4 หลักรังนกพิราบและทฤษฎีบทของแรมเซย์
The Pigeonhole Principle and the Theorem of Ramsey

ปัญหาส่วนหนึ่งในวิชาคอมบินาทอริค จะเกี่ยวข้องกับการศึกษาการมีอยู่ (existence) ของการจัดสิ่งของให้เป็นไปตามรูปแบบที่ต้องการ วิธีที่จะแสดงหรือยืนยันว่า การจัดสิ่งของนั้นเป็นไปได้หรือมีอยู่จริง วิธีหนึ่งคือการแจกแจงว่ามีอะไรบ้าง วิธีนี้เป็นวิธีตรง ซึ่งจะทำได้เมื่อของที่นำมาจัดนั้นมีจำนวนจำกัดน้อย ๆ การยืนยันว่าการจัดเป็นไปได้หรือมีอยู่จริงสามารถทำได้อีกวิธีหนึ่ง เป็นวิธีอ้อมซึ่งอาศัยหลักรังนกพิราบเป็นเครื่องมือในการพิสูจน์ ในบทนี้เราจะศึกษาหลักรังนกพิราบตั้งแต่หลักรังนกพิราบที่อยู่ในรูปแบบง่าย ๆ ตลอดจนหลักรังนกพิราบที่อยู่ในรูปแบบที่ซับซ้อนขึ้นไปจนถึงทฤษฎีบทของแรมเซย์ ซึ่งเป็นรูปแบบทั่ว ๆ ไปของหลักรังนกพิราบ

4.1 หลักรังนกพิราบ
Pigeonhole Principle

หลักรังนกพิราบนี้ บางตำราอาจเรียกว่า **Shoebox Principle** และบางตำราก็เรียกว่า **Dirichlet Drawer Principle** สมมุติว่ามีนก

พิราบ 4 ตัว แต่มีรังนกเพียง 3 รัง ถ้าจับนกพิราบทุกตัวใส่รัง จะพบว่า จะต้องมี(อย่างน้อย)หนึ่งรังที่มีนกพิราบอย่างน้อยสองตัว แต่ไม่สามารถชี้ชัดได้ว่านกตัวใดอยู่ในรังเดียวกันและไม่สามารถชี้ชัดได้ว่า รังที่มีนกพิราบอย่างน้อยสองตัวคือรังใด หลักรังนกพิราบในรูปแบบที่ง่ายที่สุดกล่าวดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.1.1: หลักรังนกพิราบ

ถ้ามีนกพิราบ $k+1$ ตัว และมีจำนวนรังนกพิราบ k รัง แล้ว จะต้องมีอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกพิราบอย่างน้อยสองตัว

พิสูจน์ เราจะพิสูจน์โดยวิธีหาข้อขัดแย้ง นั่นคือ สมมุติว่ารังนกแต่ละรังมีนกมากที่สุดเพียงตัวเดียว ดังนั้นจำนวนนกพิราบทั้งหมดจะมีมากที่สุดเพียง k ตัว ซึ่งขัดแย้งกับความจริงที่ว่ามีนกพิราบทั้งหมด $k+1$ ตัว แสดงว่าแต่ละรังจะต้องมีนกอย่างน้อยสองตัว ■

ตัวอย่าง 4.1.1 ในกลุ่มคน 367 คน จะต้องมีอย่างน้อยสองคนที่เกิดวันเดียวกัน

วิธีทำ คน 367 คน เปรียบเสมือนนกพิราบ 367 ตัว ในหนึ่งปีมี 366 วัน สร้างรัง 366 รัง สำหรับใส่คนที่เกิดวันนั้น ๆ มีนก 367 ตัว แต่มีรังเพียง 366 รัง จากหลักรังนกพิราบ จะพบว่า ต้องมี (อย่างน้อย) หนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว แสดงว่าจะต้องมีอย่างน้อยสองคนที่เกิดวันเดียวกัน■

ตัวอย่าง 4.1.2 ประชาชนที่อยู่ในกรุงเทพ ฯ อย่างน้อย 2 คน จะต้องมีจำนวนเส้นผมบนศีรษะเท่ากัน

วิธีทำ สร้างรังสำหรับใส่คนที่มีจำนวนเส้นผมศูนย์เส้น หนึ่งเส้น และต่อไปเรื่อย ๆ จนถึงหนึ่งล้านส้น เนื่องจากจำนวนเส้นผมของคนโดยเฉลี่ย

มีไม่เกิน 1,000,000 เส้น ดังนั้น เรามีรัง 1,000,000 รัง แต่จำนวนประชากรในกรุงเทพ ฯ มีมากกว่า 5 ล้านคน จากหลักรังนกพิราบ จะต้องมีรัง(อย่างน้อยหนึ่งรัง)ที่มีคนอย่างน้อยสองคน คนที่อยู่ในรังเดียวกันคือคนที่มีจำนวนเส้นผมเท่ากัน แสดงว่าจะต้องมีอย่างน้อยสองคนมีจำนวนเส้นผมเท่ากัน ■

ตัวอย่าง 4.1.3 ให้ S เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก 26 จำนวน จะต้องมีสมาชิกใน S อย่างน้อยสองตัว ที่เหลือเศษเท่ากันเมื่อหารด้วย 25

วิธีทำ ให้คิดว่าจำนวนเต็มบวก 26 จำนวนนั้นเป็นนกพิราบ 26 ตัว จากขั้นตอนวิธีการหาร เรารู้ว่า เมื่อหารจำนวนเต็มบวกใด ๆ ด้วย 25 จะเหลือเศษ 0, 1, 2, ..., หรือ 24 เราจะสร้างรังนก 25 รัง ใส่จำนวนซึ่งเมื่อหารด้วย 25 แล้วเหลือเศษ i ลงในรังที่ i สำหรับ $i = 0, 1, ..., 24$ ดังในรูปข้างล่างนี้

