6 ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด
Recurrence Relations

ปัญหาจำนวนมากทางคอมบินาทอริค มักเกี่ยวข้องกับการคำนวณหาลำดับ $a_0, a_1, a_2, \ldots$ เมื่อ a_n คือจำนวนซึ่งเกี่ยวข้องกับเซตที่มีสมาชิก n ตัว เราเรียก a_n ว่า "พจน์ที่ n" ของลำดับ ลำดับที่จะพิจารณาในบทนี้เป็นลำดับซึ่งพจน์ที่ n นิยามหรือให้คำจำกัดความได้ในรูปของพจน์ที่อยู่ข้างหน้า เช่นลำดับต่อไปนี้

$$1, 3, 3^2, 3^3, \ldots, 3^n, \ldots$$

จะเห็นว่าพจน์ที่ n ในลำดับข้างบนนี้คือ $a_n = 3^n$ สูตรนี้ใช้คำนวณหาพจน์ที่ n ของลำดับได้โดยตรงเมื่อทราบค่าของ n ถ้าพิจารณาลำดับข้างบนนี้ในอีกแง่มุมหนึ่ง จะพบว่าแต่ละพจน์ในลำดับดังกล่าวเกิดจากการคูณพจน์ที่อยู่ข้างหน้าด้วย 3 นั่นคือ

$$a_n = 3a_{n-1}$$

เราสามารถใช้สูตรนี้คำนวณหาพจน์ต่าง ๆ ในลำดับได้ ถ้ารู้พจน์แรกของลำดับ ในตัวอย่างนี้ พจน์แรกคือ $a_0 = 1$ ซึ่งจะเรียกว่า "เงื่อนไข

เบื้องต้น (initial condition)" ในบางกรณี เราอาจจะต้องรู้เงื่อนไขเบื้องต้นมากกว่าหนึ่งเงื่อนไขจึงจะสามารถคำนวณหาพจน์ต่าง ๆ ในลำดับได้ทั้งหมด ตัวอย่างเช่น ลำดับฟิโบนักชี (Fibonacci Sequence) ต่อไปนี้

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

ถ้าพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างพจน์ต่าง ๆ ในลำดับฟิโบนักชี จะพบว่า แต่ละพจน์ในลำดับเกิดจากผลบวกของสองพจน์ที่อยู่ข้างหน้า นั่นคือ

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

โดยมี $a_0 = 1$ และ $a_1 = 1$ เป็นเงื่อนไขเบื้องต้น ในกรณีนี้เราต้องรู้พจน์ต้นๆ อย่างน้อยสองพจน์ จึงจะสามารถคำนวณหาพจน์อื่น ๆ ได้

นิยาม

ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดของลำดับ $a_0, a_1, a_2, \ldots$ คือสมการซึ่งแสดงความสัมพันธ์ของพจน์ที่ n กับพจน์ที่อยู่ข้างหน้า และเมื่อกล่าวถึงผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดเราหมายถึงฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $a_n = g(n)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ n และสอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนบังเกิดนั้นๆ

เช่น $a_n = 3a_{n-1}$ และ

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

เป็นความสัมพันธ์เวียนบังเกิด ถ้าแทน a_n ด้วย 3^n ในความสัมพันธ์เวียนบังเกิด $a_n = 3a_{n-1}$ จะพบว่าจำนวนที่อยู่ทางซ้ายและทางขวาของสมการจะเท่ากันพอดี นั่นคือ

$$3^n = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$$

แสดงว่า $a_n = 3^n$ เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด $a_n = 3a_{n-1}$ ดังนั้น การหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดก็คือการหาสูตรสำหรับคำนวณหาพจน์ที่ n โดยตรงนั่นเอง

ข้อสังเกต สูตร $a_n = 3^n$ นี้จะขึ้นอยู่กับค่าของ n เพียงอย่างเดียวเท่านั้น ไม่ขึ้นอยู่กับพจน์ข้างหน้า

เราจะศึกษาวิธีหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดในตอนต่อไป สำหรับตอนแรกนี้เราจะศึกษาการสร้างความสัมพันธ์เวียนบังเกิดจากสถานการณ์ของปัญหาและเงื่อนไขที่กำหนดให้

6.1 การสร้างความสัมพันธ์เวียนบังเกิด Construction of Recurrence Relations

ตัวอย่างแรกจะเกี่ยวกับปัญหา "เกมหอคอยแห่งฮานอย" ซึ่งได้อารัมภบทไปบ้างแล้วในบทที่ 1

ตัวอย่าง 6.1.1 (เกมหอคอยแห่งฮานอย)

มีหลัก 3 หลัก ในหลักแรกมีแผ่นวงกลม n วง ซึ่งมีขนาดต่าง ๆ กัน วงกลมเหล่านี้เรียงซ้อนกันจากขนาดใหญ่สุดขึ้นไปหาขนาดเล็กสุด จุดประสงค์ของเกมคือต้องการย้ายแผ่นวงกลมทั้งหมดจากหลักแรกไปยังอีกหลักหนึ่งโดยใช้หลักที่เหลือเป็นทางผ่าน โดยมีเงื่อนไขว่า ในการย้ายแต่ละครั้งจะต้องย้ายได้ทีละวง วงใหญ่จะซ้อนอยู่บนวงที่เล็กกว่าไม่ได้ ต้องการหาจำนวนครั้งที่น้อยที่สุดที่ใช้ในการเคลื่อนย้ายแผ่นวงกลม n วง จากหลักหนึ่งไปยังอีกหลักหนึ่ง

วิธีทำ ให้ a_n แทนจำนวนครั้งที่น้อยที่สุดที่ใช้ในการเคลื่อนย้ายแผ่นวงกลม n วง จากหลักหนึ่งไปยังอีกหลักหนึ่ง จะเห็นว่าการเคลื่อนย้ายที่มีจำนวนครั้งที่น้อยที่สุดคือการย้ายที่ทำตามขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 ย้ายแผ่นวงกลม n-1 วงที่อยู่บนสุดไปยังหลักที่สอง ซึ่งจะต้องใช้การเคลื่อนย้ายอย่างน้อยที่สุด a_{n-1} ครั้ง

ขั้นที่ 2 ย้ายแผ่นวงกลมหนึ่งวงที่เหลือ (วงที่อยู่ล่างสุด) ไปยังหลักที่สาม ในขั้นนี้ ใช้การเคลื่อนย้ายเพียง 1 ครั้ง

ขั้นที่ 3 ย้ายแผ่นวงกลม n-1 วงจากหลักที่สองไปยังหลักที่สาม ซึ่งจะต้องใช้การเคลื่อนย้ายอย่างน้อยที่สุด a_{n-1} ครั้ง

จากทั้งสามขั้นตอน สรุปได้ว่า จำนวนครั้งที่น้อยที่สุดที่ต้องใช้ในการเคลื่อนย้ายวงกลม n วง ไปยังอีกหลักหนึ่ง เท่ากับ

จำนวนครั้งในขั้นที่ 1 + จำนวนครั้งในขั้นที่ 2 + จำนวนครั้งในขั้นที่ 3

$= a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 2a_{n-1} + 1$ นั่นคือ $a_n = 2a_{n-1} + 1$

เป็นความสัมพันธ์เวียนบังเกิดสำหรับเกมหอคอยแห่งฮานอย โดยมี $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ หรือ $a_2 = 3$ (ใช้เงื่อนไขเดียวก็พอ) เป็นเงื่อนไขเบื้องต้น ■

ตัวอย่าง 6.1.2 ฝากเงิน 1,000 บาท กับธนาคารโดยได้รับดอกเบี้ยแบบทบต้น 10% ต่อปี อยากทราบว่าเมื่อสิ้นปีที่ n จะมีเงินอยู่ในธนาคารเป็นจำนวนเท่าไร

วิธีทำ ให้ a_n แทนจำนวนเงินในธนาคารเมื่อสิ้นปีที่ n จะพบว่าจำนวน เงินในธนาคารเมื่อสิ้นปีที่ n คือจำนวนเงินที่มีอยู่เมื่อสิ้นปีที่ n-1 รวมกับดอกเบี้ยที่ได้รับ นั่นคือ $a_n = a_{n-1} + 0.1\,a_{n-1} = (1.1)\,a_{n-1}$ เมื่อ $a_0 = 1000$ ■

