3 สัมประสิทธิ์ทวินาม

Binomial Coefficients

ในบทที่แล้ว เราใช้สัญญลักษณ์ C(n,k) หรือ $\binom{n}{k}$ แทนจำนวนวิธีเลือกสิ่งของ k สิ่งจากสิ่งของทั้งหมด n สิ่ง และได้พิสูจน์เอกลักษณ์ C(n,k) = C(n,n-k) โดยใช้เหตุผลเชิงคอมบินาทอริคแสดงให้เห็นว่าจำนวนที่อยู่ทั้งสองข้างของเครื่องหมาย = แทนจำนวนนับของสิ่งเดียวกัน ในบทนี้เราจะศึกษาเอกลักษณ์บางเอกลักษณ์ที่ง่ายและเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาในบทต่อ ๆ ไป โดยจะเน้นการพิสูจน์ด้วยการให้เหตุผลเชิงคอมบินาทอริคมากกว่าการพิสูจน์เชิงพีชคณิตเพราะจะช่วยเราจำเนื้อหาของเอกลักษณ์ได้แม่นยำยิ่งขึ้น

3.1 ทฤษฎีบททวินาม

Binomial Theorem

เราจะเริ่มด้วยการพิจารณาผลคูณของทวินาม x+y เช่น $(x+y)^3$ เกิดจากการคูณ (x+y) ด้วย (x+y) นำผลลัพธ์ที่ได้คูณกับ (x+y) อีกครั้งหนึ่งจะได้

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y)$$
$$= xxx + xxy + xyx + xyy + yxx + yxy + yyx + yyy$$

จะเห็นว่าแต่ละพจน์ของผลคูณในบรรทัดสุดท้ายมี 3 ตำแหน่ง แต่ละตำแหน่งมีทางเลือก 2 ทาง คือเลือก x หรือเลือก y จากแต่ละวงเล็บ ตำแหน่งแรกได้จากการเลือก x หรือ y ในวงเล็บแรก ตำแหน่งที่สองได้จากการเลือก x หรือ y ในวงเล็บที่สอง และตำแหน่งที่สามได้จากการเลือก x หรือ y ในวงเล็บที่สาม เช่น พจน์ xyx ได้มาจากการเลือก x จากวงเล็บแรกคูณกับ y ซึ่งเลือกมาจากวงเล็บที่สองแล้วคูณกับ x ในวงเล็บสุดท้าย ดังนั้นจำนวนพจน์ทั้งหมดจะเท่ากับ 2x2x2 = 8 หลังจากคูณกระจายแล้วรวมพจน์เหมือนเข้าด้วยกัน เราได้

$$(x+y)(x+y)(x+y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของ x^2y คือ 3 ซึ่งเท่ากับจำนวนพจน์ที่ประกอบด้วย y หนึ่งตัวและ x สองตัว จำนวนนี้จะเท่ากับจำนวนวิธีเลือกตำแหน่งหนึ่งตำแหน่งจากทั้งหมด 3 ตำแหน่ง เพื่อใส่ y ลงในตำแหน่งนั้น แล้วใส่ x ลงในสองตำแหน่งที่เหลือ ซึ่งจะทำได้ต่างกัน $\binom{3}{1}$ วิธี ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของ x^2y จึงเท่ากับ $\binom{3}{1} = 3$ ในทำนองเดียวกัน สัมประสิทธิ์ของพจน์ xy^2 จะเท่ากับจำนวนวิธีเลือกตำแหน่ง 2 ตำแหน่งเพื่อใส่ y แล้วใส่ x ลงในตำแหน่งที่เหลือ ซึ่งจะทำได้แตกต่างกัน $\binom{3}{2} = 3$ วิธี ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของ xy^2 คือ 3 ส่วนสัมประสิทธิ์ของ y^3 คือ $\binom{3}{3} = 1$ และสัมประสิทธิ์ของ x^3 คือ $\binom{3}{0} = 1$ ดังนั้นเราได้

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3 = x^3+3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

ในกรณีทั่ว ๆ ไป เราได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1.1: ทฤษฎีบททวินาม

