7 หลักการนำเข้า-ตัดออก

Inclusion-Exclusion Principle

7.1 ตัวอย่างและทฤษฎีบท

Examples and Theorems

การนับจำนวนสิ่งของซึ่งมีสมบัติที่กำหนดให้นั้น โดยทั่วไปทำได้สองวิธี คือ วิธีนับโดยทางตรงและวิธีนับโดยทางอ้อม มักปรากฏบ่อยครั้งว่าการนับโดยทางอ้อมง่ายกว่าการนับโดยทางตรง ตัวอย่างเช่น การนับจำนวนการจัดเรียงของสมาชิกในเซต $\{1,2, \ldots, n\}$ โดยต้องการนับจำนวนการจัดเรียงเฉพาะที่ 1 ไม่อยู่ในตำแหน่งแรก นั่นคือ ต้องการนับจำนวนวิธีการจัดเรียงที่อยู่ในรูป $i_1 i_2 \ldots i_n$ เมื่อ $i_1 \neq 1$ เราสามารถแยกนับการจัดเรียงออกเป็นพวก ๆ คือนับการจัดเรียงพวกที่ขึ้นต้นด้วย 2 , พวกที่ขึ้นต้นด้วย 3 ... และต่อไปเรื่อย ๆ จนถึงพวกที่ขึ้นต้นด้วย n จะเห็นว่า มีการจัดเรียงทั้งหมด n-1 พวก พวกที่ขึ้นต้นด้วย 2 คือพวกที่อยู่ในรูป $i_1 i_2 \ldots i_n$ เมื่อ $i_1 = 2$ จะมีจำนวนเท่ากับจำนวนวิธีการจัดเรียงของเซต $\{1, 3, 4, \ldots, n\}$ ซึ่งมีสมาชิก n-1 ตัว (ไม่รวม 2) ดังนั้น จำนวนวิธีจัดเรียงที่ขึ้นต้นด้วย 2 จะมีทั้งหมด $(n-1)!$ วิธี การนับจำนวนวิธีจัดเรียงที่

ขึ้นต้นด้วย 3, 4, ..., n ก็ทำได้ในทำนองเดียวกัน แต่ละพวกจะมี (n-1)! วิธี นำทั้งหมดมารวมเข้าด้วยกัน จะได้

$$(n-1)! + (n-1)! + \ldots + (n-1)! = (n-1)!(n-1)$$

วิธี ดังนั้นจำนวนวิธีการจัดเรียงของเซต {1, 2, ..., n} ซึ่ง 1 ไม่อยู่ในตำแหน่งแรก มีทั้งหมด (n-1)!(n-1) วิธี การนับดังกล่าวนี้เป็นการนับโดยทางตรง ต่อไปจะพิจารณาการนับโดยทางอ้อม คือนับจำนวนสิ่งของที่ไม่มีสมบัติตามที่ต้องการ แล้วนำไปหักออกจากจำนวนสิ่งของทั้งหมด ที่เหลือก็คือจำนวนสิ่งของซึ่งมีสมบัติตามที่ต้องการ จากตัวอย่างข้างบนนี้จะเห็นว่าจำนวนสิ่งของทั้งหมดคือจำนวนวิธีจัดเรียงของเซต {1, 2, ..., n} ซึ่งมีทั้งหมด n! วิธี จำนวนวิธีจัดเรียงที่มี 1 อยู่ในตำแหน่งแรกจะเท่ากับจำนวนวิธีจัดเรียงของเซต {2, 3, ..., n} นั่นคือ นำ 1 ไปใส่ไว้ในตำแหน่งแรกก่อน ส่วนตำแหน่งที่ 2, 3, ..., n จะเป็นอะไรก็ได้ในเซต {2, 3, ..., n} การจัดเรียงดังกล่าวนี้ได้แก่การจัดเรียงที่อยู่ในรูป $i_1 i_2 \ldots i_n$ เมื่อ $i_1 = 1$ จำนวนวิธีจัดเรียงที่มี 1 ในตำแหน่งแรกนี้มีทั้งหมด (n-1)! วิธี นำจำนวนนี้ไปหักออกจากจำนวนวิธีการจัดเรียงทั้งหมด ผลที่ได้ก็คือจำนวนวิธีจัดเรียงซึ่ง 1 ไม่อยู่ในตำแหน่งแรก นั่นคือ $n!-(n-1)! = (n-1)!(n-1)$ เป็นจำนวนวิธีจัดเรียงที่ 1 ไม่อยู่ในตำแหน่งแรก

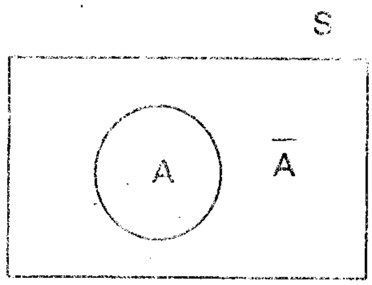
หลักที่ใช้ในการนับแบบทางอ้อมนี้คือ ถ้า A เป็นเซตย่อยของเซต S แล้ว จำนวนสมาชิกในเซต A จะเท่ากับจำนวนสมาชิกใน S ลบด้วยจำนวนสมาชิกที่ไม่อยู่ใน A เราจะใช้สัญลักษณ์ $\overline{A}$ แทนคอมพลีเมนต์ของ A นั่นคือ ให้ $\overline{A}$ เป็นเซตของสมาชิกใน S ที่ไม่อยู่ในเซต A และจะใช้สัญลักษณ์ N(A) แทนจำนวนสมาชิกในเซต A

ในขั้นแรกนี้เราจะศึกษาการนับสิ่งของซึ่งมีสมบัติเพียงข้อเดียว แล้วจึงค่อยขยายไปถึงการนับสิ่งของที่เกี่ยวข้องกับสมบัติหลาย ๆ ข้อ

ในตัวอย่างข้างบนนี้สิ่งของที่ต้องการนับคือจำนวนวิธีการจัดเรียงของเซต {1, 2, ..., n} สมบัติที่เกี่ยวข้องคือตำแหน่งของ 1 ในการจัดเรียง ถ้าให้ A เป็นเซตของการจัดเรียงที่มี 1 อยู่ในตำแหน่งแรก เราต้องการหา $N(\overline{A})$ นั่นคือ หาจำนวนวิธีการจัดเรียงที่ 1 ไม่อยู่ในตำแหน่งแรก ถ้าให้ S เป็นเซตของวิธีจัดเรียงทั้งหมด จะพบว่าปัญหาในลักษณะนี้สามารถเขียนอธิบายได้ด้วยแผนภาพดังในรูป 7.1.1 เราใช้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแทนเซต S ใช้วงกลมแทนเซต A ส่วนที่อยู่นอกเซต A คือเซต $\overline{A}$ ดังนั้น เราได้

$N(A) = N(S) - N(\overline{A})$ หรือ

$N(\overline{A}) = N(S) - N(A)$



รูป 7.1.1

ตัวอย่าง 7.1.1 ให้ S = {1,2,...,600} จำนวนเต็มในเซต S ซึ่งหารด้วย 6 ไม่ลงตัวมีทั้งหมดกี่จำนวน

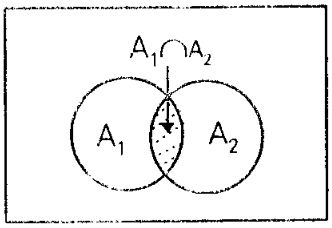
วิธีทำ ให้ A แทนเซตของจำนวนเต็มใน S ซึ่งหารด้วย 6 ลงตัว สมาชิกในเซต S ตัวแรกที่หารด้วย 6 ลงตัวคือ 6 ตัวที่สองคือ 12 ตัวที่สาม คือ 18 และต่อไปเรื่อย ดังนั้น $N(A) = \frac{600}{6} = 100$ **ทั้งนี้เนื่อง**จากสมาชิกทุก ๆ หกตัวใน S จะหารด้วย 6 ลงตัว แสดงว่าจำนวนสมาชิกใน S ซึ่งหารด้วย 6 ไม่ลงตัวจะเท่ากับ $N(\overline{A}) = N(S) - N(A) = 600 - 100 = 500$ ■

ที่กล่าวมาแล้วนั้นเป็นปัญหาง่าย ๆ เป็นปัญหาการนับจำนวนสิ่งของซึ่งเกี่ยวข้องกับสมบัติเพียงข้อเดียว ในกรณีที่สิ่งของที่ต้องการ