ตัวอย่าง 6.1.3 สมมุติว่ารหัสของบัตรเครดิตประเภทหนึ่ง ประกอบด้วยเลขฐานสองซึ่งมีความยาวเท่ากับ n(คือมี n หลัก)และไม่มีเลข 0 อยู่ติดกันเลย อยากทราบว่าจะมีจำนวนรหัสที่แตกต่างกันเป็นจำนวนเท่าใด

n = 1	n = 2	n = 3	n = 4
0	01	010	0101
1	10	011	0110
	11	101	0111
		110	1010
		111	1011
			1101
			1110
			1111

วิธีทำ ให้ a_n แทนจำนวนรหัสซึ่งมีความยาวเท่ากับ n จะพบว่า $a_1 = 2$ เนื่องจากรหัสที่มีความยาวเท่ากับ หนึ่ง มีได้แตกต่างกันเพียงสองรหัสเท่านั้น คือ 0 และ 1 ส่วนรหัสซึ่งมีความยาวเท่ากับสองมี 3 รหัสแตกต่างกัน คือ 01, 10 และ 11 ดังนั้น $a_2 = 3$ สำหรับ n ที่มีค่าน้อย ๆ เช่น เมื่อ n = 1, 2, 3, 4 เราสามารถแจกแจงรหัสที่มีความยาวเท่ากับ n ได้ไม่ยากนัก ดังแสดงในตารางข้างบนนี้

ในกรณีที่ n = 3 เราแบ่งรหัสที่มีความยาวเท่ากับสามออกได้เป็นสองพวก คือพวกที่ขึ้นต้นด้วย 0 และพวกที่ขึ้นต้นด้วย 1 ถ้ารหัสขึ้นต้นด้วย 0 หลักถัดไป(คือหลักที่สอง)จะต้องเป็น 1 ส่วนหลักที่สามจะเป็นอะไรก็ได้ จะเห็นว่าตัวที่จะเติมลงในหลักที่สามนี้ ก็คือรหัสที่มีความยาวเท่ากับหนึ่งทั้งหมดนั่นเอง ดังนั้นจำนวนรหัสที่มีความยาวเท่ากับสามและขึ้นต้นด้วย 0 จะเท่ากับจำนวนรหัสซึ่งมีความยาวเท่ากับหนึ่ง นั่นคือเท่ากับ a_1 รหัสซึ่งมีความยาวเท่ากับสามและขึ้นต้นด้วย 0 ได้แก่ 010 และ 011 ถ้ารหัสขึ้นต้นด้วย 1 อีกสองหลักที่เหลือจะเป็นรหัสซึ่งมีความยาวเท่ากับสอง ดังนั้นจำนวนรหัสซึ่งมีความยาวเท่ากับสามและขึ้นต้นด้วย 1 จะเท่ากับจำนวนรหัสซึ่งมีความยาวเท่ากับสอง นั่นคือเท่ากับ a_2

รหัสที่มีความยาวเท่ากับสามและขึ้นต้นด้วย 1 ได้แก่ 101, 110 และ 111 จำนวนรหัสซึ่งมีความยาวเท่ากับสามคือผลบวกของจำนวนรหัสที่ขึ้นต้นด้วย 0 และจำนวนรหัสที่ขึ้นต้นด้วย 1 นั่นคือ $a_3 = a_1 + a_2$

ในกรณีที่ $n = 4$ มีแนวคิดในทำนองเดียวกับกรณีที่ $n = 3$ จะพบว่าจำนวนรหัสซึ่งมีความยาวเท่ากับสี่ คือผลบวกของจำนวนรหัส 4 หลักที่ขึ้นต้นด้วย 0 และจำนวนรหัส 4 หลักที่ขึ้นต้นด้วย 1 เช่นกัน แต่พวกที่ขึ้นต้นด้วย 0 มีจำนวนเท่ากับจำนวนรหัสที่มีความยาวเท่ากับสอง ทั้งนี้เพราะว่า เมื่อเลขหลักแรกเป็น 0 แล้ว เลขหลักที่สองจะต้องเป็น 1 (เพราะว่า 0 จะอยู่ติดกันไม่ได้) ส่วนสองหลักที่เหลือได้แก่รหัสที่มีความยาวเท่ากับสองทั้งหมดนั่นเอง สำหรับจำนวนรหัส 4 หลักที่ขึ้นต้นด้วย 1 นั้นจะเท่ากับจำนวนรหัส 3 หลัก ดังนั้น $a_4 = a_2 + a_3$

ในกรณีทั่วไป เมื่อ $n \geq 3$ เราพบว่า

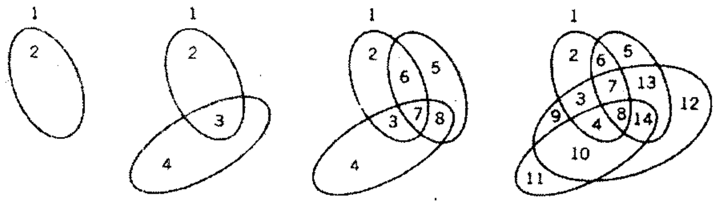
จำนวนรหัสซึ่งมีความยาว n หลัก = จำนวนรหัสซึ่งยาว n - 1 หลัก
+ จำนวนรหัสซึ่งยาว n - 2 หลัก

นั่นคือ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ∎

ข้อสังเกต ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดในตัวอย่าง 6.1.3 เหมือนกับความสัมพันธ์เวียนบังเกิดของลำดับฟิโบนักชี จะต่างกันเฉพาะเงื่อนไขเบื้องต้นเท่านั้น

ตัวอย่าง 6.1.4 สมมุติว่าวาดรูปวงรี n รูป บนแผ่นกระดาษ โดยมีเงื่อนไขว่าวงรีแต่ละรูปจะต้องตัดวงรีอื่น ๆ เป็นจำนวน 2 จุด (ตัดน้อยกว่า 2 จุดไม่ได้) และสมมุติว่าไม่มีวงรี 3 รูปใด ๆ ตัดกันที่จุดเดียวกัน อยากทราบว่าวงรีเหล่านี้แบ่งพื้นที่บนแผ่นกระดาษออกเป็นกี่ส่วน

วิธีทำ ให้ a_n แทนจำนวนพื้นที่ที่ถูกแบ่งโดยวงรี n รูป



รูป 6.1.1

เห็นได้ชัดว่า $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$ และ $a_4 = 14$ ดังแสดงในรูป 6.1.1 เมื่อจำนวนวงรีเพิ่มขึ้น การนับจำนวนพื้นที่จะยุ่งยากขึ้น ดังนั้นเราจึงควรมีหลักเกณฑ์ในการคิดที่มีระบบ ดังนี้

สมมุติว่าวงรี n-1 รูป ถูกวาดลงบนกระดาษ วงรี n-1 รูปนี้จะแบ่งพื้นที่บนกระดาษออกเป็น a_{n-1} ส่วน การเพิ่มวงรีวงที่ n ลงบนกระดาษจะพบว่าวงรีรูปที่ n จะตัดกับวงรี n-1 รูปที่มีอยู่เดิมเป็นจำนวนทั้งหมด 2(n-1) จุด นั่นคือ ส่วนโค้งของวงรีรูปที่ n จะถูกแบ่งออกเป็น 2(n-1) ส่วน เนื่องจากส่วนโค้งแต่ละส่วนจะแบ่งพื้นที่แต่ละส่วนที่มีอยู่เดิม (a_{n-1} ส่วน) ออกเป็น 2 ส่วน ส่วนโค้งหนึ่งส่วนจะทำให้พื้นที่เพิ่มขึ้นหนึ่งส่วน ส่วนโค้ง 2(n-1) ส่วนจะเพิ่มพื้นที่ขึ้น 2(n-1) ส่วน ดังนั้น จำนวนพื้นที่ทั้งหมดจะเท่ากับจำนวนพื้นที่เดิมรวมกับจำนวนพื้นที่ที่เพิ่มขึ้น นั่นคือ

$$a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$$

เป็นความสัมพันธ์เวียนบังเกิดสำหรับปัญหานี้ ■

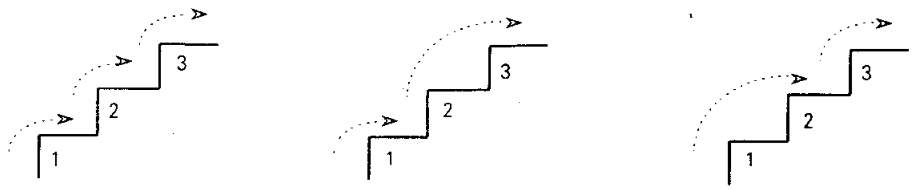
ตัวอย่าง 6.1.5 เก้งตัวหนึ่งกระโดดขึ้นบันไดซึ่งมีทั้งหมด n ขั้น แต่ละครั้งที่เก้งกระโดดจะกระโดดได้หนึ่งหรือสองขั้นเท่านั้น อยากทราบว่าเก้งกระโดดขึ้นบันได n ขั้นได้แตกต่างกันกี่วิธี