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ เราได้

(1) $(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

(2) $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n$

พิสูจน์(1) การพิสูจน์ อาจทำได้โดยใช้วิธีให้เหตุผลเชิงคอมบินาทอริคอย่างในตัวอย่างข้างบนนี้ก็ได้ คือเพียงแต่ให้เหตุผลว่าสัมประสิทธิ์ของ $x^{n-k}y^k$ คือ $\binom{n}{k}$ หรืออาจพิสูจน์โดยการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ก็ได้ ในที่นี้จะละการพิสูจน์ไว้ให้เป็นแบบฝึกหัด

พิสูจน์(2) เป็นกรณีพิเศษของ (1) เพียงแต่แทน x ด้วย 1 และแทน y ด้วย x ใน (1) ก็จะได้ (2)

หมายเหตุ เราจะพบ C(n,k) หรือ $\binom{n}{k}$ ปรากฏในสัมประสิทธิ์ของผลคูณของทวินาม ดังนั้น เราจึงเรียก C(n,k) ว่า **สัมประสิทธิ์ทวินาม**

ตัวอย่าง 3.1.1 จงคูณกระจาย $(x-2y)^4$

วิธีทำ แทน y ในทฤษฎีบท 3.1.1(1) ด้วย -2y และแทน n ด้วย 4 จะได้

$$(x-2y)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^{4-1}(-2y) + \binom{4}{2}x^{4-2}(-2y)^2 + \binom{4}{3}x^{4-3}(-2y)^3 + \binom{4}{4}(-2y)^4$$

$$= x^4 + 4x^3(-2y) + 6x^2(-2y)^2 + 4x(-2y)^3 + (-2y)^4$$

$$= x^4 - 8x^3y + 24x^2y^2 - 32xy^3 + 16y^4$$ ■

ตัวอย่าง 3.1.2 จงหาสัมประสิทธิ์ของ $x^{10}y^{15}$ ใน $(x+y)^{25}$

วิธีทำ ในที่นี้ $n = 25$ และ $k = 15$ เนื่องจากสัมประสิทธิ์ของ $x^{n-k}y^k$ คือ $\binom{n}{k}$ ดังนั้น สัมประสิทธิ์ของ $x^{10}y^{15}$ คือ

$$\binom{25}{15} = \frac{25!}{15!(25-15)!} = \frac{25!}{15!10!}$$ ■

ตัวอย่าง 3.1.3 จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^2y^4 ใน $(x-2y)^6$

วิธีทำ ในที่นี้ $n = 6$ และ $k = 4$ สัมประสิทธิ์ทวินามที่คูณอยู่หน้า $x^2(-2y)^4$ คือ $\binom{6}{4} = 15$ ดังนั้น สัมประสิทธิ์ของ x^2y^4 คือ $15 \times (-2)^4 = 240$ ■

3.2 สูตรของปาสกาล
Pascal's Formula

สูตรจำนวนมากจะเกี่ยวข้องกับสัมประสิทธิ์ทวินาม เช่น สูตรของปาสกาลที่จะกล่าวถึงในหัวข้อนี้และสูตรการเลือกคณะกรรมการ ซึ่งจะกล่าวถึงต่อไปในหัวข้อ 3.4

ทฤษฎีบท 3.2.1 สูตรของปาสกาล

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad \text{เมื่อ } k < n}$$

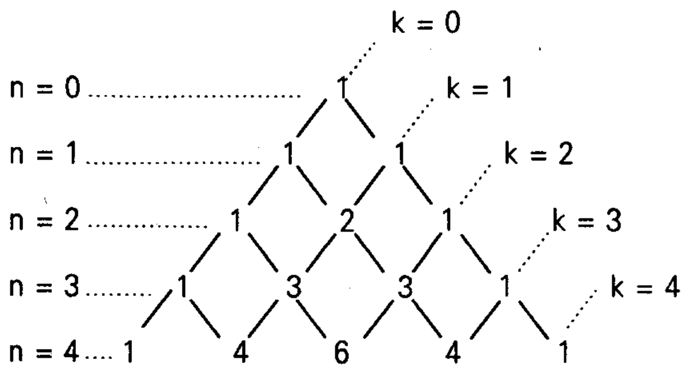
พิสูจน์ เรามีวิธีพิสูจน์สองวิธี วิธีหนึ่งอาศัยการคำนวณทางพีชคณิต นั่นคือ แทนค่าลงในสูตรของทั้งสองข้าง แล้วตรวจสอบดูว่าทั้งสองข้างเท่ากันหรือไม่ ในที่นี้จะขอเว้นไว้ให้นักศึกษาตรวจสอบเอง