นับเกี่ยวข้องกับสมบัติมากกว่าหนึ่งข้อ เช่น ให้ S เป็นเซตของสิ่งของ ให้ P_1 และ P_2 เป็นสมบัติที่สมาชิกใน S อาจจะมีหรือไม่มี สมมุติว่าต้องการนับจำนวนสิ่งของซึ่งไม่มีทั้งสมบัติ P_1 และ P_2 ขั้นแรกเรานับจำนวนสิ่งของทั้งหมดที่มีสมบัติ P_1 และนับจำนวนสิ่งของทั้งหมดที่มีสมบัติ P_2 จะเห็นว่าสิ่งของที่มีสมบัติทั้ง P_1 และ P_2 จะถูกนับสองครั้ง ครั้งหนึ่งถูกนับรวมอยู่ในพวกที่มีสมบัติ P_1 และอีกครั้งหนึ่งถูกนับรวมอยู่ในพวกที่มีสมบัติ P_2 เมื่อเรานำจำนวนทั้งสองไปหักออกจากจำนวนสมาชิกใน S สิ่งของหรือสมาชิกที่มีทั้งสมบัติ P_1 และ P_2 เหล่านี้จะถูกหักออกสองครั้ง ดังนั้น เราจะต้องบวกจำนวนสมาชิกที่มีทั้งสมบัติ P_1 และ P_2 กลับเข้าไปอีกครั้งหนึ่ง เพื่อให้เข้าใจง่าย เราให้

A_1 แทนเซตของสมาชิกของ S ที่มีสมบัติ P_1

A_2 แทนเซตของสมาชิกของ S ที่มีสมบัติ P_2



รูป 7.1.2

ดังนั้น จำนวนสมาชิกของ S ที่ไม่มีทั้งสมบัติ P_1 และ P_2 คือ

$$N(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) = N(S) - N(A_1) - N(A_2) + N(A_1 \cap A_2) \qquad \text{..............(7.1.1)}$$

เพื่อแสดงว่าจำนวนทางซ้ายมือเท่ากับจำนวนทางขวามือ เราจะต้องแสดงว่าทั้งสองข้างเป็นจำนวนของสิ่งเดียวกัน นั่นคือเป็นจำนวนของสมาชิกที่ไม่มีสมบัติทั้ง P_1 และ P_2 ให้ลองนึกภาพการทำงานในโรงสีข้าว คนงานจะนับจำนวนกระสอบข้าวสารโดยการหย่อนติ้วลงในกล่องนับจำนวนข้าวสาร ให้คิดว่า A_1 ก็คือกล่องที่ใส่สมาชิกที่มีสมบัติ P_1 หรือ $A_1 \cap A_2$ ก็คือกล่องที่ใส่สมาชิกที่มีสมบัติ P_1 และ P_2 เป็นต้น

ถ้าเราให้ x เป็นสมาชิกของ S ซึ่งไม่มีทั้งสมบัติ P_1 และ P_2 แล้ว x จะต้องถูกนับเป็น 1 ในจำนวนทางขวามือ แต่ถ้า x เป็นสมาชิกของ S ที่มีสมบัติ P_1 อย่างเดียว หรือมีสมบัติ P_2 อย่างเดียว x จะต้องถูกนับเป็น 0 ทางขวามือ และถ้า x เป็นสมาชิกที่มีทั้งสมบัติ P_1 และ P_2 แล้ว x จะต้องถูกนับเป็น 0 ทางขวามือเช่นกัน ถ้า x เป็นสมาชิกของ S ที่ไม่มีทั้งสมบัติ P_1 และ P_2 แล้ว x จะถูกนับหนึ่งครั้งใน N(S) แต่ไม่ถูกนับใน $N(A_1)$ และไม่ถูกนับใน $N(A_2)$ และไม่ถูกนับใน $N(A_1 \cap A_2)$ นั่นคือ x ถูกนับ 1-0-0+0 = 1 ครั้งทางขวามือ ถ้า x เป็นสมาชิกของ S ซึ่งมีสมบัติ P_1 อย่างเดียวแล้ว x จะถูกนับ 1-1-0+0 = 0 ครั้ง หรือ ถ้า x เป็นสมาชิกของ S ซึ่งมีสมบัติ P_2 อย่างเดียวแล้ว x จะถูกนับ 1-0-1+0 = 0 ครั้ง และถ้า x เป็นสมาชิกของ S ซึ่งมีทั้งสมบัติ P_1 และ P_2 แล้ว x จะถูกนับ 1-1-1+1 = 0 ครั้ง ทั้งหมดนี้แสดงให้เห็นว่าจำนวนทางซ้ายมือและจำนวนทางขวามือเป็นจำนวนเดียวกัน

ตัวอย่าง 7.1.2 สมมุติว่า มีผู้มาสมัครงาน 18 คน ในจำนวนนี้มี 10 คน ที่มีความรู้ทางด้านคอมพิวเตอร์ 5 คน มีความรู้ทางด้านสถิติ และ 2 คน มีความรู้ทั้งทางคอมพิวเตอร์และสถิติ อยากทราบว่าจะมีกี่คนในจำนวน 18 คน ที่ไม่มีความรู้ในด้านที่กล่าวมาเลย

วิธีทำ ให้ S แทนเซตของผู้มาสมัครงาน

ให้ A_1 แทนเซตของผู้มีความรู้ทางคอมพิวเตอร์ และ

A_2 แทนเซตของผู้มีความรู้ทางสถิติ

ในที่นี้เราต้องการหา $N(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2)$ ซึ่งจะได้

$$N(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) = N(S) - N(A_1) - N(A_2) + N(A_1 \cap A_2)$$
$$= 18 - 10 - 5 + 2 = 5$$

■

เราสามารถขยายสูตร 7.1.1 ให้เป็นสูตรทั่ว ๆ ไป ที่ใช้สำหรับหาจำนวนสิ่งของซึ่งไม่มีสมบัติข้อใดเลยในจำนวนสมบัติทั้งหมด m ข้อ ดังปรากฏในทฤษฎีบท 7.1.1 ข้างล่างนี้ เพื่อความสะดวกเราจะแทนเซต $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ ด้วย $A_1 A_2 \ldots A_n$ โดยละเครื่องหมาย $\cap$ ไว้

ทฤษฎีบท 7.1.1 (หลักการนำเข้า-ตัดออก)

จำนวนสมาชิกในเซต S ซึ่งไม่มีสมบัติ $P_1, P_2, \ldots, P_m$ คือ

$$N(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \quad \overline{A}_m) = N(S) - \sum_{i} N(A_i) + \sum_{i \neq j} N(A_i A_j) - \sum_{i \neq j \neq k} N(A_i A_j A_k) + \ldots$$
$$+ (-1)^m N(A_1 A_2 \ldots A_m)$$

พิสูจน์ เราจะต้องพิสูจน์ว่าจำนวนทางซ้ายมือและจำนวนทางขวามือคือจำนวนสมาชิกของเซต S ที่มีสมบัติอย่างเดียวกัน จะพบว่าทางซ้ายมือนับจำนวนสมาชิกซึ่งไม่มีสมบัติข้อใดเลย ดังนั้นเราจะต้องแสดงว่าทางขวามือนับสมาชิกซึ่งไม่มีสมบัติใดเลยเช่นกัน นั่นคือ ถ้า x เป็นสมาชิกของเซต S ซึ่งไม่มีสมบัติใดเลย เราจะต้องแสดงว่า x ถูกนับ 1 ครั้งทั้งทางซ้ายและทางขวามือ และถ้า x เป็นสมาชิกของเซต S ซึ่งมีสมบัติอย่างน้อยหนึ่งข้อ เราจะต้องแสดงว่า x ถูกนับ 0 ครั้งทั้งทางซ้ายและทางขวามือ ขั้นแรก สมมุติว่า x เป็นสมาชิกของเซต S ซึ่งไม่มีสมบัติข้อใดเลย จะพบว่า x ถูกนับ

$$1 - 0 + 0 - 0 + \ldots + (-1)^m 0 = 1$$

ครั้งทางขวามือ ทั้งนี้เนื่องจาก x เป็นสมาชิกในเซต S แต่ไม่อยู่ในเซตอื่นใดเลย คือไม่อยู่ใน A_i สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, m$ ขั้นต่อไป สมมุติว่า x เป็นสมาชิกของเซต S ซึ่งมีสมบัติ n ข้อ (เมื่อ $n \geq 1$) จะพบว่า x ถูกนับ 1 ครั้งใน N(S) เพื่อให้การแทนจำนวนต่าง ๆ อยู่ในระบบเดียวกัน