วิธีทำ ให้ a_n แทนจำนวนวิธีที่เก้งกระโดดขึ้นบันได n ขั้น จะพบว่า $a_1 = 1$ เพราะมีบันไดเพียงขั้นเดียว $a_2 = 2$ คือกระโดดได้แตกต่างกัน

สองวิธี วิธีแรกกระโดดทีละขั้นสองครั้ง วิธีที่สอง กระโดดครั้งเดียวสองขั้น ดังรูป 6.1.2

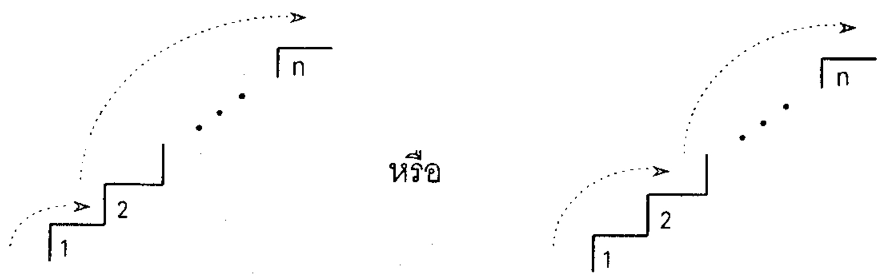
รูป 6.1.2

$a_3 = 3$ คือกระโดดได้แตกต่างกัน 3 วิธี วิธีแรก กระโดดทีละขั้นสามครั้ง วิธีที่สองคือกระโดดครั้งแรกหนึ่งขั้น ครั้งที่สอง 2 ขั้น หรือวิธีที่สามคือกระโดดครั้งแรก 2 ขั้น กระโดดครั้งที่สองอีก 1 ขั้น ดังรูป 6.1.3



รูป 6.1.3

ในกรณีที่มีขั้นบันได n ขั้น เราสามารถแบ่งวิธีกระโดดของเก้งออกได้เป็นสองพวก ขึ้นอยู่กับการกระโดดครั้งแรกว่าเก้งกระโดดได้หนึ่งขั้นหรือสองขั้น ถ้าครั้งแรกกระโดดได้หนึ่งขั้น ก็จะเหลือบันไดอีก n-1 ขั้น ซึ่งเก้งสามารถกระโดดขึ้นบันได n-1 ขั้นได้แตกต่างกัน a_{n-1} วิธี แต่ถ้าครั้งแรกกระโดดได้สองขั้นก็จะเหลือบันไดอีก n-2 ขั้น ซึ่งเก้งสามารถกระโดดขึ้นบันได n-2 ขั้นนี้ได้แตกต่างกัน a_{n-2} วิธี ดังรูป 6.1.4



รูป 6.1.4

ดังนั้น จำนวนวิธีกระโดดขึ้นบันได n ขั้นของเก้งคือ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ■

6.2 การหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดแบบเอกพันธุ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

Solution of Linear Homogeneous Recurrence Relations with Constant Coefficients

เป็นที่ทราบกันว่า ไม่มีวิธีทั่วไปสำหรับหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดใด ๆ แต่เรามีวิธีหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดที่มีรูปแบบง่ายๆ บางรูปแบบ ผู้อ่านจะได้เห็นว่าเทคนิคในการหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดที่จะกล่าวถึงในบทนี้ มีลักษณะคล้ายกับเทคนิคการหาผลเฉลยของสมการอนุพันธุ์เชิงเส้นแบบธรรมดา (ordinary linear differential equation) เราจะสนใจเฉพาะส่วนที่เป็นความสัมพันธ์เวียนบังเกิดก่อน เพื่อให้ได้มาซึ่งผลเฉลยทั่วไป แล้วจึงค่อยใช้เงื่อนไขเบื้องต้น เพื่อหาผลเฉลยเฉพาะของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเบื้องต้น

นิยาม 6.2.1

ถ้า c_i เป็นค่าคงตัวสำหรับ $i = 1, 2, ..., k$ และ $c_k \neq 0$ แล้ว เราจะเรียกความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูป

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_{2a}n\text{-}2 + ... + c_ka_{n-k} + f(n) \qquad \text{.............. (6.2.1)}$$

ว่าความสัมพันธ์เวียนบังเกิดเชิงเส้นอันดับที่ k ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว และถ้า f(n) = 0 เราจะเรียกความสัมพันธ์

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_{2a}n\text{-}2 + ... + c_ka_{n-k} \qquad \text{.............. (6.2.2)}$$

ว่าความสัมพันธ์เวียนบังเกิดแบบเอกพันธุ์

ตัวอย่างเช่น $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ เป็นความสัมพันธ์เวียนบังเกิดแบบเอกพันธุ์เชิงเส้นอันดับที่สอง ส่วน $a_n = 3a_{n-1}^2 + a_{n-2}$ ไม่เป็นเชิงเส้นเพราะกำลังของ a_{n-1} ไม่เท่ากับ 1 และ $a_n = 2a_{n-1} + 3$ ไม่เป็นเอกพันธุ์เพราะ $f(n) = 3$ (ไม่เท่ากับ 0)

ทฤษฎีบท 6.2.1 (The Principle of Superposition)

> ถ้า $g_i(n)$ เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด
>
> $$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \dots + c_ka_{n-k} + f_i(n)$$
>
> สำหรับ $i = 1, 2, \dots, s$ แล้ว $a_n = g_1(n) + g_2(n) + \dots + g_s(n)$ จะเป็นผลเฉลยของ
>
> $$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \dots + c_ka_{n-k} + f_1(n) + f_2(n) + \dots + f_s(n) \quad \text{.......(6.2.3)}$$

พิสูจน์ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
&c_1[g_1(n-1) + g_2(n-1) + \dots + g_s(n-1)] \\
&+ c_2[g_1(n-2) + g_2(n-2) + \dots + g_s(n-2)] \\
&\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+ c_k[g_1(n-k) + g_2(n-k) + \dots + g_s(n-k)] \\
&+ f_1(n) + f_2(n) + \dots + f_s(n) \\
&= [c_1g_1(n-1) + c_2g_1(n-2) + \dots + c_kg_1(n-k) + f_1(n)] \\
&+ [c_1g_2(n-1) + c_2g_2(n-2) + \dots + c_kg_2(n-k) + f_2(n)] \\
&\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+ [c_1g_s(n-1) + c_2g_s(n-2) + \dots + c_kg_s(n-k) + f_s(n)] \\
&= g_1(n) + g_2(n) + \dots + g_s(n)
\end{aligned}$$

แสดงว่า $g_1(n) + g_2(n) + \dots + g_s(n)$ เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (6.2.3)

ในหัวข้อ 6.2 เราจะพิจารณาเฉพาะการหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (6.2.2) ก่อน แล้วจึงค่อยพัฒนาไปสู่การหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดแบบที่ไม่เป็นเอกพันธุ์ต่อไปในหัวข้อ 6.3

สมมุติให้ $a_n = x^n$ เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (6.2.2) ดังนั้น x^n จะสอดคล้องกับสมการ (6.2.2) นั่นคือ เมื่อแทน a_n ด้วย x^n ใน (6.2.2) เราได้

$$x^n = c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \ldots + c_kx^{n-k}$$

เมื่อหารด้วย x^{n-k} ทั้งสองข้าง จะได้

$$x^k = c_1x^{k-1} + c_2x^{k-2} + \ldots + c_k \quad \text{หรือ}$$

$$x^k - c_1x^{k-1} - c_2x^{k-2} - \ldots - c_k = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6.2.4)$$

แสดงว่าถ้า α เป็นรากของสมการ (6.2.4) แล้ว α^n จะเป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (6.2.2) เราเรียกสมการ (6.2.4) ว่า **สมการลักษณะเฉพาะ** (characteristic equation) และเรียกรากของสมการนี้ว่า **รากลักษณะเฉพาะ** (characteristic root)

ทฤษฎีบท 6.2.2

ถ้า α เป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน α^n จะเป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (6.2.2) ก็ต่อเมื่อ α เป็นรากลักษณะเฉพาะ