เช่น 51 จะอยู่ในรัง "เศษ1" เพราะเมื่อหาร 51 ด้วย 25 จะเหลือเศษ 1 ส่วน 73 จะอยู่ในรัง "เศษ23" เพราะเมื่อหาร 73 ด้วย 25 จะเหลือเศษ 23 เป็นต้น จะเห็นว่ามีนก 26 ตัว แต่มีรังเพียง 25 รัง ดังนั้น จากหลักรังนกพิราบ จะต้องมีหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว นกที่อยู่ในรังเดียวกันนั้น คือจำนวนที่มีเศษเท่ากันเมื่อหารด้วย 25 ■

ตัวอย่าง 4.1.4 กำหนดให้ $a_1, a_2, ..., a_m$ เป็นจำนวนเต็ม m จำนวน จงแสดงให้เห็นว่าจะต้องมีจำนวนเต็ม k และ l ซึ่ง $0 < k < l \le m$ และ $a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_l$ หารด้วย m ลงตัว

วิธีทำ เทคนิคในการแก้ปัญหาข้อนี้อาศัยการพิจารณาชุดลำดับต่อไปนี้

$$a_1,\ a_1+a_2,\ a_1+a_2+a_3, \ldots,\ a_1+a_2+\ldots+a_m \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.1.1)$$

ซึ่งเป็นชุดลำดับที่มี m พจน์ ถ้า m หารพจน์ใดพจน์หนึ่งในชุดลำดับนี้ได้ลงตัว การพิสูจน์ก็จบลง ดังนั้น สมมุติว่าไม่มีพจน์ใดเลยในชุดลำดับ(4.1.1) หารด้วย m ลงตัว เมื่อหารไม่ลงตัวแสดงว่าจะต้องมีเศษ นั่นคือ ทุกพจน์ในชุดลำดับเมื่อหารด้วย m จะต้องเหลือเศษที่ไม่ใช่ 0 และเศษนั้นจะต้องเป็นจำนวนใดจำนวนหนึ่งในเซต {1, 2, ... , m-1} ซึ่งมีสมาชิก m-1 ตัว จำนวนพจน์ในชุดลำดับ (4.1.1) มีทั้งหมด m พจน์ แต่จำนวนเศษที่จะเป็นไปได้มี เพียง m-1 จำนวน แสดงว่าจะต้องมีอย่างน้อยสองพจน์ในชุดลำดับ (4.1.1) ซึ่งเมื่อหารด้วย m แล้ว ต้องเหลือเศษเท่ากัน สมมุติให้เศษที่เท่ากันนั้นคือ r และสมมุติว่าสองพจน์ในชุดลำดับนั้นคือ

$$a_1+a_2+\ldots+a_k \quad \text{และ} \quad a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1}+\ldots+a_l$$

ในที่นี้จะสมมุติว่า $k < l$ จากความรู้ในเรื่องทฤษฎีจำนวน เราสรุปได้ว่า

$$a_1+a_2+\ldots+a_k = mx+r \quad \text{และ}$$

$$a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1}+\ldots+a_l = my+r$$

เมื่อ x และ y คือจำนวนเต็มบางจำนวน นำสมการข้างบนนี้ไปลบออกจากสมการล่าง เราได้

$$a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_l = my-mx = m(y-x)$$

ซึ่งแสดงว่า m หาร $a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_l$ ได้ลงตัว ■

ตัวอย่าง 4.1.5 เลือกจำนวนเต็ม 101 จำนวน จากเซต {1 2, 3, ..., 200} จงแสดงว่า ในระหว่างจำนวนเต็ม 101 จำนวน ที่เลือกนั้น จะต้องมีจำนวนเต็มสองจำนวน ซึ่งจำนวนหนึ่งหารอีกจำนวนหนึ่งได้ลงตัว

วิธีทำ เทคนิคในการแก้ปัญหานี้ อาศัยหลักความจริงที่ว่า จำนวนเต็มใด ๆ สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $2^k \times a$ โดยที่ k เป็นจำนวนเต็ม $k \geq 0$ และ a เป็นจำนวนเต็มคี่ เช่น

$$12 = 4 \times 3 = 2^2 \times 3$$

$$20 = 4 \times 5 = 2^2 \times 5$$

$$23 = 2^0 \times 23$$

$$160 = 32 \times 5 = 2^5 \times 5$$

โปรดสังเกตว่า $20 = 2^2 \times 5$ หาร $160 = 2^5 \times 5$ ได้ลงตัว

จะเห็นว่า เมื่อเขียนจำนวนเต็มบวกในรูป $2^k \times a$ ส่วนที่เป็น a เป็นจำนวนเต็มคี่ที่อยู่ระหว่าง 1 และ 200 นั่นคือ a จะต้องเป็นจำนวนเต็มจำนวนใดจำนวนหนึ่งในเซต {1, 3, 5, 7,...,199 } ซึ่งมีสมาชิกเป็นจำนวนคี่ทั้งหมด 100 จำนวน สร้างรัง 100 รังที่สมนัยกับจำนวนคี่แต่ละจำนวน ใส่จำนวนเต็มที่มีส่วนประกอบ a ในรังที่สมนัยกับ a เช่น ใส่ 12 $= 2^2 \times 3$ ในรังที่สมนัยกับเลข 3 จำนวนเต็มที่เลือก 101 จำนวน เปรียบเสมือนนก 101 ตัว ที่ถูกเลือกมาใส่ในรัง 100 รัง จากหลักรังนกพิราบ แสดงว่าจะต้องมีจำนวนอย่างน้อยสองจำนวนที่อยู่ในรังเดียวกัน นั่นคือ จะต้องมีจำนวนเต็ม (อย่างน้อย) สองจำนวนซึ่งเมื่อเขียนแต่ละจำนวนให้อยู่ในรูป $2^k \times a$ แล้ว a ซึ่งเป็นตัวประกอบที่เป็นเลขคี่จะต้องเท่ากัน แต่ k จะไม่เท่ากัน เพราะถ้ามี k เท่ากันด้วยแล้ว จำนวนทั้งสองนั้นจะต้องเป็นจำนวนเดียวกัน ดังนั้นจำนวนที่มีค่า k น้อยกว่า จะหาร