เราจะแทน 1 ด้วย $\binom{n}{0}$ เนื่องจาก x มีสมบัติ n ข้อ ดังนั้น x จะต้องอยู่ในเซต $A_1, A_2, \ldots,$หรือ A_m เป็นจำนวน n เซต นั่นคือ x จะถูกนับ $n = \binom{n}{1}$ ครั้งใน $\sum N(A_i)$ ในทำนองเดียวกัน เราจะพบว่า x ถูกนับ $\binom{n}{2}$ ครั้งใน $\sum N(A_iA_j)$ ถูกนับ $\binom{n}{3}$ ครั้งใน $N(A_iA_jA_k)$ และต่อ ๆ ไป สรุปรวมทั้งหมดแล้ว x จะถูกนับเป็น

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^m\binom{n}{m}$$

ครั้งทางขวามือ ซึ่งจำนวนข้างบนนี้จะเท่ากับ

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}$$

ทั้งนี้เนื่องจาก $n \le m$ และ $\binom{n}{k} = 0$ เมื่อ $k > n$ และจากที่เคยพิสูจน์แล้วในบทที่ 3 ว่า

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$$

แสดงว่า ถ้า x มีสมบัติอย่างน้อย 1 ข้อแล้ว x จะถูกนับ 0 ครั้งทางขวามือ ซึ่งเป็นการสิ้นสุดของการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ ■

ตัวอย่าง 7.1.3 สถานีโทรทัศน์แห่งหนึ่งได้ทำการสำรวจชาวกรุงเทพฯ 100 คน เกี่ยวกับความนิยมในการดูรายการโทรทัศน์ 3 รายการ คือรายการ A, B และ C พบว่า 20 คน ดูรายการ A 16 คน ดูรายการ B 14 คน ดูรายการ C 8 คน ดูรายการ A และ B 5 คน ดูรายการ A และ C 4 คน ดูรายการ B และ C และมี 2 คน ดูทั้ง 3 รายการ อยากทราบว่ามีกี่คนที่ไม่ดูรายการใดเลย

วิธีทำ ในที่นี้ต้องการหา $N(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})$ ซึ่งจะได้

$$N(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = N(S) - [N(A)+N(B)+N(C)] + [N(AB)+N(AC)+N(BC)] - N(ABC)$$

$$= 100-(20+16+14)+(8+5+4)-2$$

$$= 100-50+17-2 = 65$$

■

ตัวอย่าง 7.1.4 จำนวนเต็มจาก 1 ถึง 1000 ซึ่งหารด้วย 5, 6 และ 8 ไม่ลงตัว มีทั้งหมดกี่จำนวน

วิธีทำ เพื่อสะดวกในการอธิบาย เราจะใช้สัญญลักษณ์ $\lfloor x \rfloor$ แทนจำนวนเต็มใหญ่ที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ x เมื่อ x คือจำนวนจริงใด ๆ

ให้ $S = \{1,2,\ldots,1000\}$

ให้ A_1 แทนเซตของสมาชิกของ S ซึ่งหารด้วย 5 ลงตัว

A_2 แทนเซตของสมาชิกของ S ซึ่งหารด้วย 6 ลงตัว

A_3 แทนเซตของสมาชิกของ S ซึ่งหารด้วย 8 ลงตัว

จากวิชาทฤษฎีจำนวน เราทราบว่าจำนวนเต็มใด ๆที่หารด้วย ค.ร.น. ของ a และ b ลงตัว เลขจำนวนเต็มนั้นจะหารด้วย a และ b ได้ลงตัว

ในที่นี้ ค.ร.น.ของ 5 และ 6 คือ 30

ค.ร.น.ของ 5 และ 8 คือ 40

ค.ร.น.ของ 6 และ 8 คือ 24

ค.ร.น.ของ 5,6 และ 8 คือ 120

จะพบว่า $N(A_1) = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200$ $\quad N(A_1A_2) = \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor = 33$

$N(A_2) = \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166$ $\quad N(A_1A_3) = \left\lfloor \frac{1000}{40} \right\rfloor = 25$

$N(A_3) = \left\lfloor \frac{1000}{8} \right\rfloor = 125$ $\quad N(A_2A_3) = \left\lfloor \frac{1000}{24} \right\rfloor = 41$

และ $N(A_1A_2A_3) = \left\lfloor \frac{1000}{120} \right\rfloor = 8$

ใช้ทฤษฎีบท 7.1.1 เมื่อ m = 3 จะได้

$$N(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = N(S) - [N(A_1) + N(A_2) + N(A_3)] + [N(A_1A_2) + N(A_1A_3) + N(A_2A_3)] - N(A_1A_2A_3)$$

$$= 1000-(200+166+125)-(33+25+41)-8 = 600$$

นั่นคือ จำนวนเต็มซึ่งอยู่ระหว่าง 1 และ 1000 ซึ่งหารด้วย 5, 6 และ 8 ไม่ลงตัว มีทั้งหมด 600 จำนวน ■

บทแทรก 7.1.1

จำนวนสมาชิกใน S ซึ่งมีสมบัติ $P_1, P_2, \ldots, P_m$ อย่างน้อยหนึ่งข้อคือ

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) = \sum N(A_i) - \sum N(A_iA_j) + \sum N(A_iA_jA_k) - \ldots + (-1)^{m+1} N(A_1A_2 \ldots A_m)$$

พิสูจน์ จะพบว่าเซตของสมาชิกซึ่งมีสมบัติอย่างน้อย 1 ข้อ ได้แก่เซต $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$ ดังนั้น สิ่งที่เราต้องการหาคือ $N(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m)$ เรามี

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) = N(S) - N(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m})$$

แต่จากความรู้ในเรื่องทฤษฎีเซตเ รารู้ว่า

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m} = \overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_m$$

ดังนั้น $N(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) = N(S) - N(\overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_m)$

$$= N(S) - [N(S) - \sum N(A_i) + \sum N(A_iA_j) - \sum N(A_iA_jA_k) + \ldots + (-1)^m N(A_1A_2 \ldots A_m)$$

$$= \sum N(A_i) - \sum N(A_iA_j) + \sum N(A_iA_jA_k) - \ldots + (-1)^{m+1} N(A_1A_2 \ldots A_m)$$

ตามต้องการ

ตัวอย่าง 7.1.5 จะมีวิธีแจกของ k สิ่งลงกล่อง 5 กล่อง (แตกต่างกัน) ได้กี่วิธี ถ้ามีเงื่อนไขว่าจะต้องมีอย่างน้อยหนึ่งกล่องที่ไม่ได้รับแจกของเลย

วิธีทำ ให้ S เป็นเซตของวิธีแจกของ k สิ่งลงกล่อง 5 กล่อง ดังนั้น $N(S) = 5^k$ ให้ A_i แทนเซตของวิธีแจกของ k สิ่งลงกล่อง 5 กล่อง โดยมีกล่องที่ i ว่างเปล่า จะพบว่า $N(A_i) = 4^k$, $N(A_iA_j) = 3^k$, $N(A_iA_jA_k) = 2^k$, $N(A_iA_jA_kA_l) = 1^k$ และ $N(A_1A_2A_3A_4A_5) = 0$ ดังนั้น

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_5) = \binom{5}{1}4^k - \binom{5}{2}3^k + \binom{5}{3}2^k - \binom{5}{4}1^k + 0$$

เราได้ศึกษาปัญหาเกี่ยวกับการนับแบบต่าง ๆ รวมทั้งการนับโดยอาศัยฟังก์ชันก่อกำเนิดแล้ว ในตอนต่อไปนี้ เราจะนำเอาหลักการนำเข้า - ตัดออกมาประยุกต์ใช้กับปัญหาการนับซึ่งมีเงื่อนไขซับซ้อน โดยพิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้ ■

ตัวอย่าง 7.1.6 ในการสำรวจความนิยมเกี่ยวกับการใช้ผลิตภัณฑ์อย่างหนึ่งด้วยวิธีสัมภาษณ์บุคคลซึ่งประกอบด้วยครู 3 คน นักศึกษา 4 คน และแม่บ้าน 6 คน โดยต้องการสัมภาษณ์บุคคลเพียง 11 คนเท่านั้น ในที่นี้เราจะถือว่าบุคคลที่มีอาชีพเดียวกันไม่มีความแตกต่างกัน อยากทราบว่าจะมีวิธีเลือกสัมภาษณ์บุคคล 11 คน ได้แตกต่างกันกี่วิธี