จากวิชาพีชคณิต เราทราบว่าสมการ (6.2.4) มีราก k ราก ซึ่งไม่จำเป็นจะต้องแตกต่างกันทั้งหมด อาจจะมีบางตัวซ้ำกัน หรืออาจจะเป็นจำนวนเชิงซ้อนก็ได้ รากแต่ละรากจะไม่เท่ากับ 0 เนื่องจาก $c_k \neq 0$ ในที่นี้เราจะแยกพิจารณาเป็นสองกรณี ดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 เมื่อรากลักษณะเฉพาะแตกต่างกัน

ทฤษฎีบทข้างล่างนี้เป็นผลจากทฤษฎีบท 6.2.1 และ 6.2.2

ทฤษฎีบท 6.2.3

ถ้า $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ เป็นรากลักษณะเฉพาะซึ่งแตกต่างกันของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (6.2.2) แล้ว

$$a_n = A_1\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n + \cdots + A_k\alpha_k^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(6.2.5)$$

จะเป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (6.2.2) เมื่อ $A_1, A_2, \ldots, A_k$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ เราเรียกผลเฉลย (6.2.5) ว่า **ผลเฉลยทั่วไป** ของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (6.2.2)

$A_1, A_2, \ldots, A_k$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ ซึ่งสามารถหาค่าได้โดยใช้เงื่อนไขเบื้องต้นที่กำหนดให้ สร้างระบบสมการแล้วหาผลเฉลยของระบบสมการที่ได้ ดังในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.2.1 จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ เมื่อ $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ และ $a_2 = 0$

วิธีทำ สมการลักษณะเฉพาะคือ

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \quad \text{หรือ} \quad (x+1)(x-1)(x-2) = 0$$

ดังนั้น -1, 1, 2 เป็นรากลักษณะเฉพาะ ผลเฉลยทั่วไปของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด คือ

$$a_n = A_1(-1)^n + A_2(1)^n + A_3(2)^n$$

จากเงื่อนไขเบื้องต้นที่กำหนดให้ เราได้ระบบสมการ

$$a_0 = A_1 + A_2 + A_3 = 1$$

$$a_1 = -A_1 + A_2 + 2A_3 = 2$$

$$a_2 = A_1 + A_2 + 4A_3 = 0$$

แก้ระบบสมการข้างบนนี้เพื่อหาค่า A_1, A_2 และ A_3 จะได้

$$A_1 = -\frac{2}{3},\ A_2 = 2 \text{ และ } A_3 = -\frac{1}{3}$$

ดังนั้นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดที่ต้องการคือ

$$a_n = -\frac{2}{3}(-1)^n + 2 - \frac{1}{3}(2^n)$$ ■

ตัวอย่าง 6.2.2 จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดของลำดับฟิโบนักชี

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{เมื่อ } a_0 = 1,\ a_1 = 1$$

วิธีทำ สมการลักษณะเฉพาะ คือ $x^2 - x - 1 = 0$ ซึ่งมี $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ และ $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ เป็นรากลักษณะเฉพาะ ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด คือ

$$a_n = A_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + A_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

ค่าคงตัว A_1 และ A_2 สามารถคำนวณหาได้จากเงื่อนไขเบื้องต้น $a_0 = 1$ และ $a_1 = 1$ โดยการหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้

$$a_0 = 1 = A_1 + A_2$$

$$a_1 = 1 = A_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + A_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

ผลเฉลยของระบบสมการข้างบนนี้ คือ

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \text{ และ } A_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

ดังนั้น ผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด คือ

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$ ■

กรณีที่ 2 เมื่อรากลักษณะเฉพาะซ้ำกัน

ลองพิจารณาความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ เมื่อ $a_0 = 1$ และ $a_1 = 6$

จะพบว่าสมการลักษณะเฉพาะ คือ

$x^2 - 6x + 9 = 0$ หรือ $(x-3)^2 = 0$

รากของสมการนี้มีสองค่า ทั้งคู่เท่ากันคือเท่ากับ 3 ในกรณีนี้ เรากล่าวว่า 3 เป็นรากซึ่งมี **ภาวะรากซ้ำ** (multiplicity) เท่ากับ 2

ให้ $p(x)$ เป็นพหุนามซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน และมีดีกรีเท่ากับ n ในวิชาพีชคณิต เราทราบว่า ถ้า α เป็นรากของ $p(x)$ ซึ่งมีภาวะรากซ้ำเท่ากับ m แล้ว $p(x)$ จะอยู่ในรูป $p(x) = (x-\alpha)^m a(x)$ เมื่อ $a(x)$ คือพหุนามซึ่งมีดีกรีเท่ากับ $n-m$ และ α เป็นรากของอนุพันธ์ $p'(x)$ ซึ่งมีภาวะรากซ้ำเท่ากับ $m-1$ ด้วย เราจะนำความรู้พื้นฐานในวิชาพีชคณิตเหล่านี้ไปใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6.2.3

ถ้า α เป็นรากลักษณะเฉพาะของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (6.2.2) ซึ่งมีภาวะรากซ้ำเท่ากับ $m > 1$ แล้ว α^n, $n\alpha^n$, $n^2\alpha^n$, ..., $n^{m-1}\alpha^n$ จะเป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดซึ่งสมนัยกับรากลักษณะเฉพาะ α และ $A_1\alpha^n + A_2n\alpha^n + \ldots + A_mn^{m-1}\alpha^n$ หรือ $\alpha^n(A_1 + A_2n + \ldots + A_mn^{m-1})$ จะเป็นส่วนหนึ่งของผลเฉลยทั่วไปของ (6.2.2) ซึ่งสมนัยกับราก α เมื่อ $A_1, A_2, \ldots, A_m$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

พิสูจน์ สมการลักษณะเฉพาะคือ $x^k - c_1x^{k-1} - c_2x^{k-2} - \ldots - c_k = 0$ ให้ $p(x)$ คือนิพจน์ทางซ้ายมือของสมการลักษณะเฉพาะ นั่นคือ $p(x) = x^k - c_1x^{k-1} - c_2x^{k-2} - \ldots - c_k$ เนื่องจาก m เป็นจำนวนจำกัด ดังนั้นเราจะ

พิสูจน์เฉพาะกรณีที่ $m = 3$ เพราะถ้า $m > 3$ เราสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

จากทฤษฎีบท 6.2.1 เราทราบว่า $a_n = \alpha^n$ เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด ดังนั้น เราเพียงพิสูจน์ว่า $a_n = n\alpha^n$ และ $a_n = n^2\alpha^n$ เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (6.2.2) เช่นกัน ให้

$$p_n(x) = x^{n-k}p(x) = x^n - c_1x^{n-1} - c_2x^{n-2} - \ldots - c_kx^{n-k}$$

หาอนุพันธ์ของ $p_n(x)$ ได้

$$p'(x) = nx^{n-1} - c_1(n-1)x^{n-2} - c_2(n-2)x^{n-3} - \ldots - c_k(n-k)x^{n-k-1} \qquad \text{และ}$$

$$xp'(x) = nx^n - c_1(n-1)x^{n-1} - c_2(n-2)x^{n-2} - \ldots - c_k(n-k)x^{n-k}$$

เนื่องจาก α เป็นรากของ $p(x)$ ซึ่งมีภาวะรากซ้ำเท่ากับ 3 ดังนั้น α เป็นรากของ $x^{n-k}p(x)$ หรือ $p_n(x)$ ซึ่งมีภาวะรากซ้ำเท่ากับ 3 ด้วย แสดงว่า α จะต้องเป็นรากซึ่งมีภาวะรากซ้ำเท่ากับ 2 ของ $p'(x)$ และ $xp'(x)$ จากกรณีหลังเราได้

$$0 = \alpha p'(\alpha) = n\alpha^n - c_1(n-1)\alpha^{n-1} - c_2(n-2)\alpha^{n-2} - \ldots - c_k(n-k)\alpha^{n-k}$$

หรือ $$n\alpha^n = c_1(n-1)\alpha^{n-1} + c_2(n-2)\alpha^{n-2} + \ldots + c_k(n-k)\alpha^{n-k}$$

แสดงว่า $a_n = n\alpha^n$ เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (6.2.2)

ต่อไปจะแสดงว่า $a_n = n^2\alpha^n$ เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (6.2.2) เนื่องจาก α เป็นรากของ

$$x\,p'(x) = nx^n - c_1(n-1)x^{n-1} - c_2(n-2)x^{n-2} - \ldots - c_k(n-k)x^{n-k}$$

