหกเป็นเลขฐานอีกชนิดหนึ่งใช้ในคอมพิวเตอร์ การกระจายฐานสิบหกของจำนวนเต็ม เรียกว่า hexadecimal expansion

โดยปกติ เลขฐานสิบหกมีเลขให้ใช้ 16 ตัว ดังนี้ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E และ F เมื่อตัวอักษร A ถึง F แทน เลขโดด 10 ถึง 15 (ในสัญกรณ์ฐานสิบ)

ตัวอย่าง 4 จงหาการกระจายฐานสิบของการกระจายฐานสิบหก $(2AEOB)_{16}$

ผลเฉลย

$$(2AEOB)_{16} = 2 \cdot 16^4 + 10 \cdot 16^3 + 14 \cdot 16^2 + 0 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0$$
$$= (175627)_{10}$$

เพราะว่า การแทนที่เลขฐานสิบหก หนึ่งตัวใช้เลขฐานสอง 4 บิต (bits) ส่วนคำว่า **ไบต์** (byte) หมายถึง สายบิต (bit string) ของความยาวเท่ากับแปด ซึ่งแทนด้วยเลขฐานสิบหก 2 ตัว

ตัวอย่างเช่น

$$(11100101)_2 = (E5)_{16}$$

เพราะว่า $(1110)_2 = (E)_{16}$ และ $(0101)_2 = (5)_{16}$

ตัวอย่าง 5 จงหาการกระจายฐานแปดของ $(12345)_{10}$

ผลเฉลย ขั้นแรก หาร 12345 ด้วย 8 จะได้

$$12345 = 8 \cdot 1543 + 1$$

หารผลหารต่อไปอย่างสืบเนื่องด้วย 8 จะได้ว่า

$$1543 = 8 \cdot 192 + 7$$
$$192 = 8 \cdot 24 + 0$$
$$24 = 8 \cdot 3 + 0$$
$$3 = 8 \cdot 0 + 3$$

เนื่องจากเศษเหลือคือเลขโดดของการกระจายฐานแปด ของ 12345

เพราะฉะนั้น

$$(12345)_{10} = (30071)_8$$

ตัวอย่าง 6 จงหาการกระจายฐานสิบหกของ $(177130)_{10}$.

ผลเฉลย

$$177130 = 16 \cdot 11070 + 10$$
$$11070 = 16 \cdot 691 + 14$$
$$691 = 16 \cdot 43 + 3$$
$$43 = 16 \cdot 2 + 11$$
$$2 = 16 \cdot 0 + 2$$

เนื่องจากเศษเหลือคือเลขโดดของการกระจายฐานสิบหกของ $(177130)_{10}$ เพราะฉะนั้น

$$(177130)_{10} = (2B3EA)_{16}$$

ตัวอย่าง 7 จงหาการกระจายฐานสองของ $(241)_{10}$

ผลเฉลย $241 = 2 \cdot 120 + 1$

หารอย่างสืบเนื่องด้วย 2 ผลลัพธ์คือ

$$
\begin{aligned}
120 &= 2 \cdot 60 + 0 \\
60 &= 2 \cdot 30 + 0 \\
30 &= 2 \cdot 15 + 0 \\
15 &= 2 \cdot 7 + 1 \\
7 &= 2 \cdot 3 + 1 \\
3 &= 2 \cdot 1 + 1 \\
1 &= 2 \cdot 0 + 1
\end{aligned}
$$

คำตอบ $(241)_{10} = (11110001)_2$

รหัสเทียมซึ่งกำหนดในอัลกอริทึมข้างล่างนี้ คำนวณหาการกระจายฐาน b $(a_{k-1} \ldots a_1 a_0)_n$ ของจำนวนเต็ม n

Algorithm 2 Constructing Base b Expansions

procedure base b expansion (n : positive integer)

$q := n$

$k := 0$

while $q \neq 0$

begin

$a_k := q$ **mod** b

$q := \lfloor q/b \rfloor$

$k := k + 1$

end {the base b expansion of n is $(a_{k-1} \ldots a_1 a_0)_b$}

ในอัลกอริทึมนี้ q แทนผลหารได้มาจากการหารสืบเนื่อง ด้วย b เริ่มต้น ให้ $q = n$ เลขโดดในการกระจายฐาน b คือ เศษของการหารและกำหนดโดย q **mod** b อัลกอริทึมจะจบเมื่อผลหาร $q = 0$