วิธีทำ วิธีหนึ่งซึ่งได้ศึกษาไปแล้วคือคำนวณหาสัมประสิทธิ์ของ x^{11} ในฟังก์ชันก่อกำเนิด

$$(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6) \qquad \text{..........(7.1.2)}$$

ในที่นี้เราจะคำนวณโดยอาศัยหลักการนำเข้า - ตัดออก สมมุติให้จำนวนครู นักศึกษา และแม่บ้าน มีจำนวนไม่จำกัด และให้ S เป็นเซตของวิธีเลือกบุคคล 11 คน เพื่อการสัมภาษณ์

ให้ P_1 เป็นสมบัติของวิธีเลือก ซึ่งมีครูอย่างน้อย 4 คน

P_2 เป็นสมบัติของวิธีเลือก ซึ่งมีนักศึกษาอย่างน้อย 5 คน

P_3 เป็นสมบัติของวิธีเลือก ซึ่งมีแม่บ้านอย่างน้อย 7 คน

เราต้องการนับจำนวนสมาชิกใน S ซึ่งไม่มีสมบัติ P_1, P_2 และ P_3 ให้ A_1, A_2 และ A_3 เป็นเซตซึ่งมีสมบัติ P_1 , P_2 และ P_3 ตามลำดับ จะเห็นว่า ในปัญหานี้เราต้องการหา $N(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)$ ก่อนอื่นเราหา N(S) จากทฤษฎีบท 7.1.1 เรามี

$$N(S) = \binom{11+3-1}{11} = \binom{13}{11} = 78$$

ขั้นต่อไปจะต้องหา $N(A_1)$ จะเห็นว่ากลุ่มคน 11 คนที่เลือกมานั้นจะเป็นวิธีเลือกวิธีหนึ่งใน A_1 ก็ต่อเมื่อวิธีเลือกนั้นประกอบด้วยครูอย่างน้อย 4 คน วิธีเลือกดังกล่าวนี้ทำได้โดยเลือกครูก่อน 4 คน แล้วเลือกอีก 7 คน จากกลุ่มครู นักศึกษาและแม่บ้านเพื่อให้ได้ครบ 11 คน ซึ่งจะเลือกได้ทั้งหมด

$$N(A_1) = \binom{7+3-1}{7} = \binom{9}{7} = 36 \quad \text{วิธี}$$

ในทำนองเดียวกันเราจะได้

$$N(A_2) = \binom{6+3-1}{6} = \binom{8}{6} = 28$$

และ

$$N(A_3) = \binom{4+3-1}{4} = \binom{6}{4} = 15$$

ในขั้นต่อไป จะเห็นว่าจำนวนวิธีเลือกบุคคล 11 คนซึ่งมีสมบัติ P_1 และ P_2 จะเท่ากับจำนวนวิธีเลือกบุคคล 11 คนซึ่งมีครูอย่างน้อย 4 คน และมีนักศึกษาอย่างน้อย 5 คน ซึ่งจำนวนวิธีเลือกนี้จะเท่ากับจำนวนวิธีเลือก

บุคคล 2 คน จากอาชีพต่าง ๆ เมื่อบุคคลในแต่ละอาชีพมีจำนวนไม่จำกัด นั่นคือ เท่ากับ

$$N(A_1A_2) = \binom{2+3-1}{2} = \binom{4}{2} = 6$$

จำนวนวิธีเลือกบุคคล 11 คนให้สอดคล้องกับสมบัติ P_1 และ P_3 จะเท่ากับจำนวนวิธีไม่เลือกบุคคลใดเลย ซึ่งทำได้หนึ่งวิธี นั่นคือ $N(A_1A_3) = 1$ และจะพบว่าไม่มีวิธีใดเลยที่เลือกบุคคล 11 คนโดยมีอย่างน้อย 5 คนเป็นนักศึกษา และอย่างน้อย 7 คนเป็นแม่บ้าน นั่นคือ $N(A_2A_3) = 0$ ในทำนองเดียวกันเราได้ $N(A_1A_2A_3) = 0$ โดยใช้หลักการนำเข้า - ตัดออก เราจะได้

$$N(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = 78 - (36 + 28 + 15) + (6 + 1 + 0) - 0 = 6 \quad \blacksquare$$

หมายเหตุ เราสามารถตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบนี้ได้โดยการคำนวณหาสัมประสิทธิ์ของ x^{11} ในฟังก์ชันก่อกำเนิด (7.1.2)

ตัวอย่าง 7.1.7 จงหาจำนวนลำดับเทอร์นารีที่มีความยาว n หลัก ซึ่งมี 0 อย่างน้อยหนึ่งตัว มี 1 อย่างน้อยหนึ่งตัวและมี 2 อย่างน้อยหนึ่งตัว

วิธีทำ ให้ S เป็นเซตของลำดับเทอร์นารีทั้งหมด ดังนั้น $N(S) = 3^n$

และให้ A_0 แทนเซตของลำดับเทอร์นารีซึ่งไม่มี 0 เลย

A_1 แทนเซตของลำดับเทอร์นารีซึ่งไม่มี 1 เลย

A_2 แทนเซตของลำดับเทอร์นารีซึ่งไม่มี 2 เลย

ลำดับเทอร์นารีที่มีความยาว n หลัก ซึ่งไม่มี 0 เลย ก็คือลำดับเทอร์นารีที่มีความยาว n หลักที่มีเฉพาะ 1 และ 2 เท่านั้น ดังนั้นจำนวนลำดับเทอร์นารีที่มีความยาว n หลัก และไม่มี 0 เลยจะเท่ากับ $N(A_0) = 2^n$ ในทำนองเดียวกัน เราจะได้ $N(A_1) = N(A_2) = 2^n$

ลำดับเทอร์นารีที่มีความยาว n หลัก และไม่มี 0 และ 1 อยู่เลย ก็คือลำดับเทอร์นารีที่มีเลขทุกหลักเป็น 2 ดังนั้น $N(A_0A_1) = 1$ ในทำนองเดียวกันเราได้ $N(A_1A_2) = N(A_0A_2) = 1$ และท้ายสุดจะพบว่าไม่มีลำดับเทอร์นารีใดที่ไม่มี 0, 1 และ 2 ดังนั้นโดยหลักการนำเข้า-ตัดออก เราได้

$$N(\overline{A}_0\overline{A}_1\overline{A}_2) = 3^n - (2^n + 2^n + 2^n) + (1+1+1) - 0 = 3^n - 3\times 2^n + 3$$

เป็นจำนวนลำดับเทอร์นารีที่ยาว n หลัก และมี 0 อย่างน้อยหนึ่งตัว มี 1 อย่างน้อยหนึ่งตัว และมี 2 อย่างน้อยหนึ่งตัวตามต้องการ ■

ตัวอย่าง 7.1.8 จงหาจำนวนผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการ $x + y + z = 7$ เมื่อ $x \leq 3$, $y \leq 4$ และ $z \leq 5$

วิธีทำ ให้ S เป็นเซตของผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการ $x + y + z = 7$

ให้ A เป็นเซตของผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งมี $x > 3$

ให้ B เป็นเซตของผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งมี $y > 4$

ให้ C เป็นเซตของผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งมี $z > 5$

จากหลักการนำเข้า - ตัดออก เราได้

$$N(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = N(S) - [N(A) + N(B) + N(C)] + [N(AB) + N(AC) + N(BC)] - N(ABC)$$

โดยอาศัยวิธีแจกแจงผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก เราได้

$$N(S) = 15,\ N(A) = 3,\ N(B) = 1,$$

$$N(C) = N(AB) = N(AC) = N(BC) = 0$$

ดังนั้น $N(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = 15 - (3 + 1) = 11$ ■

ต่อไปเราจะต้องทำความเข้าใจกับศัพท์บางคำที่จะต้องใช้ในตัวอย่าง 7.1.9 เราจะกล่าวว่าจำนวนเต็มบวกสองจำนวน เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน ถ้าตัวหารร่วมของจำนวนทั้งสองนั้นมีเพียง 1 เท่านั้น ตัวอย่างเช่น 12 และ 37 เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน แต่ 9 และ 15 ไม่เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน ทั้งนี้เนื่องจาก 3 หารทั้ง 9 และ 15 ได้ลงตัว ออยเลอร์ (Euler) ได้นิยามฟังก์ชัน $\phi(n)$ ว่าคือจำนวนของจำนวนเต็มบวกซึ่งน้อยกว่า n และเป็นจำนวนเฉพาะต่อกันกับ n เช่น 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 และ 29 ล้วนเป็นจำนวนซึ่งน้อยกว่า 30 และเป็นจำนวนเฉพาะต่อกันกับ 30 ดังนั้น $\phi(30) = 8$ เพราะจำนวนดังกล่าวมีทั้งหมด 8 จำนวน