วิธีที่เราจะพิสูจน์ในที่นี้ จะเป็นการพิสูจน์โดยการให้เหตุผลเชิงคอมบินาทอริค สมมุติให้ S เป็นเซตซึ่งมีสมาชิก n ตัว เลือกสมาชิก k ตัว จากเซต S จะเลือกได้แตกต่างกัน $\binom{n}{k}$ วิธี ซึ่งเป็นจำนวนทางซ้ายมือของสูตร เราอาจคิดในอีกแง่มุมหนึ่งดังนี้ สมมุติว่า x เป็นสมาชิกตัวหนึ่งในเซต S เราแบ่งวิธีเลือกสมาชิก k ตัวจากเซต S ออกเป็นสองพวก พวกหนึ่งคือพวกที่ไม่มี x อีกพวกหนึ่งคือพวกที่มี x การเลือกสมาชิก k ตัวที่ไม่มี x อยู่ด้วย จะเลือกได้ $\binom{n-1}{k}$ วิธี คือเลือก x ทิ้งไปก่อน แล้วจึงเลือกสมาชิก k ตัว จากจำนวนสมาชิก n-1 ตัวที่เหลือ การเลือกสมาชิก k ตัว ที่มี x อยู่ด้วย จะเลือกได้ $\binom{n-1}{k-1}$ วิธี คือ เลือก x มาก่อน แล้วจึงเลือกสมาชิกอีก k-1 ตัว จาก n-1 ตัว ที่เหลือ ดังนั้น ผลรวมของจำนวนวิธีในแต่ละพวกก็คือ จำนวนวิธีเลือกสมาชิก k ตัว จากเซต S ซึ่งก็คือจำนวนทางขวามือของสูตรนั่นเอง

เพื่อให้เข้าใจยิ่งขึ้นลองพิจารณาตัวอย่างเมื่อ n = 5, k = 3 และ S = {x,y,z,u,v} เลือกสมาชิกสามตัวจากเซต S เราแบ่งการเลือกอักษรสามตัวออกเป็นสองพวก คือพวกที่ไม่มี x ได้แก่ {y,z,u}, {y,z,v}, {y,u,v}, {z,u,v} ซึ่งได้จากการเลือกสมาชิก 3 ตัว จากเซต {y,z,u,v} ซึ่งเลือกได้ $\binom{n-1}{k} = \binom{5-1}{3} = \binom{4}{3}$ วิธี พวกที่มี x ได้แก่ {x,y,z}, {x,y,u}, {x,y,v}, {x,z,u}, {x,y,v}, {x,u,v} โดยขั้นแรกเลือก x มาใส่ไว้ก่อน แล้วจึงเลือกอีกสองตัวจากที่เหลือ คือเลือกสองตัวจาก {y,z,u,v} ซึ่งจะทำได้

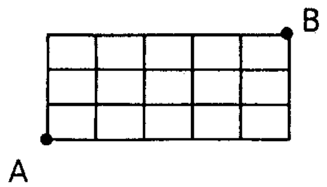
$\binom{n-1}{k-1} = \binom{5-1}{3-1} = \binom{4}{2}$ วิธี ดังนั้น จำนวนวิธีเลือกสมาชิกสามตัวจากทั้งหมดห้าตัวจะเท่ากับ $\binom{5}{3} = \binom{4}{3} + \binom{4}{2}$ วิธี

จากสูตรของปาสกาล เราสามารถสร้างสามเหลี่ยมข้างล่างนี้ได้ ซึ่งจะเรียกว่า **สามเหลี่ยมปาสกาล** (Pascal's Triangle)