ซึ่งมีภาวะรากซ้ำเท่ากับ 2 ดังนั้น α จะเป็นรากของอนุพันธ์ของ $xp'(x)$ นั่นคือ α เป็นรากของ $n^2x^{n-1} - c_1(n-1)^2x^{n-2} - c_2(n-2)^2x^{n-3} - \ldots - c_k(n-k)^2x^{n-k-1}$ และเป็นรากของ $n^2x^n - c_1(n-1)^2x^{n-1} - c_2(n-2)^2x^{n-2} - \ldots - c_k(n-k)^2x^{n-k}$ ด้วย นั่นคือ

$$n^2\alpha^n - c_1(n-1)^2\alpha^{n-1} - c_2(n-2)^2\alpha^{n-2} - \dots - c_k(n-k)^2\alpha^{n-k} = 0 \quad \text{หรือ}$$

$$n^2\alpha^n = c_1(n-1)^2\alpha^{n-1} + c_2(n-2)^2\alpha^{n-2} + \dots + c_k(n-k)^2\alpha^{n-k}$$

แสดงว่า $a_n = n^2\alpha^n$ เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด สรุปได้ว่าเมื่อ α เป็นรากลักษณะเฉพาะซึ่งมีภาวะรากซ้ำเท่ากับ 3 แล้ว

$$a_n = \alpha^n,\ a_n = n\alpha^n \quad \text{และ} \quad a_n = n^2\alpha^n$$

จะเป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (6.2.2)

ในกรณีทั่ว ๆ ไป ถ้า α เป็นรากลักษณะเฉพาะซึ่งมีภาวะรากซ้ำเท่ากับ m แล้ว α^n, $n\alpha^n$, $n^2\alpha^n$, ..., $n^{m-1}\alpha^n$ จะเป็นผลเฉลยซึ่งสมนัยกับ α ซึ่งเป็นรากลักษณะเฉพาะของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (6.2.2) และโดยอาศัยทฤษฎีบท 6.2.3 เราสรุปได้ว่า

$$A_1\alpha^n + A_2n\alpha^n + A_3n^2\alpha^n + \dots + A_mn^{m-1}\alpha^n$$

เป็นส่วนหนึ่งของผลเฉลยทั่วไปของ (6.2.2) ซึ่งสมนัยกับราก α

ตัวอย่าง 6.2.3 จงหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด nxn ที่อยู่ในรูปต่อไปนี้

$$\begin{vmatrix}
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 2
\end{vmatrix}$$

วิธีทำ ให้ a_n แทนดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด nxn ข้างบนนี้ หาดีเทอร์มิแนนต์โดยการกระจายตามแถวแรก จะได้

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$$

สมการลักษณะเฉพาะคือ

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \text{หรือ} \quad (x-1)(x-1) = 0$$

จะเห็นว่า 1 เป็นรากลักษณะเฉพาะซึ่งมีภาวะรากซ้ำเท่ากับ 2 ดังนั้น รากทั่วไปของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ จะอยู่ในรูป

$$a_n = A_1(1)^n + A_2(1)^n \quad \text{หรือ} \quad a_n = A_1 + A_2 n$$

ถ้า $n = 1$ ดีเทอร์มิแนนต์จะเท่ากับ 2 นั่นคือ $a_1 = 2$

ถ้า $n = 2$ ดีเทอร์มิแนนต์จะเท่ากับ 3 นั่นคือ $a_2 = 3$

จากเงื่อนไขเบื้องต้นนี้เราได้ระบบสมการ

$$a_1 = 2 = A_1 + A_2$$

$$a_2 = 3 = A_1 + 2A_2$$

แก้สมการได้ $A_1 = A_2 = 1$ ดังนั้น ผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด คือ $a_n = n + 1$ แสดงว่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ข้างบนนี้เท่ากับ $n + 1$ ■

ตัวอย่าง 6.2.4 จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด $a_n = -a_{n-1} + 3a_{n-2} + 5a_{n-3} + 2a_{n-4}$ เมื่อ $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ และ $a_3 = 2$

วิธีทำ สมการลักษณะเฉพาะคือ

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$$

รากลักษณะเฉพาะคือ -1, -1, -1, 2 ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดจะอยู่ในรูป

$$a_n = A_1(-1)^n + A_2 n(-1)^n + A_3 n^2(-1)^n + A_4(2)^2$$

จากเงื่อนไขเบื้องต้น เราได้ระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
A_1 \qquad\qquad\quad + A_4 &= 1 \\
-A_1 - A_2 - A_3 + 2A_4 &= 0 \\
A_1 + 2A_2 + 4A_3 + 4A_4 &= 1 \\
-A_1 - 3A_2 - 9A_3 + 8A_4 &= 2
\end{aligned}$$

หาผลเฉลยของระบบสมการข้างบนนี้ จะได้

$A_1 = \frac{7}{9}$, $A_2 = -\frac{1}{3}$, $A_3 \doteq 0$ และ $A_4 = \frac{2}{9}$

ดังนั้น ผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดที่กำหนดให้คือ

$$a_n = \frac{7}{9}(-1)^n - \frac{1}{3}n(-1)^n + 0n^2(-1)^n + \frac{2}{9}(2^n) = \frac{7}{9}(-1)^n - \frac{1}{3}n(-1)^n + \frac{2}{9}(2^n) \quad \blacksquare$$

6.3 การหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดแบบไม่เอกพันธุ์ Solution of Nonhomogeneous Recurrence Relations

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาวิธีหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (6.2.1) ซึ่งจะเรียกว่าความสัมพันธ์เวียนบังเกิดแบบไม่เอกพันธุ์ เมื่อ $f(n) \neq 0$ เช่น

$$a_n = 2a_{n-1} + 1,\quad a_n = a_{n-1} + (n-1) \quad \text{และ} \quad a_n + 3a_{n-1} = 4n^2 - 2n$$

เป็นตัวอย่างบางตัวอย่างของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดแบบไม่เอกพันธุ์

ผลเฉลยทั่วไปของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดแบบไม่เอกพันธุ์จะประกอบด้วยผลเฉลยสองส่วน ส่วนหนึ่งเรียกว่า **ผลเฉลยเอกพันธุ์** (homogeneous solution) ซึ่งได้แก่ผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดส่วนที่เป็นเอกพันธุ์ นั่นคือเป็นผลเฉลยของ

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \dots + c_ka_{n-k}$$

ซึ่งเราจะแทนด้วย $a_n^{(h)}$ ผลเฉลยอีกส่วนหนึ่งคือ **ผลเฉลยเฉพาะ** (particular solution) ซึ่งได้แก่ผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \dots + c_ka_{n-k} + f(n)$$

เราจะแทนผลเฉลยส่วนนี้ด้วย $a_n^{(p)}$ เมื่อ $f_1(n) = 0$ และ $f_2(n) = f(n)$ เราจะได้กรณีเฉพาะของทฤษฎีบท 6.2.1 นั่นคือ $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$ จะเป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (6.2.1) เราพอจะสรุปขั้นตอนการ

หาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (6.2.1) เมื่อ $f(n) \neq 0$ ได้เป็นสี่ขั้นตอน ดังนี้

1. หาผลเฉลยเอกพันธุ์ นั่นคือ หา $a_n^{(h)}$ ซึ่งเป็นผลเฉลยทั่วไปของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$ ผลเฉลยส่วนนี้จะมีค่าคงตัวที่เราจะต้องคำนวณหาติดอยู่ด้วย
2. หาผลเฉลยเฉพาะ นั่นคือ หา $a_n^{(p)}$ ซึ่งเป็นผลเฉลยของ

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k} + f(n)$$

3. ผลรวม $a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$ จะเป็นผลเฉลยทั่วไปของ (6.2.1)
4. ใช้เงื่อนไขเบื้องต้นที่กำหนดให้ คำนวณหาค่าคงตัวที่ได้จากขั้นตอนที่ 1 ใน $a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$

เราได้เห็นวิธีหาผลเฉลยเอกพันธุ์แล้วในหัวข้อ 6.2 หัวใจสำคัญของหัวข้อ 6.3 คือการหาผลเฉลยเฉพาะในขั้นตอนที่ 2 ดังได้กล่าวแล้วในตอนต้นว่า เราไม่มีวิธีทั่วไปสำหรับหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดทุกปัญหา แต่เรามีเทคนิคบางอย่างที่ใช้ได้กับกลุ่มปัญหาที่มีรูปแบบง่าย ๆ รูปแบบของผลเฉลยเฉพาะ หรือ $a_n^{(p)}$ จะแตกต่างกันตามลักษณะของ $f(n)$ และรากลักษณะเฉพาะ ซึ่งพอจะสรุปได้ดังในตารางต่อไปนี้