จำนวนที่มีค่า k มากกว่าได้ลงตัว ตัวอย่างเช่น ถ้า $2^2 \times 5$ และ $2^5 \times 5$ ถูกเลือก $2^2 \times 5$ และ $2^5 \times 5$ จะอยู่ในรังเดียวกัน จะเห็นว่า $2^2 \times 5 = 20$ หาร $2^5 \times 5 = 160$ ได้ลงตัว ■

คำถามที่น่าพิจารณาต่อไปคือ ถ้าเลือกจำนวนเต็มเพียง 100 จำนวน จากเซต {1, 2,...,200} จะเป็นไปได้หรือไม่ว่าในบรรดา 100 จำนวนที่เลือกมานั้นจะต้องมีจำนวนเต็มสองจำนวนที่จำนวนหนึ่งหารอีกจำนวนหนึ่งได้ลงตัว คำตอบคือไม่แน่เสมอไป ตัวอย่างเช่น ถ้าจำนวนเต็มทั้งหมด 100 จำนวนที่เลือกมานั้นคือ 100, 101, 102, ..., 199 จะเห็นว่าไม่มีจำนวนใดหารจำนวนอื่นได้ลงตัวเลย

หลักรังนกพิราบที่กล่าวไปแล้วนั้น เป็นหลักรังนกพิราบในรูปแบบที่ง่ายที่สุด ต่อไปเราจะพิจารณาหลักรังนกพิราบในรูปแบบที่เข้มขึ้น จะเห็นว่าถ้า 2k+1 เป็นจำนวนนกพิราบ และ k เป็นจำนวนรังนกพิราบแล้ว จะต้องมี(อย่างน้อย)หนึ่งรังที่มีนกพิราบอย่างน้อย 3 ตัว เพราะถ้าทุกรังมีนกพิราบ 2 ตัวหรือน้อยกว่า จำนวนนกพิราบทั้งหมดจะเท่ากับ 2k หรือน้อยกว่า ซึ่งขัดแย้งกับสมมุติฐานที่ว่ามีนกพิราบ 2k+1 ตัว ในทำนองเดียวกัน ถ้า 3k+1 เป็นจำนวนนกพิราบ และ k เป็นจำนวนรังนกพิราบแล้ว จะต้องมีอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกพิราบอย่างน้อย 4 ตัว ในกรณีทั่ว ๆ ไป เราได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.1.2

ให้ k และ m เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้าจับนกพิราบ mk + 1 ตัว ใส่ในรัง k รัง จะต้องมีหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อย m + 1 ตัว

พิสูจน์ เว้นไว้ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด ■

หมายเหตุ จะเห็นว่าทฤษฎีบท 4.1.1 เป็นกรณีพิเศษของทฤษฎีบท 4.1.2

ทฤษฎีบท 4.1.3

ถ้า s เป็นจำนวนนกพิราบ และ k เป็นจำนวนรังนกพิราบแล้ว จะต้องมีหนึ่งรังที่มีนกพิราบอย่างน้อย $\left\lfloor \frac{s-1}{k} \right\rfloor + 1$ ตัว

ในที่นี้เราใช้สัญญลักษณ์ $\lfloor x \rfloor$ แทนจำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ x เช่น $\lfloor 3.5 \rfloor = 3$

พิสูจน์ ถ้าจำนวนนกพิราบในแต่ละรังมีมากที่สุด $\left\lfloor \frac{s-1}{k} \right\rfloor$ ตัว แล้วจำนวนนกพิราบที่มากที่สุดจะเท่ากับ $k \cdot \left\lfloor \frac{s-1}{k} \right\rfloor \le k \cdot \frac{s-1}{k} = s-1 < s$ ซึ่งขัดแย้งกับข้อสมมุติฐานที่ว่า จำนวนนกพิราบทั้งหมดเท่ากับ s ตัว แสดงว่าจะต้องมีอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกพิราบอย่างน้อย $\left\lfloor \frac{s-1}{k} \right\rfloor + 1$ ตัว ■

ตัวอย่าง 4.1.6 ในห้องเรียนห้องหนึ่งมีนักเรียน 40 คน ในจำนวนนี้จะต้อง มีนักเรียนอย่างน้อยกี่คน ที่มีเดือนเกิดเหมือนกัน

วิธีทำ ในที่นี้ จำนวนคนเท่ากับ 40 ซึ่งเปรียบเสมือนจำนวนนกพิราบ ส่วนจำนวนเดือนเกิดเท่ากับ 12 เปรียบได้กับจำนวนรัง ดังนั้น จะต้องมีอย่างน้อย $\left\lfloor \frac{40-1}{12} \right\rfloor + 1 = 3 + 1 = 4$ คน ที่เกิดเดือนเดียวกัน ■

ตัวอย่าง 4.1.7 สมมุติว่าระบบคอมพิวเตอร์เครื่องหนึ่ง มีหน่วยความจำ 8 แห่ง รวมความจุเท่ากับ 8000 บิท แสดงว่าจะต้องมีอย่างน้อยหนึ่งแห่งซึ่งมีขนาดอย่างน้อย 1000 บิท

วิธีทำ เพราะว่า s = 8000 และ k = 8 ดังนั้น

$$\left\lfloor \frac{s-1}{k} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{8000-1}{8} \right\rfloor + 1 = 999 + 1 = 1000 \qquad \blacksquare$$