ตัวอย่าง 7.1.9 จงหา $\phi(n)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

วิธีทำ ให้ $p_1, p_2, \ldots, p_m$ เป็นจำนวนเฉพาะทั้งหมดที่หาร n ได้ลงตัว

ให้ A_i เป็นเซตของจำนวนเต็มซึ่งน้อยกว่า n และ หารด้วย p_i ลงตัว สำหรับ $i = 1,2,\ldots,m$ เราต้องการหา $\phi(n)$ นั่นคือ หาจำนวนของจำนวนเต็มในเซต $S = \{1,2,\ldots,n\}$ ซึ่งไม่อยู่ในเซต A_i ใด ๆ เลย จากหลักการนำเข้า-ตัดออก เราได้

$$\phi(n) = N(S) - \sum N(A_i) + \sum N(A_iA_j) - \sum N(A_iA_jA_k) + \ldots \pm N(A_1A_2 \ldots A_m)$$

การคำนวณหาค่า N ของเซตต่าง ๆ นั้นทำได้ไม่ยาก เช่นจำนวนสมาชิกใน S ซึ่งหารด้วยจำนวนเฉพาะ p_i, p_j และ p_k ได้ลงตัว เท่ากับ $\frac{n}{p_ip_jp_k}$

นั่นคือ $N(A_iA_jA_k) = \frac{n}{p_ip_jp_k}$ เป็นต้น ดังนั้น

$$\phi(n) = n - \left[\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \cdots \frac{n}{p_m}\right] + \left[\frac{n}{p_1p_2} + \frac{n}{p_1p_3} + \cdots + \frac{n}{p_ip_j}\right] - \cdots \pm \frac{n}{p_1p_2\cdots p_m}$$

ซึ่งมีความหมายเดียวกับ

$$\phi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_m}\right)$$

ข้อสังเกต สูตรนี้ไม่ขึ้นอยู่กับจำนวนครั้งที่ p_i หาร n ลงตัว

ตัวอย่าง 7.1.10 จงหา $\phi(30)$ และ $\phi(60)$

วิธีทำ เนื่องจาก 30 = 2x3x5 ดังนั้น

$$\phi(30) = 30\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = 8$$

และเนื่องจาก $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ เราได้

$$\phi(60) = 60\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = 16$$ ■

ในทฤษฎีบทข้างล่างนี้ เราจะใช้สัญญลักษณ์ N_m แทนจำนวนสิ่งของซึ่งมีสมบัติ m ข้อและจะใช้ S_k แทน $\sum N(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})$

ทฤษฎีบท 7.1.2

จำนวนสิ่งของที่มีสมบัติ m ข้อ จากทั้งหมด n ข้อ เมื่อ $m \le n$ จะเท่ากับ

$$N_m = S_m - \binom{m+1}{m}S_{m+1} + \binom{m+2}{m}S_{m+1} - \binom{m+3}{m}S_{m+3} + \cdots \pm \binom{n}{m}S_n$$

พิสูจน์ วิธีพิสูจน์จะคล้ายกับการพิสูจน์ของทฤษฎีบท 7.1.1 นั่นคือ จะต้องแสดงว่าทางซ้ายและทางขวามือเป็นจำนวนของสิ่งเดียวกัน ทางซ้ายคือจำนวนสิ่งของซึ่งมีสมบัติ m ข้อ เราจะต้องแสดงว่าสิ่งของที่มีสมบัติน้อยกว่า m ข้อ ถูกนับเป็น 0 ทางขวามือ สิ่งของที่มีสมบัติ m ข้อ ถูกนับเป็น 1 ทางขวามือ และสิ่งของที่มีสมบัติมากกว่า m ข้อ ถูกนับเป็น 0 ทางขวามือ ถ้า x มีสมบัติน้อยกว่า m ข้อ จะเห็นว่า x จะไม่ถูกนับอยู่ในพจน์ใดทางขวามือเลย ถ้า x มีสมบัติ m ข้อ x จะถูกนับ 1 ครั้ง

ในพจน์แรกทางขวามือ ถ้า x มีสมบัติมากกว่า m ข้อ สมมุติว่ามี m+j ข้อ x จะไม่ถูกนับทางซ้ายมือ ดังนั้น เราจะต้องแสดงว่า x ถูกนับเป็น 0 ทางขวามือ จะเห็นว่า x ถูกนับ $\binom{m+j}{m}$ ครั้งในพจน์ S_m นั่นคือ ถูกนับเป็น 1 ทุก ๆ สมบัติ m ข้อที่เลือกมาจากสมบัติ m+j ข้อ ในทำนองเดียวกัน x จะถูกนับ $\binom{m+j}{m+1}$ ครั้งใน S_{m+1} ในกรณีทั่ว ๆ ไป x จะถูกนับ $\binom{m+j}{m+k}$ ครั้งใน S_{m+k} สำหรับ $k \le j$ แต่ถ้า $k > j$ แล้ว x จะไม่ถูกนับอยู่ใน S_{m+k} ดังนั้น จำนวนครั้งทั้งหมดที่ x ถูกนับทางขวามือจะเท่ากับ

$$\binom{m+j}{m}-\binom{m+1}{m}\binom{m+j}{m+1}+\binom{m+2}{m}\binom{m+j}{m+2}-\cdots+(-1)^j\binom{m+j}{j}\binom{m+j}{m+j}$$

.......(7.1.3)

และเนื่องจากจาก

$$\binom{m+k}{m}\binom{m+j}{m+k} = \binom{m+j}{m}\binom{j}{k}$$

แทนค่าลงใน (7.1.3) จะได้

$$\binom{m+j}{m}-\binom{m+j}{m}\binom{j}{1}+\binom{m+j}{m}\binom{j}{2}-\cdots+(-1)^j\binom{m+j}{m}\binom{j}{j}$$

ซึ่งเท่ากับ

$$\binom{m+j}{m}\left[\binom{j}{0}-\binom{j}{1}+\binom{j}{2}-\cdots+(-1)^j\binom{j}{j}\right]$$

และจากเอกลักษณ์ 3 หน้า 69 จำนวนที่อยู่ในวงเล็บใหญ่มีค่าเท่ากับ 0 ตามต้องการ

ตัวอย่าง 7.1.11 จงหาจำนวนลำดับเทอร์นารีซึ่งมีความยาว 4 หลัก และมีเลข 1 เป็นจำนวนสองตัว

วิธีทำ ให้ S เป็นเซตของลำดับเทอร์นารีทั้งหมด ซึ่งมีความยาว 4 หลัก ดังนั้น $N(S) = 3^4$ ให้ A_i เป็นเซตของลำดับเทอร์นารีดังกล่าว ซึ่งมี 1 อยู่ในตำแหน่งที่ i ในที่นี้เราต้องการหา N_2 จะพบว่า

$$S_1 = C(4,1)3^3 \ , \ S_2 = C(4,2)3^2$$

$$S_3 = C(4,3)3^1 \ , \ S_4 = C(4,4)3^0 = 1$$

จากทฤษฎีบท 7.1.2 เราได้

$$N_2 = S_2 - \binom{3}{2}S_3 + \binom{4}{2}S_4 = \binom{4}{2}3^2 - \binom{3}{2}\binom{4}{3}3^1 + \binom{4}{2}1 = 24 \qquad \blacksquare$$

แบบฝึกหัด

1. นักเรียนกลุ่มหนึ่งมี 20 คน ในจำนวนนี้มี 10 คน เล่นบาสเก็ตบอล 5 คน เล่นเบสบอล 2 คน เล่นทั้งสองอย่าง อยากทราบว่าผู้ที่เล่นกีฬาอย่างน้อยหนึ่งประเภทมีกี่คน และมีกี่คนที่ไม่เล่นอะไรเลย
2. จงหาจำนวนของจำนวนเต็มในเซต $S = \{1,2,...,600\}$ ซึ่ง
   ก. หารด้วย 3 ไม่ลงตัว
   ข. หารด้วย 3 หรือ 5 ไม่ลงตัว
   ค. หารด้วย 3 , 5 หรือ 7 ไม่ลงตัว
3. สมมุติให้ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นเซตต่างสมาชิก (pairwise disjoint set) จงหา $N(A_1A_2...A_n)$ และ $N(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n)$
4. จงหาจำนวนเต็ม x ซึ่ง $1 \le x \le 100$ และหารด้วย 2, 5 หรือ 12 ได้ลงตัว และมีกี่จำนวนซึ่งหารด้วย 3, 7 หรือ 11 ไม่ลงตัว
5. จากการสำรวจคน 100,000 คน ของบริษัทขายบุหรี่แห่งหนึ่ง พบว่าในจำนวนนี้เป็นชาย 40,000 เป็นนักสูบบุหรี่ 80,000 และเป็นมะเร็ง 10,000 คน นอกจากนี้ยังพบว่าผู้ชาย 1,000 คนเป็นมะเร็ง ผู้ที่เป็น