ตาราง 6.3.1

$f(n)$	$a_n^{(p)}$
1. $A_kn^k + A_{k-1}n^{k-1} + \ldots + A_1n + A_0$	
(1.1) 1 ไม่เป็นรากลักษณะเฉพาะ	$B_kn^k + B_{k-1}n^{k-1} + \ldots + B_1n + B_0$
(1.2) 1 เป็นรากลักษณะเฉพาะซึ่งมีภาวะค่ารากเท่ากับ m	$n^m(B_kn^k + B_{k-1}n^{k-1} + \ldots + B_1n + B_0)$

2. $A\beta^n$	
(2.1) β ไม่เป็นรากลักษณะเฉพาะ	$B\beta^n$
(2.2) β เป็นรากลักษณะเฉพาะซึ่งมีภาวะรากค่าซ้ำเท่ากับ m	$Bn^m\beta^n$
3. $An^k\beta^n$	
(3.1) β ไม่เป็นรากลักษณะเฉพาะ	$(B_kn^k + B_{k-1}n^{k-1} + \ldots + B_1n + B_0)\beta^n$
(3.2) β เป็นรากลักษณะเฉพาะซึ่งมีภาวะรากค่าซ้ำเท่ากับ m	$n^m(B_kn^k + B_{k-1}n^{k-1} + \ldots + B_1n + B_0)\beta^n$

ตัวอย่าง 6.3.1 จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

$$a_n + 3a_{n-1} = 4n^2 - 2n \quad (n \geq 2) \quad \text{เมื่อ} \quad a_1 = -4$$

วิธีทำ ขั้นแรกจะต้องหาผลเฉลยเอกพันธุ์ $a_n^{(h)}$ นั่นคือ หาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดเอกพันธุ์

$$a_n + 3a_{n-1} = 0$$

จะพบว่า $a_n^{(h)} = A(-3)^n$ ขั้นต่อไปจะต้องหาผลเฉลยเฉพาะ เนื่องจาก $f(n) = 4n^2 - 2n$ เป็นพหุนามดีกรีสอง ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะจะต้องเป็นพหุนามดีกรีสองด้วย สมมุติให้ $Bn^2 + Cn + D$ เป็นผลเฉลยเฉพาะ ดังนั้น เราได้

$$[Bn^2 + Cn + D] + 3[B(n-1)^2 + C(n-1) + D] = 4n^2 - 2n \quad \text{หรือ}$$

$$4Bn^2 + (4C - 6B)n + (3B - 3C + 4D) = 4n^2 - 2n$$

เมื่อ B, C และ D เป็นค่าคงตัวที่จะต้องคำนวณหา พหุนามทั้งสองข้างของสมการข้างบนนี้จะเท่ากันก็ต่อเมื่อสัมประสิทธิ์ของพจน์เหมือนเท่ากัน นั่นคือ

$$4B = 4$$
$$-6B + C = -2$$
$$3B - 3C + 4D = 0$$

แก้สมการหาค่า B, C และ D เราได้ B = 1, C = 1 และ D = 0 ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะคือ $a_n^{(p)} = n^2 + n$ รวมผลเฉลยเอกพันธุ์และผลเฉลยเฉพาะเข้าด้วยกันจะได้

$$a_n = A(-3)^n + n^2 + n$$

เป็นผลเฉลยทั่วไป หาค่า A โดยใช้เงื่อนไขเบื้องต้น $a_1 = -4$ จะได้

$$-4 = A(-3)^1 + 1^2 + 1 = -3A + 2$$

ดังนั้น $A = 2$ แสดงว่า $a_n = 2(-3)^n + n^2 + n$ เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดที่กำหนดให้ ■

ตัวอย่าง 6.3.2 หาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

$a_n = a_{n-1} + n \ (n \geq 1)$ เมื่อ $a_0 = 1$

วิธีทำ จะพบว่า 1 เป็นรากลักษณะเฉพาะที่มีภาวะรากซ้ำเท่ากับ 1 และ

$$a_n^{(h)} = A(1^n) = A$$

เป็นผลเฉลยเอกพันธุ์ ขั้นต่อไปจะต้องหาผลเฉลยเฉพาะ

เนื่องจาก $f(n) = n$ เป็นพหุนามดีกรีหนึ่ง และ 1 เป็นรากลักษณะเฉพาะซึ่งมีภาวะรากซ้ำเท่ากับ 1 ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะจะอยู่ในรูป

$$n(Bn + C) = Bn^2 + Cn$$

แทน a_n ด้วย $Bn^2 + Cn$ ในสมการ $a_n = a_{n-1} + n$ เราได้

$$Bn^2 + Cn = B(n-1)^2 + C(n-1) + n \quad \text{หรือ}$$

$$2Bn + (-B + C) = n$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของพจน์เหมือน เราได้

$$2B = 1 \quad \text{และ} \quad -B + C = 0$$

แก้ระบบสมการหาค่า B และ C จะได้ $B = \frac{1}{2}$ และ $C = \frac{1}{2}$ ดังนั้น

$$a_n^{(p)} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

เป็นผลเฉลยเฉพาะของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด รวมผลเฉลยเอกพันธุ์และผลเฉลยเฉพาะเข้าด้วยกัน เราจะได้

$$a_n = A + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

เป็นผลเฉลยทั่วไปของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดในโจทย์ปัญหา และเพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไขเบื้องต้น เราแทน $a_0 = 1$ ในสมการข้างบนนี้จะได้ $A = 1$ ดังนั้น

$$a_n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + 1$$

เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด $a_n = a_{n-1} + n$ เมื่อ $a_0 = 1$ ตามต้องการ ■

ตัวอย่าง 6.3.3 (เกมหอคอยแห่งฮานอย)

จงหาผลเฉลยเฉพาะของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด $a_n = 2a_{n-1} + 1$ เมื่อ $a_1 = 1$

วิธีทำ ก่อนอื่นจะต้องหาผลเฉลยเอกพันธุ์ $a_n^{(h)}$ นั่นคือ จะต้องหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดเอกพันธุ์

$$a_n = 2a_{n-1}$$

ซึ่งจะพบว่า $a_n^{(h)} = A(2^n)$ เป็นผลเฉลยเอกพันธุ์ เมื่อ A เป็นค่าคงตัวใด ขั้นต่อไป จะต้องหาผลเฉลยเฉพาะ

เนื่องจากฟังก์ชัน f(n) ในที่นี้คือค่าคงตัว 1 จากตารางจะพบว่าผลเฉลยเฉพาะจะต้องอยู่ในรูป $a_n^{(p)} = B$ แทนค่าลงใน $a_n = 2a_{n-1}$ จะได้

$$B = a_n^{(p)} = 2a_{n-1}^{(p)} + 1 = 2B + 1$$

ดังนั้น $B = -1$ และ $a_n^{(p)} = -1$ เป็นผลเฉลยเฉพาะ รวมผลเฉลยเอกพันธุ์และผลเฉลยเฉพาะเข้าด้วยกัน จะได้

$$a_n = A(2^n) - 1$$

เป็นผลเฉลยทั่วไป ขั้นต่อไปจะต้องหา A โดยใช้ $a_1 = 1$ จะได้

$$1 = A(2^1) - 1 = 2A - 1$$

แสดงว่า $A = 1$ ดังนั้น $a_n = 2^n - 1$ เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด $a_n = 2a_{n-1}+1$ เมื่อ $a_1 = 1$ ตามต้องการ ■

ตัวอย่าง 6.3.4 หาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด $a_n = 3a_{n-1} - 4n + 3(2^n)$ เมื่อ $a_1 = 8$

วิธีทำ จะพบว่าผลเฉลยเอกพันธุ์ของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด $a_n = 3a_{n-1}$ คือ $a_n = A(3^n)$

เนื่องจากฟังก์ชัน f(n) เป็นผลบวกของสองพจน์คือ $-4n$ และ $3(2^n)$ ในการหาผลเฉลยเฉพาะ จะต้องแยกหาผลเฉลยเฉพาะสำหรับแต่ละพจน์ของ f(n) นั่นคือ จะต้องหาผลเฉลยเฉพาะของ

$$a_n = 3a_{n-1} - 4n \quad \text{และ}$$

$$a_n = 3a_{n-1} + 3(2^n)$$

จากตาราง 6.3.1 จะพบว่าผลเฉลยเฉพาะของสมการแรก $a_n = 3a_{n-1} - 4n$ จะต้องอยู่ในรูป $a_n^{(p)} = Bn + C$ เพราะ $f(n) = -4n$ แทนค่าใน $a_n = 3a_{n-1} - 4n$ จะได้

$$Bn + C = a_n^{(p)} = 3a_{n-1}^{(p)} - 4n \quad \text{หรือ}$$

$$Bn + C = 3[B(n-1) + C] - 4n = (3B - 4)n - (3B - 3C)$$

นั่นคือ

$$B = 3B - 4$$

$$C = -3B + 3C$$

แก้สมการหาค่า B และ C จะได้ C = 3 และ B = 2 ดังนั้น $a_n^{(p)} = 2n + 3$ เป็นผลเฉลยเฉพาะสำหรับ $a_n = 3a_{n-1} - 4n$