ทฤษฎีบทที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ เป็นผลงานของ P. Erdos และ A. Szekeres ซึ่งเป็นนักคณิตศาสตร์ชาวฮังการี สามารถพิสูจน์ได้โดยใช้หลักรังนกพิราบ ก่อนจะกล่าวถึงทฤษฎีบทดังกล่าวนี้ ขอทำความเข้าใจเกี่ยวกับศัพท์ที่จะใช้ดังนี้

พิจารณาลำดับ $a_1, a_2, \ldots, a_m$ จะกล่าวว่าลำดับ $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_k}$ เป็นลำดับย่อยของ $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ถ้า $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le m$ เช่น a_2, a_4, a_6 เป็นลำดับย่อยของ $a_1, a_2, \ldots, a_8$ แต่ a_2, a_6, a_4 ไม่เป็นลำดับย่อยของ $a_1, a_2, \ldots, a_8$ เราจะกล่าวว่า ลำดับย่อย $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_k}$ เป็น **ลำดับย่อยแบบเพิ่ม** ถ้า $a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_k}$ และจะกล่าวว่า $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_k}$ เป็น **ลำดับย่อยแบบลด** ถ้า $a_{i_1} > a_{i_2} > \cdots > a_{i_k}$

ทฤษฎีบท 4.1.4

ถ้า $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$ เป็นลำดับของจำนวน n^2+1 จำนวนแตกต่างกันแล้ว จะต้องมีลำดับย่อยแบบเพิ่มซึ่งมีความยาวเท่ากับ $n + 1$ หรือมีลำดับย่อยแบบลดซึ่งมีความยาวเท่ากับ $n + 1$

จะเว้นการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ไว้ให้เป็นแบบฝึกหัด โดยเลียนแบบการพิสูจน์ในตัวอย่างข้างล่างนี้ ซึ่งเป็นกรณีเฉพาะ ในตัวอย่างข้างล่างแสดงวิธีพิสูจน์ในกรณีที่ $n = 2$ ทั้งนี้เพื่อความสะดวกในการอธิบาย

ตัวอย่าง 4.1.8 กำหนดให้ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 เป็นลำดับย่อยของจำนวน 5 จำนวน แตกต่างกัน จงแสดงว่าจะต้องมีลำดับย่อยแบบเพิ่มซึ่งมีความยาวเท่ากับ 3 หรือมีลำดับย่อยแบบลดซึ่งมีความยาวเท่ากับ 3

วิธีทำ ถ้าลำดับ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 มีลำดับย่อยแบบเพิ่มที่มีความยาวเท่ากับ 3 การพิสูจน์ก็จบลง ดังนั้น เราจะสมมุติว่าไม่มีลำดับย่อยแบบเพิ่มซึ่งมีความยาวเท่ากับ 3 และจากสมมุติฐานนี้ เราจะแสดงว่าจะต้องมีลำดับย่อยแบบลด ซึ่งมีความยาวเท่ากับ 3

เพื่อความสะดวก เราให้ t_i แทนความยาวของลำดับย่อยแบบเพิ่มที่ยาวที่สุด ที่ขึ้นต้นด้วย a_i เมื่อ i = 1, 2, 3, 4, 5 เราจะเขียน t_i ไว้ใต้ a_i เช่น สมมุติว่า 10, 4, 13, 8, 21 เป็นลำดับที่กำหนดให้ ลำดับย่อยแบบเพิ่มที่ยาวที่สุดและขึ้นต้นด้วย 4 คือลำดับ 4, 8, 21 และลำดับ 4, 13, 21 ซึ่งลำดับย่อยแบบเพิ่มทั้งสองชุดนี้ ต่างมีความยาวเท่ากับ 3 ดังนั้น เราจะเขียน 3 ไว้ใต้ 4 ในทำนองเดียวกัน จะพบว่าลำดับย่อยแบบเพิ่มที่ยาวที่สุดและขึ้นต้นด้วย 13 คือ 13, 21 ซึ่งเป็นลำดับย่อยแบบเพิ่มเพียงชุดเดียวและมีความยาวเท่ากับ 2 ดังนั้นเราจะเขียน 2 ไว้ใต้เลข 13 ทำเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ ในที่สุดจะได้

$$\begin{array}{ccccc} 10 & 4 & 13 & 8 & 21 \\ {\scriptstyle 3} & {\scriptstyle 3} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 1} \end{array}$$

ในกรณีทั่วไป เราได้

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \end{array}$$

เนื่องจากเราสมมุติว่าไม่มีลำดับย่อยแบบเพิ่มซึ่งมีความยาวเท่ากับ 3 ดังนั้น $t_i \neq 3$ สำหรับ i = 1, 2, 3, 4, 5 นั่นคือ t_i = 1 หรือ 2 เราจะใช้หลักรังนกพิราบ ลองนึกภาพว่ามีกล่อง 5 กล่อง ชื่อ t_1, t_2, t_3, t_4, t_5

ซึ่งจะต้องใส่เลข 1 หรือ 2 เท่านั้นลงในแต่ละกล่อง จากหลักรังนกพิราบจะพบว่า จะต้องมีอย่างน้อย 3 กล่อง ที่มีตัวเลขเหมือนกัน ซึ่งอาจจะเป็น 1 เหมือนกัน หรืออาจจะเป็น 2 เหมือนกันก็ได้ เพื่อความสะดวกในการอธิบาย จะสมมุติว่า มี 2 เหมือนกัน 3 กล่อง และสมมุติว่ามีลักษณะดังนี้