มะเร็ง 2,000 คนสูบบุหรี่ ผู้ที่สูบบุหรี่ 3,000 คนเป็นผู้ชาย และสุดท้ายพบว่าผู้ชายที่สูบบุหรี่ 100 คนเป็นมะเร็ง จงหาจำนวนสุภาพสตรีที่ไม่สูบบุหรี่

6. จากการสำรวจสารเคมี 3 ชนิดในน้ำ คือ สารหนู สารปรอทและสารตะกั่ว โดยทำการตรวจสอบจากตัวอย่างน้ำ 100 ตัวอย่าง พบว่า 7 ตัวอย่างมีสารหนู 5 ตัวอย่างมีสารปรอท 3 ตัวอย่างมีสารตะกั่ว และ 3 ตัวอย่างมีสารหนูและสารตะกั่ว 3 ตัวอย่างมีสารปรอทและสารตะกั่ว 2 ตัวอย่างมีสารหนูและสารตะกั่ว และ 1 ตัวอย่างมีสารหนูและสารปรอทแต่ไม่มีสารตะกั่ว จงหาจำนวนตัวอย่างที่มีร่องรอยของสารเคมีอย่างน้อยหนึ่งชนิด

7. กลุ่มตัวอย่างน้ำถูกนำมาทดสอบหาสารเคมี 3 ชนิด คือสารหนู สารปรอท และสารตะกั่ว ปรากฏว่า 40 ตัวอย่างไม่พบสารใดเลย 15 ตัวอย่างพบสารหนู 22 ตัวอย่างพบสารปรอท 37 ตัวอย่างพบสารตะกั่ว 8 ตัวอย่างพบสารหนูและสารปรอท 10 ตัวอย่างพบสารหนูและสารตะกั่ว 15 ตัวอย่างพบสารปรอทและสารตะกั่ว จงหาจำนวนตัวอย่างทั้งหมดที่ใช้ในการทดสอบ

8. สร้างรหัสซึ่งมีความยาว n หลัก จากเซต {0,1,...9} จงหาจำนวนรหัสซึ่งมี 1, 2 และ 3 ปรากฏอย่างน้อยหนึ่งครั้ง

9. จงหาจำนวนผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มซึ่งไม่เป็นลบของสมการ $x_1 + x_2 + x_3 = 16$ โดยใช้หลักการนำเข้า-ตัดออก

10. จงหาจำนวนผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการ $x_1 + x_2 + x_3 = 10$

11. จงหาจำนวนผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการ

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$

เมื่อ $1 \le x_1 \le 6$, $0 \le x_2 \le 7$, $4 \le x_3 \le 8$, และ $2 \le x_4 \le 6$

12. จงใช้หลักการนำเข้า-ตัดออก หาจำนวนวิธีเลือก

ก. อักษร 8 ตัว จากอักษร a สามตัว b สามตัว และ c สี่ตัว

ข. อักษร 9 ตัว จากอักษร a สามตัว b สี่ตัว และ c ห้าตัว

ค. อักษร 12 ตัว จากอักษร a ห้าตัว b ห้าตัว และ c ห้าตัว

13. จงหาจำนวนเต็มระหว่าง 2 และ 46 ที่เป็นจำนวนเฉพาะ

7.2 ดิเรนจ์เมนต์และปัญหาตำแหน่งต้องห้าม

Derangement and Forbidden Position Problems

ในบทนี้จะนำหลักการนำเข้า-ตัดออกมาใช้กับปัญหาการจัดเรียงของสมาชิกในเซตใด ๆ ซึ่งมีตำแหน่งของสมาชิกในเซตเป็นสำคัญ นั่นคือ มีการกำหนดตำแหน่งของสมาชิกในเซตไว้ล่วงหน้า สมมุติให้ S คือเซตดังกล่าว ดิเรนจ์เมนต์ของเซต S คือการจัดเรียง ซึ่งไม่มีสมาชิกตัวใดอยู่ในตำแหน่งเดิมเลย ตัวอย่างเช่นให้ S คือเซตของอักษรในคำ MAD สมาชิกในเซต S มี 3 ตัว ตัวที่อยู่ในตำแหน่งแรกคือ M ตำแหน่งที่สองคือ A และตำแหน่งที่สามคือ D การจัดเรียงของเซต S ทั้งหมดคือ

MAD , MDA , AMD , ADM , DAM, และ DMA

จะพบว่า

MAD ไม่เป็นดิเรนจ์เมนต์ของ S เพราะ M, A และ D อยู่ในตำแหน่งเดิม

MDA ไม่เป็นดิเรนจ์เมนต์ของ S เพราะ M อยู่ในตำแหน่งเดิม

AMD ไม่เป็นดิเรนจ์เมนต์ของ S เพราะ D อยู่ในตำแหน่งเดิม

DAM ไม่เป็นดิเรนจ์เมนต์ของ S เพราะ A อยู่ในตำแหน่งเดิม ส่วน ADM และ DMA เป็นดิเรนจ์เมนต์ของ S เพราะไม่มีสมาชิกตัวใดใน S อยู่ในตำแหน่งเดิมเลย ดังนั้น จำนวนดิเรนจ์เมนต์ของ S เท่ากับ 2

ให้เซต T = {1, 2, 3} โดยตำแหน่งของสมาชิกในเซต T เรียงลำดับตามปกติของจำนวนนับ นั่นคือ 1 อยู่ในตำแหน่งที่ 1, 2 อยู่ในตำแหน่งที่ 2 และ 3 อยู่ในตำแหน่งที่ 3 การจัดเรียงของเซต T มี 6 วิธี คือ

123, 132, 213, 231, 312, และ 321

จะพบว่า

123 ไม่เป็นดิเรนจ์เมนต์ของ S เพราะ 1, 2 และ 3 อยู่ในตำแหน่งเดิม

132 ไม่เป็นดิเรนจ์เมนต์ของ S เพราะ 1 อยู่ในตำแหน่งเดิม

213 ไม่เป็นดิเรนจ์เมนต์ของ S เพราะ 3 อยู่ในตำแหน่งเดิม

321 ไม่เป็นดิเรนจ์เมนต์ของ S เพราะ 2 อยู่ในตำแหน่งเดิม

การจัดเรียงที่เหลือคือ 231 และ 312 เป็นดิเรนจ์เมนต์ของ T เพราะไม่มีตัวเลขใดอยู่ในตำแหน่งเดิมเลย ดังนั้นจำนวนดิเรนจ์เมนต์ของ T คือ 2

จากการสังเกตตัวอย่างการหาดิเรนจ์เมนต์ของเซต S และเซต T ที่กล่าวมาแล้ว จะพบว่าจำนวนดิเรนจ์เมนต์ของเซตใด ๆ ไม่ขึ้นอยู่กับลักษณะของสมาชิกในเซตนั้น ๆ แต่ขึ้นอยู่กับจำนวนสมาชิกในเซต เช่น จำนวนดิเรนจ์เมนต์ของเซต S = {M,A,D} เท่ากับจำนวนดิเรนจ์เมนต์ของเซต T = {1,2,3} ซึ่งเท่ากับ 2 ดังนั้นจำนวนดิเรนจ์เมนต์ของเซตใด ๆ ซึ่งมีสมาชิก n ตัวจะเท่ากับจำนวนดิเรนจ์เมนต์ของเซต {1, 2, ..., n} ถ้าให้ D_n แทนจำนวนดิเรนจ์เมนต์ของเซต {1,2,...,n} โดยการแจกแจงจะพบว่า