จากตาราง 6.3.1 เช่นกัน จะพบว่าผลเฉลยเฉพาะของ $a_n = 3a_{n-1} + 3(2^n)$ จะต้องอยู่ในรูป $a_n^{(p)} = B2^n$ แทนค่าใน $a_n = 3a_{n-1} + 3(2^n)$ จะได้

$$B2^n = 3(B2^{n-1}) + 3(2^n)$$

หารทั้งสองข้างของสมการนี้ด้วย 2^{n-1} จะได้

$$2B = 3B + 6 \quad \text{หรือ} \quad B = -6$$

ดังนั้น $a_n^{(p)} = -6(2^n)$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ $a_n = 3a_{n-1} + 3(2^n)$ รวมผลเฉลยเอกพันธุ์และผลเฉลยเฉพาะทั้งสองเข้าด้วยกัน จะได้

$$a_n = A(3^n) + 2n + 3 - 6(2^n)$$

เป็นผลเฉลยทั่วไป ขั้นต่อไปจะต้องหาค่าของ A โดยอาศัยเงื่อนไขเบื้องต้น $a_1 = 8$ จะได้

$$8 = a_1 = A(3^1) + 2(1) + 3 - 6(2^1)$$

ดังนั้น A = 5 ซึ่งทำให้

$$a_n = 5(3^n) + 2n + 3 - 6(2^n)$$

เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด $a_n = 3a_{n-1} - 4n + 3(2^n)$ เมื่อ $a_1 = 8$ ตามต้องการ ■

6.4 การหาผลเฉลยโดยใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิด
Solutions with Generating Functions

ในหัวข้อนี้เราจะแนะนำวิธีหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดโดยใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดเป็นเครื่องมือ ดังได้เห็นในหัวข้อ 6.2 และ 6.3 แล้วว่าผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด ก็คือสูตรสำหรับ

a_n ของลำดับ $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ ในขณะเดียวกันเราทราบว่า a_n ก็คือสัมประสิทธิ์ของ x^n ในฟังก์ชันก่อกำเนิด

$$g(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(6.4.1)$$

ของลำดับ $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ดังนั้น เทคนิคที่เราจะใช้สำหรับหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดคือเราจะต้องหาฟังก์ชันก่อกำเนิด $g(x)$ จากความสัมพันธ์เวียนบังเกิดที่กำหนดให้ แล้วหาสัมประสิทธิ์ของ x^n ใน $g(x)$ สัมประสิทธิ์ที่หาได้นี้ก็คือ a_n ซึ่งจะเป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดที่กำหนดให้

ตัวอย่าง 6.4.1 จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ เมื่อ $a_0 = 1, a_1 = 6$ โดยวิธีใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิด

วิธีทำ คูณทั้งสองข้างของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดด้วย x^n ได้

$$a_nx^n = 6a_{n-1}x^n - 9a_{n-2}x^n \quad \text{สำหรับ} \quad n \geq 2$$

จาก (6.4.1) เรามี

$$g(x) - a_0 - a_1x = \sum_{n=2}^{\infty} a_nx^n$$

แทนค่า a_nx^n ด้วย $6a_{n-1}x^n - 9a_{n-2}x^n$ จะได้

$$g(x) - a_0 - a_1x = \sum_{n=2}^{\infty} (6a_{n-1}x^n - 9a_{n-2}x^n) = 6x \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} - 9x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2}$$

$$= 6x \sum_{m=1}^{\infty} a_mx^m - 9x^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k$$

$$= 6x\,[g(x) - a_0] - 9x^2g(x)$$

แทนค่า $a_0 = 1$ และ $a_1 = 6$ จะได้

$$g(x) - 1 - 6x = 6x\,[g(x) - 1] - 9x^2g(x)$$

$$g(x)[1 - 6x + 9x^2] = 1$$

ดังนั้น $g(x) = \frac{1}{1-6x+9x^2} = \frac{1}{(1-3x)^2}$ จากเอกลักษณ์ (5) ในหัวข้อ 5.2 เราได้

$$\frac{1}{(1-3x)^2} = 1 + \binom{2}{1}(3x) + \binom{3}{2}(3x)^2 + \cdots + \binom{n+1}{n}(3x)^n + \cdots$$

จะพบว่าสัมประสิทธิ์ของ x^n คือ $\binom{n+1}{n}3^n$ หรือ $n3^n + 3^n$ นั่นคือ $a_n = n3^n + 3^n$ เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดที่กำหนดให้ ■

ตัวอย่าง 6.4.2 จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ เมื่อ $a_0 = 1$ และ $a_1 = 1$ โดยวิธีใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิด

วิธีทำ คูณทั้งสองข้างของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดด้วย x^n จะได้

$$a_n x^n = a_{n-1}x^n + a_{n-2}x^n \quad \text{สำหรับ } n \geq 2$$

ทำวิธีเดียวกับในตัวอย่างที่แล้ว เราได้

$$\begin{aligned} g(x) - a_0 - a_1x &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1}x^n + a_{n-2}x^n) \\ &= x\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} + x^2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2} \\ &= x\sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m + x^2\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\ &= x[g(x) - a_0] + x^2 g(x) \end{aligned}$$

แทนค่า $a_0 = 1$ และ $a_1 = 1$ จะได้

$$g(x) - 1 - x = x[g(x) - 1] + x^2 g(x)$$

ดังนั้น $g(x)(1 - x - x^2) = 1$ นั่นคือ $g(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$ ใช้สูตรกำลังสอง (quadratic formular) ช่วยในการแยกตัวประกอบของตัวส่วนของ g(x) จะได้

$$-x - x^2 = -\left[x - \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right]\cdot\left[x - \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right]$$

เพื่อความสะดวก เราให้ $q_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ และ $q_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ และ โดยอาศัยการแยกเศษส่วนออกเป็นเศษส่วนย่อย จะได้

$$g(x) = \frac{1}{(1-q_1x)(1-q_2x)} = \frac{q_1/\sqrt{5}}{1-q_2x} - \frac{q_2/\sqrt{5}}{1-q_2x}$$

ใช้สูตร (2) ในหัวข้อ 5.2 จะได้

$$g(x) = \frac{q_1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty} q_1^n x^n - \frac{q_2}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty} q_2^n x^n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty} q_1^{n+1} x^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty} q_2^{n+1} x^n$$

จะพบว่าสัมประสิทธิ์ของ x^n ใน $g(x)$ คือ

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}q_1^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}q_2^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right]^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}\right]^{n+1}$$

ซึ่งเหมือนกับคำตอบของตัวอย่าง 6.2.3 ■

ข้อสังเกต ตัวส่วนของ $g(x)$ มีส่วนเกี่ยวข้องกับสมการลักษณะเฉพาะของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด โดยทั่วไปแล้วตัวส่วนของ $g(x)$ จะเท่ากับ $1 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_kx^k$ ก็ต่อเมื่อ $x^k + c_1x^{k-1} + c_2x^{k-2} + \ldots + c_k = 0$ เป็นสมการลักษณะเฉพาะของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด ดังนั้น $1 - qx$ จะเป็นตัวประกอบของตัวส่วนของ $g(x)$ ก็ต่อเมื่อ q เป็นรากลักษณะเฉพาะ

ในตัวอย่าง 6.4.3 ที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ จะแสดงให้เห็นวิธีการใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดช่วยในการหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดแบบไม่เอกพันธุ์ ในตัวอย่างดังกล่าว ได้อ้างถึงเอกลักษณ์ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6.4.1

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}}$$

พิสูจน์
$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots$$
$$= x(1 + 2x + 3x^2 + \ldots)$$
$$= x\frac{d}{dx}(x + x^2 + x^3 + \ldots)$$
$$= x\frac{d}{dx}(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)$$
$$= x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = x\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$ ■

ตัวอย่าง 6.4.3 จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด $a_n = a_{n-1} + n$ เมื่อ $a_0 = 1$