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
2	1	2	2	1

เลขที่อยู่ใต้ a_3 คือ 2 แสดงว่า มีลำดับย่อยแบบเพิ่มที่ขึ้นต้นด้วย a_3 และมีความยาวมากที่สุดเท่ากับ 2 ถ้า $a_1 < a_3$ นำ a_1 มาเรียงไว้หน้าลำดับย่อยดังกล่าว เราได้ลำดับย่อยแบบเพิ่มที่ขึ้นต้นด้วย a_1 และมีความยาวเท่ากับ 3 ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะใต้ a_1 คือ 2 ซึ่งหมายความว่า ลำดับแบบเพิ่มที่ขึ้นต้นด้วย a_1 จะต้องมีความยาวมากที่สุดเท่ากับ 2 เท่านั้น ดังนั้น เป็นไปไม่ได้ที่ a_1 จะน้อยกว่า a_3 นั่นคือ $a_1 > a_3$ ในทำนองเดียวกันเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $a_3 > a_4$ ดังนั้น $a_1 > a_3 > a_4$ จะเป็นลำดับย่อยแบบลดซึ่งมีความยาวเท่ากับ 3 ตามต้องการ

ผลลัพธ์ของทฤษฎีบทนี้เป็นผลลัพธ์ที่ดีที่สุดที่จะเป็นไปได้ หมายความว่า ถ้าลำดับที่กำหนดให้นั้นมีจำนวนพจน์น้อยกว่า n^2+1 ผลสรุปจะไม่เป็นจริง เช่น ถ้าลำดับที่กำหนดให้นั้น มีเพียง n^2 พจน์ เราอาจหาลำดับย่อยแบบเพิ่มหรือแบบลดที่มีความเท่ากับ n+1 ไม่ได้ ตัวอย่างเช่น ในกรณีที่ n = 4 สมมุติว่าลำดับที่กำหนดให้นั้นคือ

4, 3, 2, 1, 8, 7, 6, 5, 12, 11, 10, 9, 16, 15, 14, 13

ซึ่งเป็นลำดับที่มีความยาวเท่ากับ $n^2 = 16$ จะเห็นว่าลำดับนี้ไม่มีลำดับย่อยแบบเพิ่มหรือแบบลดที่มีความยาว n+1 = 5 พจน์ ลำดับย่อยแบบเพิ่มหรือแบบลดที่ยาวที่สุด จะมีความยาวเท่ากับ 4 เท่านั้น ลำดับที่

กำหนดให้นี้ประกอบด้วยเลข 1 ถึง 16 ถ้าเราพยายามจะเพิ่มเลข 17 เข้าไปที่ใดก็ตามในลำดับ จะก่อให้เกิดลำดับย่อยแบบเพิ่มหรือแบบลดที่มีความยาวเท่ากับ 5 ทันที

หลักรังนกพิราบในรูปแบบที่เข้มขึ้นอีกระดับหนึ่ง ได้แก่หลักในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.1.5

สมมุติให้ $p_1, p_2, \ldots, p_k$ เป็นจำนวนเต็มบวก k จำนวน ถ้าจับนกพิราบ $m = p_1 + p_2 + \ldots + p_k - k+1$ ตัว ใส่รัง k รัง จะต้องมีนกพิราบในรังที่หนึ่งอย่างน้อย p_1 ตัว หรือมีนกพิราบในรังที่สองอย่างน้อย p_2 ตัว ... หรือมีนกพิราบในรังที่ k อย่างน้อย P_k ตัว

พิสูจน์ เว้นไว้ให้ผู้อ่านพิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ตัวอย่าง 4.1.9 มีบอลสีแดง 6 ลูก บอลสีน้ำเงิน 9 ลูก และสีขาว 7 ลูก จงหาจำนวนบอลที่น้อยที่สุดที่จะต้องหยิบ ซึ่งรับประกันว่าในจำนวนนั้นจะมีบอลสีแดงอย่างน้อย 4 ลูก หรือมีบอลสีน้ำเงินอย่างน้อย 5 ลูก หรือมีบอลสีขาวอย่างน้อย 6 ลูก

วิธีทำ ในที่นี้ $p_1 = 4$, $p_2 = 5$, $p_3 = 6$ และ $k = 3$ ดังนั้น จำนวนลูกบอลที่น้อยที่สุดที่จะต้องหยิบคือ $m = p_1+p_2+p_3-k+1=4+5+6-3+1=13$ ลูก

■

4.2 จำนวนแรมเซย์

Ramsey Numbers

ในหัวข้อนี้ จะเน้นทฤษฎีบทที่เป็นผลสืบเนื่องมาจากจากหลักรังนกพิราบ นั่นคือ เราจะศึกษาทฤษฎีบทของแรมเซย์ เราจะได้เห็นในหัว

ข้อนี้ว่า ทฤษฎีบทของแรมเซย์เป็นบทขยายหรือเป็นบททั่วไปของหลักรังนกพิราบ Frank plumpton Ramsey (1903-1930) เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษที่ค้นพบทฤษฎีบทนี้ รูปทั่วไปของทฤษฎีบทของแรมเซย์ค่อนข้างจะยุ่งยากและซับซ้อน ในที่นี้เราจะศึกษากรณีเฉพาะของทฤษฎีบทของแรมเซย์เท่านั้น เพื่อให้เข้าใจง่าย เราจะเริ่มต้นด้วยปัญหาในตัวอย่างต่อไปนี้

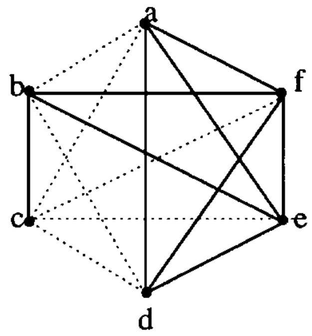
ตัวอย่าง 4.2.1 ในระหว่างกลุ่มคน 6 คน จะต้องมีกลุ่มคน 3 คนที่เป็นเพื่อนกัน หรือมีกลุ่มคน 3 คน ที่ไม่รู้จักกันเลย