D_1 = 0 = จำนวนดิเรนจ์เมนต์ของเซต {1}

D_2 = 1 = จำนวนดิเรนจ์เมนต์ของเซต {1,2} ซึ่งได้แก่ 21

$D_3 = 2$ = จำนวนดิเรนจ์เมนต์ของเซต {1,2,3} ซึ่งได้แก่ 231 และ 312

$D_4 = 9$ = จำนวนดิเรนจ์เมนต์ของเซต {1,2,3,4} ซึ่งได้แก่

2143	3142	4123
2341	3412	4312
2413	3421	4321

เมื่อ n มีค่ามากขึ้น การหาจำนวนดิเรนจ์เมนต์โดยวิธีแจกแจงจะยุ่งยากซับซ้อนขึ้น จุดประสงค์ของเราคือหาสูตรสำหรับหาจำนวนดิเรนจ์เมนต์ของเซตซึ่งมีสมาชิก n ตัว ดังในทฤษฎีบทต่อไปนี้ เราจะใช้หลักการนำเข้า-ตัดออก ช่วยในการพิสูจน์ทฤษฎีบทข้างล่างนี้

ทฤษฎีบท 7.2.1

สำหรับ $n \geq 1$ จะได้

$$D_n = n!\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right]$$

พิสูจน์ ให้ S เป็นเซตของการจัดเรียงของเซต {1, 2, ..., n} นั่นคือสมาชิกของ S จะอยู่ในรูป $i_1, i_2, \ldots, i_n$ เมื่อ i_j เป็นสมาชิกในเซต {1, 2, ..., n} ดังนั้น N(S) = n! สำหรับ i = 1, 2, ..., n

ให้ P_i เป็นสมบัติของการจัดเรียงซึ่งมีสมาชิกตัวที่ i อยู่ในตำแหน่งที่ i และให้ A_i เป็นเซตของการจัดเรียงซึ่งมีสมบัติ P_i ดังนั้น

A_1 เป็นเซตของการจัดเรียงซึ่งอยู่ในรูป $1\, i_2\, i_3 \ldots i_n$ เมื่อ $i_2\, i_3 \ldots i_n$ เป็นการจัดเรียงของเซต {2, 3, ..., n} ดังนั้น $N(A_1) = (n-1)!$

A_1A_2 เป็นเซตของการจัดเรียงซึ่งอยู่ในรูป $1\ 2\ i_3\, i_4 \ldots i_n$ เมื่อ $i_3\, i_4 \ldots i_n$ เป็นการจัดเรียงของเซต {3, 4, ..., n} ดังนั้น $N(A_1A_2) = (n-2)!$

$A_1A_2A_3$ เป็นเซตของการจัดเรียงซึ่งอยู่ในรูป $1\ 2\ 3\ i_4\ i_5 \ldots i_n$ เมื่อ $i_4\ i_5 \ldots i_n$ เป็นการจัดเรียงของเซต $\{4, 5, \ldots, n\}$ ดังนั้น $N(A_1A_2A_3) = (n-3)!$

$A_1A_2 \ldots A_n$ เป็นเซตของการจัดเรียงซึ่งอยู่ในรูป $123 \ldots n$ ดังนั้น $N(A_1A_2 \ldots A_n) = 1$

ในกรณีทั่ว ๆ ไป เราได้ผลลัพธ์ต่อไปนี้

$$N(A_i) = (n-1)!$$
$$N(A_iA_j) = (n-2)!$$
$$N(A_iA_jA_k) = (n-3)!$$
$$\vdots$$
$$N(A_1A_2 \ldots A_n) = 1$$

สมบัติทั้งหมดมี n ข้อ คือ $P_1, P_2, \ldots, P_n$

เซตซึ่งมีสมบัติเพียงข้อเดียวมี $\binom{n}{1}$ เซต

เซตซึ่งมีสมบัติ 2 ข้อมี $\binom{n}{2}$ เซต

เซตซึ่งมีสมบัติ 3 ข้อมี $\binom{n}{3}$ เซต

$\vdots$

เซตซึ่งมีสมบัติ n ข้อมี $\binom{n}{n} = 1$ เซต ดังนั้น

$$\sum N(A_i) = \binom{n}{1}(n-1)!$$
$$\sum N(A_i A_j) = \binom{n}{2}(n-2)!$$
$$\sum N(A_i A_j A_k) = \binom{n}{3}(n-3)!$$
$$\vdots$$
$$\sum N(A_1A_2 \ldots A_n) = \binom{n}{n}(n-n)! = 1$$

โดยอาศัยหลักการนำเข้า - ตัดออก เราจะได้

$$D_n = N(\bar{A}_1\bar{A}_2 \quad \bar{A}_n) = N(S) - \sum_i N(A_i) + \sum_{i\neq j} N(A_i A_j) - \sum_{i\neq j\neq k} N(A_iA_jA_k) + \ldots + (-1)^n N(A_1A_2 \ldots A_n)$$

$$= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} 0!$$

$$= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{n!}{n!}$$

$$= n!\,(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!})$$

$$= n!\,(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!})$$

ในวิชาแคลคูลัสเราทราบว่า

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

แทนค่า $x = -1$ เราได้

$$e^{-1} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} + \ldots$$

นอกจากนี้เรายังทราบว่าอนุกรมข้างบนนี้ลู่เข้าอย่างรวดเร็วมาก ดังนั้น เราจึงใช้ $e^{-1}n!$ เป็นค่าประมาณของ D_n

ตัวอย่าง 7.2.1 สุภาพบุรุษ 10 ท่าน ไปงานทานเลี้ยงที่โรงแรมแห่งหนึ่ง เมื่อถึงโรงแรมทุกคนถอดหมวกให้คนเฝ้าประตูเก็บรักษาไว้ พองานเลิกทุกคนมารับหมวกคืน คนเฝ้าค่อนข้างจะมึนเมาจึงแจกหมวกคืนด้วยวิธีสุ่มอยากทราบว่า โอกาสหรือความน่าจะเป็นที่ทุกคนจะไม่ได้รับหมวกของตนเองเป็นเท่าใด

วิธีทำ การแจกหมวกนั้น ทำได้แตกต่างกันทั้งหมด 10! วิธี ส่วนการแจกหมวกซึ่งไม่มีผู้ใดได้รับหมวกของตนเอง จะเท่ากับ

$$D_{10} = 10!\,(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{10} \frac{1}{10!})$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ทุกคนจะไม่ได้รับหมวกของตนเอง จะเท่ากับ

$$\frac{D_n}{n!} = \frac{D_{10}}{10!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{10!} \quad \text{หรือ} \quad \frac{D_{10}}{10!} \cong e^{-1} \quad ■$$

เราสามารถหา D_n ได้อีกวิธีหนึ่ง โดยอาศัยการให้เหตุผลเชิงคอมบินาทอริคดังต่อไปนี้ เราจะพิจารณาดิเรนจ์เมนต์ทั้งหมดของเซต {1,2,..., n} เมื่อ $n \geq 3$ แบ่งดิเรนจ์เมนต์ทั้งหมดออกเป็น n-1 พวก ได้แก่พวกที่ขึ้นต้นด้วย 2 (นั่นคือมี 2 อยู่ในตำแหน่งแรก) พวกที่ขึ้นต้นด้วย 3 , พวกที่ขึ้นต้นด้วย 4, ... , และพวกที่ขึ้นต้นด้วย n จะเห็นได้ชัดว่าแต่ละพวกมีจำนวนเท่ากัน สมมุติให้ d_n เป็นจำนวนดิเรนจ์เมนต์ในแต่ละพวก เราจะได้จำนวนดิเรนจ์เมนต์ทั้งหมดเท่ากับ $D_n = (n-1)d_n$

ในกรณีเฉพาะ เราสามารถกล่าวได้ว่า d_n คือจำนวนดิเรนจ์เมนต์ซึ่งขึ้นต้นด้วย 2 นั่นคือเราพิจารณาดิเรนจ์เมนต์ซึ่งอยู่ในรูป

$$2\ i_2\ i_3 \ldots i_n \quad \text{เมื่อ } i_2 \neq 2\ ,\ i_3 \neq 3, \ldots, i_n \neq n$$

เราสามารถแบ่งดิเรนจ์เมนต์ดังกล่าวออกเป็นสองกลุ่มย่อย คือกลุ่มที่มี $i_2 = 1$ และกลุ่มที่มี $i_2 \neq 1$