แบบฝึกหัด 1.5

1. จงใช้อัลกอริทึมแบบยุคลิดคำนวณหา

   a) gcd (12, 18) b) gcd (111, 201)

   c) gcd (1001, 1331) d) gcd (12345, 54321)

   e) gcd (252, 198) f) gcd (10223, 33341)

   g) gcd (1989, 1590)

2. จงใช้อัลกอริทึมแบบยุคลิดคำนวณหา

   a) gcd (1, 5) b) gcd (100, 101)

   c) gcd (123, 277) d) gcd (1529, 14039)

   e) gcd (1529, 14038) f) gcd (11111, 111111)

3. ในการหา gcd (21, 34) โดยใช้อัลกอริทึมแบบยุคลิดจะมีการหารกี่ครั้ง

4. ในการหา gcd (34, 55) โดยใช้อัลกอริทึมแบบยุคลิดจะมีการหารกี่ครั้ง

5. จงแปลงผัน (convert) จำนวนเต็มต่อไปนี้ จากสัญกรณ์ฐานสิบ ไปเป็น สัญกรณ์ฐานสอง

   a) 231 b) 4532 c) 97644

6. จงแปลงผันจำนวนเต็มต่อไปนี้จากสัญกรณ์ฐานสิบไปเป็นสัญกรณ์ฐานสอง

   a) 321 b) 1023 c) 100632

7. จงแปลงผันจำนวนเต็มต่อไปนี้จากสัญกรณ์ฐานสองให้เป็นสัญกรณ์ฐานสิบ

   a) 11111 b) 10000 00001

   c) 10101 0101 d) 11010 01000 10000

8. จงแปลงผันจำนวนเต็มต่อไปนี้จากสัญกรณ์ฐานสองให้เป็นสัญกรณ์ฐานสิบ

   a) 11011 b) 10101 10100

   c) 11101 11110 d) 11111 00000 11111

9. จงแปลงผันจำนวนเต็มต่อไปนี้จากสัญกรณ์ฐานสิบหกให้เป็นสัญกรณ์ฐานสอง

   a) 80E b) 135AB

   c) ABBA d) DEFACED

10. จงแปลงผันจำนวนเต็มต่อไปนี้จากสัญกรณ์ฐานสองให้เป็นสัญกรณ์ฐานสิบหก

    a) 111 10111

    b) 10 10101 01010

    c) 11101 11011 10111

ส่วนเติมเต็มของหนึ่ง (One's complement)

หมายถึง ตัวแทนจำนวนเต็มซึ่งใช้เพื่อทำให้การคำนวณของคอมพิวเตอร์ง่ายขึ้น การแทนที่จำนวนเต็มบวก และจำนวนเต็มลบด้วยค่าสัมบูรณ์ น้อยกว่า 2^n จะใช้ จำนวนบิต ทั้งหมด n + 1 บิต บิตซ้ายมือสุดใช้แทนเครื่องหมาย ถ้าตำแหน่งนี้เป็นบิต 0 แสดงว่าเป็นจำนวนเต็มบวก และถ้าตำแหน่งนี้เป็นบิต 1 แสดงว่าเป็นจำนวนเต็มลบ

สำหรับจำนวนเต็มบวกบิตที่เหลือ เหมือนกับการกระจายเลขฐานสองของจำนวนเต็ม สำหรับจำนวนเต็มลบบิตที่เหลือได้มาจากครั้งแรกคำนวณหาการกระจายฐานสองของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็ม จากนั้นคำนวณหาส่วนเติมเต็มของแต่ละบิตซึ่งส่วนเติมเต็มของ 1 คือ 0 และส่วนเติมเต็มของ 0 คือ 1

11. จงหาการตัวแทนส่วนเติมเต็มของหนึ่ง โดยใช้สายบิตความยาวเท่ากับหกของจำนวนเต็มต่อไปนี้

a) 22 b) 31 c) -7 d) -19

12. จงหาจำนวนเต็มของการตัวแทนส่วนเติมเต็มของหนึ่งความยาวเท่ากับห้าข้างล่างนี้

(What integer dose each of the following one's complement representations of length five represent?)

a) 11001 b) 01101 c) 10001 d) 11111