พิสูจน์ สมมุติให้ a เป็นสมาชิกคนหนึ่งในกลุ่ม 6 คนนั้น ให้ F เป็นเซตของคนที่เป็นเพื่อนกับ a ให้ S เป็นเซตของคนที่ไม่รู้จักกับ a จากหลักรังนกพิราบจะพบว่า ในจำนวนกลุ่มคน 5 คนที่เหลือ (ไม่รวม a) จะต้องมีอย่างน้อย 3 คนอยู่ใน F หรือจะต้องมีอย่างน้อย 3 คน อยู่ใน S

สมมุติว่า กรณีแรกเป็นจริง นั่นคือ มีอย่างน้อย 3 คนอยู่ใน F ในระหว่าง 3 คนนี้ ถ้าทุกคนไม่รู้จักกัน การพิสูจน์ก็จบลง แต่ถ้ามีคนคู่ใดคู่หนึ่งเป็นเพื่อนกัน คนสองคนนี้รวมกับ a ก็จะเป็นกลุ่มคน 3 คน ซึ่งเป็นเพื่อนกัน ซึ่งเป็นไปตามข้อสรุปของทฤษฎีบท แต่ถ้ากรณีหลังเป็นจริง นั่นคือมีอย่างน้อย 3 คนอยู่ใน S การให้เหตุผลในการพิสูจน์ ทำได้ในทำนองเดียวกับกรณีแรก ดังนั้นไม่ว่าจะเป็นกรณีแรกหรือกรณีหลัง เราสามารถสรุปได้ว่าจะต้องมีกลุ่มคน 3 คน เป็นเพื่อนกัน หรือมีกลุ่มคน 3 คน ไม่รู้จักกัน ■

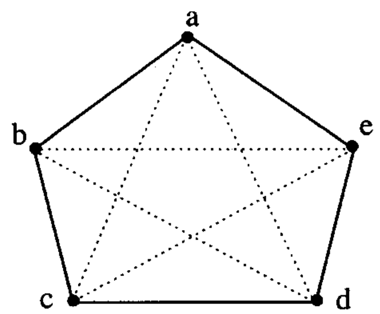
หมายเหตุ คำว่า "กลุ่มคน 3 คนเป็นเพื่อนกัน" หมายถึงคนแต่ละคู่เป็นเพื่อนซึ่งกันและกัน ในทำนองเดียวกัน คำว่า "กลุ่มคน 3 คน ไม่รู้จักกัน" หมายถึงคนแต่ละคู่ใน 3 คนนี้ไม่มีใครรู้จักกันเลย

เราอาจอธิบายปัญหาในตัวอย่าง 4.2.1 นี้ในรูปของกราฟ โดยแทนคน 6 คนด้วยจุดยอด 6 จุด ลากเส้นทึบเชื่อมต่อระหว่างบุคคลที่เป็นเพื่อนกันและลากเส้นไข่ปลาเชื่อมต่อระหว่างบุคคลที่ไม่รู้จักกัน ถ้าลากเส้นทึบและเส้นไข่ปลาโดยวิธีสุ่ม ไม่ว่าจะลากแบบใด จะต้องมีสามเหลี่ยมทึบ(สามเหลี่ยมที่มีด้านทุกด้านเป็นเส้นทึบ) หรือสามเหลี่ยมไข่ปลา (สามเหลี่ยมที่มีด้านทุกด้านเป็นเส้นไข่ปลา) เกิดขึ้นเสมอ เช่นในรูปข้างบนนี้ เป็นการลากเส้นแบบหนึ่ง จะเห็นว่ามีสามเหลี่ยมทึบเกิดขึ้น เช่น สามเหลี่ยม ade ดังนั้น เราอาจกล่าวถึงปัญหาในตัวอย่าง 4.2.1 ได้ใหม่ ดังนี้



> มีจุดยอด 6 จุด ถ้าลากเส้นทึบและเส้นไข่ปลาเชื่อมจุดยอดแต่ละคู่โดยวิธีสุ่ม จะต้องมีสามเหลี่ยมทึบหรือสามเหลี่ยมไข่ปลาเกิดขึ้นเสมอ

จำนวนจุดยอด 6 จุด เป็นจำนวนที่น้อยที่สุดที่รับประกันการมีสามเหลี่ยมทึบหรือสามเหลี่ยมไข่ปลา ถ้ามีจุดยอดเพียง 5 จุด ข้อสรุปที่ว่าต้องมีสามเหลี่ยมทึบหรือสามเหลี่ยมไข่ปลาอาจไม่เป็นจริง เช่น ในรูปทางขวามือนี้เป็นการลากเส้นแบบหนึ่งที่ไม่มีสามเหลี่ยมทึบหรือสามเหลี่ยมไข่ปลา