ให้ d'_n เป็นจำนวนดิเรนจ์เมนต์ซึ่งมี $i_2 = 1$ ซึ่งได้แก่ดิเรนจ์เมนต์ที่อยู่ในรูป

$$2\ 1\ i_3\ i_4 \ldots i_n \quad \text{เมื่อ } i_3 \neq 3, \ldots i_n \neq n$$

ให้ d''_n เป็นจำนวนดิเรนจ์เมนต์ซึ่งมี $i_2 \neq 1$ ซึ่งหมายถึงดิเรนจ์เมนต์ที่อยู่ในรูป $2\ i_2\ i_3 \ldots i_n$ เมื่อ $i_2 \neq 1,\ i_3 \neq 3, \ldots\ i_n \neq n$ ดังนั้น $d_n = d'_n + d''_n$ ซึ่งทำให้ $D_n = (n-1)d_n = (n-1)(d'_n + d''_n)$

เมื่อพิจารณาโดยละเอียด จะพบว่า d'_n เท่ากับจำนวนดิเรนจ์เมนต์ของเซต 3, 4, ..., n ซึ่งก็คือ D_{n-2} นั่นเอง และในทำนองเดียวกันจะพบว่า d''_n ก็คือจำนวนดิเรนจ์เมนต์ที่อยู่ในรูป $i_2\ i_3 \ldots i_n$ ของเซต

$\{1,3,\ldots,n\}$ เมื่อ $i_2 \neq 1,\ i_3 \neq 3,\ \ldots,\ i_n \neq n$ นั่นคือ $d_n'' = D_{n-1}$ ดังนั้นเราสรุปได้ว่า

$$D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1}) \qquad \text{.............}(7.2.1)$$

ความสัมพันธ์ที่ได้นี้เราเรียกว่าความสัมพันธ์เวียนบังเกิดซึ่งได้ศึกษาไปแล้วในบทที่ 6

เรามี $D_1 = 0$ และ $D_2 = 1$ เป็นข้อมูลเบื้องต้น ซึ่งเราจะใช้ร่วมกับความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (7.2.1) เพื่อหา D_n สำหรับทุก ๆ ค่าของ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวกเช่น

$$D_3 = 2(D_1+D_2) = 2(0+1) = 2$$

$$D_4 = 3(D_2+D_3) = 3(1+2) = 9$$

$$D_5 = 4(D_3+D_4) = 4(2+9) = 44$$

$$D_6 = 5(D_4+D_5) = 5(9+44) = 265$$

เป็นต้น เราอาจเขียนความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (7.2.1) ใหม่ได้ดังนี้

$$D_n = (n-1)D_{n-2} + (n-1)D_{n-1} = (n-1)D_{n-2} + nD_{n-1} - D_{n-1}$$

หรือ $$D_n - nD_{n-1} = -[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}]$$

ถ้าแทนที่ n ด้วย n-1 ทางซ้ายมือ เราจะได้จำนวนที่อยู่ทางขวามือ แทนค่าซ้ำต่อไปเรื่อย ๆ เราจะได้

$$\begin{aligned} D_n - nD_{n-1} &= -[D_{n-1}-(n-1)D_{n-2}] \\ &= (-1)^2\,[D_{n-2} - (n-2)D_{n-3}] \\ &= (-1)^3\,[D_{n-3} - (n-3)D_{n-4}] \\ &\ \vdots \\ &= (-1)^{n-2} D_2 - 2D_1 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $D_1 = 0$ และ $D_2 = 1$ เราได้

$$D_n - nD_{n-1} = (-1)^{n-2}$$

หรือ $D_n = nD_{n-1}+(-1)^{n-2}$

หรือ $D_n = nD_{n-1}+(-1)^{n}$ เมื่อ $n = 2, 3, \ldots$

เราเริ่มต้นพิสูจน์ด้วยการสมมุติให้ $n \geq 3$ แต่จากสูตรที่ได้นี้จะเห็นว่าเป็นจริงเมื่อ $n = 2$ ด้วย

ตัวอย่าง 7.2.2 จงหาจำนวนวิธีการจัดเรียงของเซต {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} ซึ่งประกอบด้วยรูปแบบ 289 หรือ 234 หรือ 487 อย่างน้อยหนึ่งรูปแบบ

วิธีทำ ให้ S แทนเซตของการจัดเรียงของเซต {0,1, 2,3,4,5,6,7,8,9} ดังนั้น $N(S) = 10!$ ให้ A_{289}, A_{234} และ A_{487} เป็นเซตของการจัดเรียงซึ่งประกอบด้วยรูปแบบ 289, 234 และ 487 ตามลำดับ

ในที่นี้ เราต้องการหา $N(A_{289} \cup A_{234} \cup A_{487})$ จะเห็นว่า $N(A_{289}) = 8!$ เนื่องจากตัวเลขที่นำมาเรียงมีทั้งหมด 10 ตัว โดยมีเลข 2 , 8 และ 9 อยู่ติดกัน ดังนั้น เราคิดว่า 289 เป็นเลขตัวหนึ่ง รวมกับอีก 7 ตัวที่เหลือ นำทั้ง 8 ตัวดังกล่าวมาเรียงสลับที่กันจะทำได้ทั้งหมด 8! วิธี ในทำนองเดียวกันจะได้ $N(A_{234}) = N(A_{487}) = 8!$ และจะพบว่า $N(A_{289}A_{234}) = 0$ ทั้งนี้เนื่องจากเลข 2 จะถูกตามด้วย 8 และ 3 พร้อม ๆ กันไม่ได้ และด้วยเหตุผลทำนองเดียวกัน จะได้ $N(A_{289}A_{487}) = 0$ แต่ $N(A_{234}A_{487}) = 6!$ เนื่องจากเราสามารถรวม 234 และ 487 เป็นกลุ่มเดียวกัน คือ 23487 หรือเรากล่าวได้ว่า การจัดเรียงซึ่งประกอบด้วยรูปแบบ 23487 จะอยู่ในเซต A_{234} และ A_{487} ดังนั้นเราจะถือว่า 23487 เป็นเลขตัวหนึ่งรวมกับอีก 5 ตัวที่เหลือ นำมาจัดเรียงกันจะทำได้ทั้งหมด 6! วิธี สุดท้ายเราจะพบว่า $N(A_{289}A_{234}A_{487}) = 0$ โดยอาศัยหลักการนำเข้า - ตัดออก เราได้

$$N(A_{289} \cup A_{234} \cup A_{487}) = 3\times 8! - 6!$$

ตามต้องการ

แบบฝึกหัด

1. จงแจกแจงการจัดเรียงทั้งหมดของเซต {1,2, 3, 4, 5}

2. จงแจกแจงดิเรนจ์เมนต์ทั้งหมดของเซต {1, 2, 3, 4, 5}

3. จงหาจำนวนวิธีจัดเรียงของเซต {1,2, ... , 8} ซึ่งมีเลขคู่ไม่อยู่ในตำแหน่งปกติของจำนวนธรรมชาติ

4. จงหาจำนวนวิธีจัดเรียงของเซต {1, 2, ... , 8} ซึ่งมีเลขเพียง 4 จำนวนเท่านั้นที่อยู่ในตำแหน่งปกติของจำนวนธรรมชาติ

5. จงหาสูตรสำหรับการหาจำนวนวิธีจัดเรียงของเซต {1, 2, ... , n} ซึ่งมีเลขเพียง k จำนวนเท่านั้นที่อยู่ในตำแหน่งปกติของจำนวนธรรมชาติ

6. มีอักษร 9 ตัว เป็นอักษร a สามตัว อักษร b สี่ตัว และอักษร c สองตัว จงหาจำนวนวิธีจัดเรียงซึ่งอักษรชนิดเดียวกันจะอยู่ติดกันทั้งหมดไม่ได้ เช่น abbbbcaca ใช้ไม่ได้ แต่ abbbacacb ใช้ได้ เป็นต้น

7. สุภาพบุรุษ 7 คนไปงานปาร์ตี้ โดยฝากหมวกไว้ที่ยามเฝ้าประตู จงหาวิธีที่สุภาพบุรุษเหล่านั้นจะได้รับหมวกคืน ถ้า

   ก.ไม่มีสุภาพบุรุษท่านใดรับหมวกของตนเองเลย

   ข. มีสุภาพบุรุษอย่างน้อย 1 ท่าน ที่ได้รับหมวกของตนเอง

   ค. มีสุภาพบุรุษอย่างน้อย 2 ท่าน ที่ได้รับหมวกของตนเอง

8. นักเรียน 8 คน ยืนเข้าแถวในลักษณะหน้ากระดานเรียงหนึ่ง อยากทราบว่าจะมีวิธีที่นักเรียนจะเปลี่ยนที่ยืนได้กี่วิธี โดยที่นักเรียนที่อยู่ข้างหน้าของแต่ละคนต้องไม่ใช่คนเดิม