วิธีทำ คูณทั้งสองข้างของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดด้วย x^n จะได้

$$a_n x^n = a_{n-1}x^n + nx^n$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ หรือ

$$g(x) - a_0 = x\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

เนื่องจาก $a_0 = 1$ และจาก (6.4.1) เราได้

$$g(x) - 1 = xg(x) + \frac{x}{(1-x)^2}$$
$$g(x)(1-x) = 1 + \frac{x}{(1-x)^2}$$
$$g(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^3}$$

ใช้เอกลักษณ์ที่ได้กล่าวไปแล้วในหัวข้อ 5.2 เราได้

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + x\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+3-1}{k}x^k$$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของ x^n ใน g(x) คือ

$$a_n = 1 + \binom{n+1}{n-1} = 1 + \binom{n+1}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + 1$$

เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดที่กำหนดให้ ซึ่งเป็นคำตอบเดียวกับคำตอบในตัวอย่าง 6.3.2 ■

6.5 การหาผลเฉลยโดยวิธีทำซ้ำ
Solution by Iteration

บางครั้งเราสามารถหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดได้โดยวิธีแทนค่าถอยหลังหรือโดยวิธีทำซ้ำ จนกระทั่งสามารถมองเห็นรูปแบบของพจน์ a_n ดังในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.5.1 จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด $a_n = a_{n-1} + n$ เมื่อ $a_0 = 1$

วิธีทำ แทนค่า $a_0 = 1$ ใน $a_n = a_{n-1} + n$ และทำซ้ำต่อไปเรื่อย ๆ เราได้

$$a_1 = a_0 + 1 = 1 + 1$$

$$a_2 = a_1 + 2 = 1 + 1 + 2$$

$$a_3 = a_2 + 3 = 1 + 1 + 2 + 3$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} + n = 1 + 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

ดังนั้น $a_n = 1 + \dfrac{n(n+1)}{2}$ เป็นผลเฉลยที่ต้องการ ■

ตัวอย่าง 6.5.2 จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด $a_n = 2a_{n-1} + 1$ เมื่อ $a_1 = 1$

วิธีทำ ใช้วิธีแทนค่าย้อนกลับไปเรื่อย ๆ จะได้

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

$$= 2(2a_{n-2}+1) + 1$$
$$= 2^2 a_{n-2} + 2 + 1$$
$$= 2^2(2a_{n-3}+1) + 2 + 1$$
$$= 2^3 a_{n-3} + 2^2 + 2 + 1$$
$$\vdots$$
$$= 2^{n-2} a_2 + 2^{n-3} + 2^{n-4} + \ldots + 2 + 1$$
$$= 2^{n-2}(2a_1+1) + 2^{n-3} + 2^{n-4} + \ldots + 2 + 1$$
$$= 2^{n-1} a_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + 2^{n-4} + \ldots + 2 + 1$$

แต่เนื่องจาก $a_1 = 1$ เราได้

$$a_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2 + 1$$

จะเห็นว่าทางขวามือคือผลบวกของอนุกรมเรขาคณิต ดังนั้น $a_n = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$ เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดที่กำหนดให้ ซึ่งเป็นคำตอบเดียวกันกับคำตอบในตัวอย่าง 6.3.3 ■

แบบฝึกหัด

1. จงพิจารณาว่า a_n เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ สำหรับ $n > 2$ หรือไม่ เมื่อ

   1.1 $a_n = 3n$　　　　1.2 $a_n = 2^n$

2. จงหาความสัมพันธ์เวียนบังเกิดซึ่งจำลองปัญหาการนับจำนวนด้านของกราฟบริบูรณ์ K_n พร้อมทั้งเงื่อนไขเบื้องต้น

3. จงหาความสัมพันธ์เวียนบังเกิดสำหรับจำนวนควอทเทอร์นารี (quaternary) ซึ่งมีความยาว n หลัก และไม่มีเลข 1 อยู่ติดกันเลย

4. จงหาความสัมพันธ์เวียนบังเกิดสำหรับจำนวนวิธีกระโดดขึ้นบันได n ขั้น ถ้าการกระโดดแต่ละครั้งสามารถกระโดดได้ 1, 3 หรือ 5 ขั้น

5. จงหาความสัมพันธ์เวียนบังเกิดสำหรับจำนวนวิธีหยอดเหรียญมูลค่า n สตางค์ลงในเครื่องหยอดเหรียญเครื่องหนึ่ง ถ้าเหรียญที่ใช้หยอดนั้นเป็นเหรียญ 5 สตางค์ , 10 สตางค์ และ 25 สตางค์

6. จงหาความสัมพันธ์เวียนบังเกิดสำหรับหาจำนวนคู่ของกระต่ายหลังจากเดือนที่ n ถ้าเริ่มต้นด้วยมีกระต่ายเพียงหนึ่งคู่และแต่ละเดือนกระต่ายที่มีอายุมากกว่า 1 เดือน จะออกลูกคู่หนึ่ง (ซึ่งเป็นเพศเมียหนึ่งตัว เพศผู้หนึ่งตัว)

7. จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดของการกระโดดของเก้งในตัวอย่าง 6.1.5

8. จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดต่อไปนี้

   8.1 $a_n - 7a_{n-1} + 12a_{n-2} = 0$ เมื่อ $a_0 = 0$, $a_1 = -1$

   8.2 $a_n + 5a_{n-1} = -6a_{n-2}$ เมื่อ $a_1 = 0$, $a_2 = 2$

   8.3 $a_n = a_{n-1} + 9a_{n-2} - 9a_{n-3}$ เมื่อ $a_0 = 4$, $a_1 = 1$ และ $a_2 = 2$

   8.4 $a_n + 3a_{n-1} - 4a_{n-2} - 12a_{n-3} = 0$ เมื่อ $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$

9. จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดต่อไปนี้

   9.1 $a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 0$ เมื่อ $a_0 = a_1 = 1$

   9.2 $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$ เมื่อ $a_1 = 2$, $a_2 = 6$

   9.3 $a_n + 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0$ เมื่อ $a_1 = 5$, $a_2 = -5$

   9.4 $a_n - 6a_{n-1} + 12a_{n-2} = 8a_{n-3}$ เมื่อ $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$

10. จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดต่อไปนี้

10.1 $a_n + 5a_{n-1} + 8a_{n-2} + 4a_{n-3} = 0$ เมื่อ $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 3$

10.2 $a_n - 5a_{n-1} + 7a_{n-2} - 3a_{n-3} = 0$ เมื่อ $a_0 = -1, a_1 = 1, a_2 = 3$

11. จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดต่อไปนี้

11.1 $a_n = a_{n-1} + 3(n-1)$ เมื่อ $a_0 = 1$

11.2 $a_n = a_{n-1} + n(n+1)$ เมื่อ $a_0 = 3$

11.3 $a_n = a_{n-1} + 3n^2$ เมื่อ $a_0 = 10$

11.4 $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2^n$ เมื่อ $a_0 = 1, a_1 = 0$

11.5 $a_n + 2a_{n-1} = 2^n - n^2$ เมื่อ $a_0 = 1$

12. จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดต่อไปนี้ โดยวิธีใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิด

12.1 $a_n = a_{n-1} + 2$ เมื่อ $a_0 = 1$

12.2 $a_n = 3a_{n-1} + 2$ เมื่อ $n \geq 1$

12.3 $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ เมื่อ $a_0 = 1, a_1 = 2$

12.4 $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + n$ เมื่อ $a_0 = 1, a_1 = -1$

12.5 $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2$ เมื่อ $a_0 = 1, a_1 = 0$

12.6 $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2n + 1$ เมื่อ $a_0 = 1, a_1 = 2$

12.7 $a_n = 2a_{n-1} + n^2$ เมื่อ $a_0 = 1$

12.8 $a_n = a_{n-1} + 2n^2 - n - 1$ เมื่อ $a_0 = 4$

12.9 $a_n = 2a_{n-1} + 4$ เมื่อ $a_1 = 3$

13. เขียนเส้นตรง n เส้น บนแผ่นกระดาษ โดยมีเงื่อนไขว่าเส้นตรงแต่ละคู่จะต้องตัดกัน (คือไม่มีคู่ใดขนานกันเลย) และจะต้องไม่มีเส้นตรงสามเส้นใด ๆ ตัดกันที่จุดเดียวกัน จงหาจำนวนพื้นที่บนแผ่นกระดาษซึ่งถูกแบ่งโดยเส้นตรง n เส้น