เพื่อความสะดวกต่อการขยายข้อความเช่นในปัญหาของตัวอย่าง 4.2.1 ให้อยู่ในรูปทั่วไป เราจะพูดถึงปัญหาในรูปของเซต ถ้าให้ A แทนเซตของกลุ่มคน 6 คน ให้ X เป็นเซตของสมาชิกคู่ที่เป็นเพื่อนกัน เช่น ถ้า a เป็นเพื่อนกับ b จะได้ {a,b} อยู่ใน X จะเห็นว่าสมาชิกใน X ก็คือ เซตย่อยขนาดสอง (หมายถึงเซตย่อยที่มีสมาชิกสองตัว) ของ A นั่นเอง ในทำนองเดียวกัน ให้ Y เป็นเซตของสมาชิกคู่ที่ไม่รู้จักกัน เช่น ถ้า c ไม่รู้จักกับ d จะได้ {c,d} อยู่ใน Y สมาชิกใน Y เป็นเซตย่อยขนาดสองของ A เช่นกัน จะเห็นว่า เซตย่อยขนาดสองของ A ถูกแบ่งออกเป็นสองพวก คือพวกที่อยู่ใน X กับพวกที่อยู่ใน Y ทั้งนี้เนื่องจากสมาชิกแต่ละคู่ใน A จะต้องเป็นเพื่อนกัน นั่นคือ ต้องอยู่ใน X หรือไม่รู้จักกัน นั่นคือ ต้องอยู่ใน Y ที่กล่าวว่าจะต้องมีกลุ่มคน 3 คนที่เป็นเพื่อนกัน หมายความว่าจะต้องมีเซตย่อยขนาดสามของ A ซึ่งสมาชิกแต่ละคู่ในเซตย่อยขนาดสามนี้อยู่ใน X หรือที่กล่าวว่ามีกลุ่มคน 3 คนไม่รู้จักกัน หมายความว่ามีเซตย่อยขนาดสามของ A ซึ่งสมาชิกแต่ละคู่ในเซตย่อยขนาดสามนี้อยู่ใน Y ดังนั้น เรากล่าวถึงปัญหาในตัวอย่าง 4.2.1 ใหม่ในรูปของเซตได้ดังนี้

ให้ A เป็นเซตซึ่งประกอบด้วยสมาชิก 6 ตัว จะต้องมีเซตย่อยขนาด 3 ซึ่งสมาชิกแต่ละคู่ในเซตย่อยนี้อยู่ใน X หรือมีเซตย่อยขนาด 3 ซึ่งสมาชิกแต่ละคู่ในเซตย่อยนี้อยู่ใน Y

ในกรณีทั่วไป ให้ A เป็นเซตซึ่งมีจำนวนสมาชิกเท่ากับ N แบ่งเซตย่อยขนาดสองของ A ออกเป็นสองพวก คือพวกที่อยู่ใน X และพวกที่อยู่ใน Y ให้ p และ q เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $p, q \geq 2$

นิยาม 4.2.1

ให้ N เป็นจำนวนสมาชิกในเซต A ใด ๆ จะกล่าวว่าจำนวนเต็มบวก N มีสมบัติแรมเซย์-(p,q) ถ้ามีเซตย่อยขนาด p ของ A ซึ่งสมาชิกทุก

ๆ คู่ในเซตย่อยนี้อยู่ใน X หรือมีเซตย่อยขนาด q ของ A ซึ่งสมาชิกทุก ๆ คู่ในเซตย่อยนี้อยู่ใน Y

จากตัวอย่าง 4.2.1 จะพบว่า 6 มีสมบัติแรมเซย์-(3,3) แต่ 5 ไม่มีสมบัติแรมเซย์-(3,3)

ข้อสังเกต ถ้า N เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งมีสมบัติแรมเซย์-(p,q) และ $M > N$ แล้ว M จะมี สมบัติแรมเซย์-(p,q) ด้วย

ทฤษฎีบท 4.2.1 (Ramsey's Theorem)

ถ้า p และ q เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $p,q \geq 2$ แล้ว จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่งมีสมบัติแรมเซย์-(p,q) เสมอ

จากทฤษฎีบทของแรมเซย์นี้ ทำให้เราสามารถพูดถึงจำนวนเต็มบวก N ที่น้อยที่สุดที่มีสมบัติแรมเซย์-(p,q) และจะแทนจำนวนน้อยที่สุดนี้ด้วย R(p,q) ซึ่งจะเรียกว่า **จำนวนแรมเซย์** (Ramsey Number)

จากตัวอย่าง 4.2.1 เราพบว่า $R(3,3) \leq 6$ แต่จากรูปในหน้า 91 เราพบว่า $R(3,3) > 5$ ดังนั้น $R(3,3) = 6$

ทฤษฎีบท 4.2.2

$R(p,q) = R(q,p)$ และ $R(p,2) = p$

พิสูจน์ สมการแรกเป็นจริงเนื่องจากความสมมาตรของเนื้อความในนิยามของสมบัติแรมเซย์-(p,q) นั่นคือ ถ้าเราเปลี่ยนชื่อเซตจาก X เป็น Y และจาก Y เป็น X แล้ว ความหมายของสมบัติแรมเซย์-(p,q) ก็ยังคงเดิม ส่วนในสมการที่สองนั้นเป็นจริงเนื่องจาก ถ้าไม่มีบุคคลคู่ใดไม่รู้จักกันก็แสดงว่าทุกคู่เป็นเพื่อนกันทั้งหมด ■

โดยทั่วไปแล้ว การคำนวณหาจำนวนแรมเซย์ค่อนข้างยาก จำนวนที่พบและเป็นที่รู้จักกันจึงมีเท่าที่ปรากฏในตารางต่อไปนี้

R(p,2) = p, R(2,q) = q
R(3,3) = 6
R(3,4) = R(4,3) = 9
R(3,5) = R(5,3) = 14
R(3,6) = R(6,3) = 18
R(3,7) = R(7,3) = 23
R(3,9) = R(9,3) = 36
R(4,4) = 18

ทฤษฎีบท 4.2.3 (ขอบเขตของจำนวนแรมเซย์)

ถ้า p และ q เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $p,q \geq 3$ แล้ว $R(p,q) \leq R(p-1,q) + R(p,q-1)$

พิสูจน์ การพิสูจน์จะสมบูรณ์ ถ้าเราเพียงแสดงให้เห็นชัดว่าจำนวนเต็ม $n = R(p-1,q) + R(p,q-1)$ มีคุณสมบัติแรมเซย์-(p,q) การให้เหตุผลจะคล้ายกับการให้เหตุผลในตัวอย่าง 4.2.1 คือสมมุติให้ A เป็นเซตซึ่งมีจำนวนสมาชิกเท่ากับ $n = R(p-1,q) + R(p,q-1)$

ให้ a เป็นสมาชิกตัวหนึ่งในเซต A
ให้ F เป็นเซตของคนที่เป็นเพื่อนกับ a
ให้ S เป็นเซตของคนที่ไม่รู้จักกับ a

จากทฤษฎีบท 4.1.5 จะพบว่าในจำนวนกลุ่มคน $R(p-1,q) + R(p,q-1) - 1$ คนที่เหลือ(ไม่รวม a) จะต้องมีกลุ่มคนอย่างน้อย R(p-1,q) คนใน F หรือมีกลุ่มคนอย่างน้อย R(p,q-1) คนใน S สมมุติว่า กรณีแรกเป็นจริง นั่นคือมีกลุ่มคน R(p-1,q) คนใน F เราทราบว่าจำนวนเต็ม R(p-1,q) มีสมบัติแรมเซย์-(p-1,q) นั่นคือมีกลุ่มคน p-1 คนเป็นเพื่อนกัน หรือมีกลุ่มคน q คน ไม่

รู้จักกัน ถ้ารวม a เข้าไปด้วย เราจะได้กลุ่มคน p คน เป็นเพื่อนกันหรือมีกลุ่มคน q คน ไม่รู้จักกัน แสดงว่าจำนวนเต็ม $n = R(p-1,q) + R(p,q-1)$ มีสมบัติแรมเซย์-(p,q) ถ้ากรณีหลังเป็นจริง การพิสูจน์ก็ทำได้ในทำนองเดียวกับกรณีแรก

ตัวอย่าง 4.2.2 $R(3,4) \leq 10$

วิธีทำ เนื่องจาก $R(3,3) = 6$ และ $R(2,4) = 4$ ตามทฤษฎีบท 4.2.2 ดังนั้น

$$R(3,4) \leq R(2,4) + R(3,3) = 4 + 6 = 10$$ ■

แบบฝึกหัด

1. สำนักงานแห่งหนึ่ง มีพนักงาน 13 คน จงแสดงว่า ต้องมีพนักงานอย่างน้อยสองคนที่เกิดเดือนเดียวกัน
2. มีถุงเท้า 3 คู่อยู่ในลิ้นชัก ถุงเท้าแต่ละคู่มีสีแตกต่างกัน หยิบถุงเท้าจากลิ้นชักโดยไม่เห็นถุงเท้า อยากทราบว่าจะต้องหยิบถุงเท้าอย่างน้อยกี่ข้างจึงจะรับประกันได้ว่า ในจำนวนถุงเท้าที่หยิบนั้น จะต้องมีอย่างน้อย 2 ข้าง ที่เป็นคู่เดียวกัน นั่นคือมีสีเหมือนกัน
3. มีของ 21 ชิ้นในกล่อง 5 กล่อง จะต้องมีอย่างน้อย 1 กล่องที่มีของอย่างน้อย k ชิ้น จงหา k
4. มีของ m ชิ้น ที่จะต้องใส่ลงในกล่อง n กล่อง จะต้องมีอย่างน้อยหนึ่งกล่องที่มีของอย่างน้อย k ชิ้น จงหา k
5. เลือกจำนวนเต็ม n+1 จำนวน จากเซต $\{1,2,\ldots,2n\}$ จงแสดงว่าในจำนวนเต็ม n+1 จำนวนที่เลือกนั้น จะต้องมีสองจำนวน ซึ่งจำนวนหนึ่งหารอีกจำนวนได้ลงตัว

6. เลือกจำนวนเต็ม n จำนวน จากเซต {1, 2, ..., 2n } โดยมีเงื่อนไขว่าในจำนวนเต็มทั้งหมด n จำนวนที่เลือกนั้นต้องไม่มีจำนวนใดหารอีกจำนวนหนึ่งได้ลงตัว

7. พิสูจน์ทฤษฎีบท 4.1.2

8. จะต้องเลือกจำนวนเต็มอย่างน้อยที่สุดกี่จำนวนในเซต {1, 2, ..., 200} จึงจะรับประกันได้ว่าในระหว่างจำนวนเต็มที่เลือกนั้นจะต้องมีสองจำนวน ซึ่งมีตัวหารร่วมกัน

9. ให้ S เป็นเซตซึ่งประกอบด้วยจุด 6 จุดในปริภูมิ 3 มิติ ซึ่งไม่มี 3 จุดใด ๆ อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ลากเส้นเชื่อมระหว่างสองจุดใด ๆ โดยใช้หมึกสีแดงและสีน้ำเงิน จงแสดงว่าจะต้องมีรูปสามเหลี่ยมอย่างน้อยสองรูปที่มีสีแดงทั้งสามด้านหรือมีสีน้ำเงินทั้งสามด้าน (อาจจะเป็นสามเหลี่ยมสีแดงทั้งสองรูป หรือเป็นสามเหลี่ยมสีน้ำเงินทั้งสองรูป หรือเป็นสีแดงหนึ่งรูป เป็นสีน้ำเงินหนึ่งรูป)

10. จงหา ก. $R(2,2)$ ข. $R(2,8)$ ค. $R(7,2)$

11. จงแสดงว่า ก. $R(3,5) \leq 15$ ข. $R(3,6) \leq 21$ ค. $R(4,5) \leq 20$

12. จงหาขอบเขตของ $R(5,5)$

13. ในจำนวนกลุ่มคน 10 คน จงแสดงว่าจะต้องมี 3 คนที่เป็นเพื่อนกัน หรือ มี 4 คนเป็นศัตรูกัน และจงแสดงว่าจะต้องมี 3 คนเป็นศัตรูกัน หรือมี 4 คนเป็นเพื่อนกัน