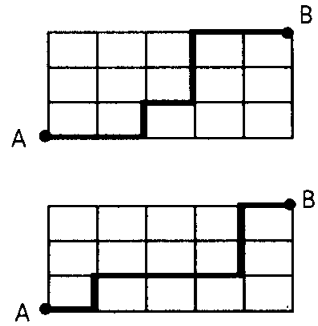


3.3 การเดินตามบล็อก
Block Walking

การเดินตามถนนที่มีลักษณะเป็นบล็อก ๆ ซึ่งเราจะเรียกว่าการเดินตามบล็อก การเดินตามบล็อกเป็นอีกเทคนิคหนึ่งที่จะช่วยในการพิสูจน์เอกลักษณ์บางเอกลักษณ์ รวมทั้งสูตรของปาสกาลด้วย การเดินตามบล็อก หมายถึง การเดินตามถนน ซึ่งมีลักษณะดังเช่นในรูปข้างล่างนี้



สมมุติให้ผังเมืองของเมืองหนึ่งมีลักษณะดังในรูป ให้ A เป็นจุดเริ่มต้น สมมุติว่าต้องการหาเส้นทางที่สั้นที่สุดจากจุดเริ่มต้น A ถึงจุด B อยากทราบว่าจะมีเส้นทางที่แตกต่างกันกี่เส้นทาง ในรูปสองรูปทางขวามือ แสดงตัวอย่างของเส้นทางที่สั้นที่สุดสองเส้นทางระหว่าง A และ B ถ้าแทนการเดินไปทางขวาด้วย R (right) และแทนการเดินขึ้นเหนือด้วย U (up) จะเห็นว่าเราสามารถอธิบายเส้นทางแต่ละเส้นด้วยลำดับของ R และ U เช่น อธิบายเส้นทางเดินในรูปบนด้วยลำดับ RRURUURR ส่วนเส้นทางเดินในรูปล่างอธิบายได้ด้วยลำดับ RURRRUUR ความยาวของลำดับจะเท่ากับความยาว (จำนวนบล็อกที่ต้องเดินทั้งหมด) ของเส้นทางจาก A ถึง B ซึ่งในตัวอย่างนี้เท่ากับ 8 ลำดับแต่ละลำดับซึ่งสมนัยกับเส้นทางแต่ละเส้นจะต้องประกอบด้วย R ห้าตัว และ U สามตัว ดังนั้นจำนวนลำดับที่แตกต่างกัน จะเท่ากับ C(8,3) คือเท่ากับจำนวนวิธีเลือกตำแหน่ง 3 ตำแหน่งเพื่อใส่ U แล้วใส่ R ในตำแหน่งที่เหลือ ลำดับแต่ละลำดับแทนเส้นทางหนึ่งเส้น ดังนั้น จำนวนเส้นทางจากจุด A ถึง B เท่ากับ C(8,3)

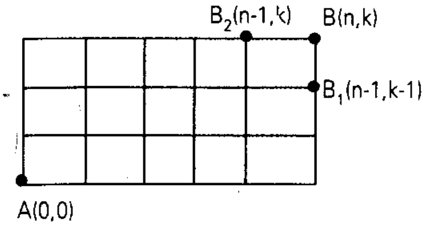


จอร์จ โพลยา (George Polya) เป็นนักคณิตศาสตร์คนแรกที่นำเอาแนวความคิดเกี่ยวกับการเดินตามบล็อกมาสัมพันธ์กับสัมประสิทธิ์ทวินาม C(n,k) ในกรณีทั่ว ๆ ไป เราจะแทนจุดตัดของถนนด้วยคู่ลำดับ (n,k) เมื่อ n คือความยาว (จำนวนบล็อก) ของระยะทางที่ต้องเดินทั้งหมด นับจากจุดเริ่มต้นถึงจุด (n,k) และ k คือระยะทางที่ต้องเดินขึ้น

เหนือทั้งหมด แทนจุดเริ่มต้นด้วย (0,0) การเดินจากจุดเริ่มต้น A(0,0) ถึงจุด B(n,k) ทำได้โดย

1) เดินจากจุด A(0,0) ถึงจุด B_1(n-1,k-1) แล้วเดินขึ้นเหนือต่ออีกหนึ่งบล็อก ซึ่งจะเดินได้แตกต่างกัน C(n-1,k-1) วิธี หรือ

2) เดินจากจุด A(0,0) ถึงจุด B_2(n-1,k) แล้วเดินต่อไปทางขวาอีกหนึ่งบล็อก ซึ่งจะเดินได้แตกต่างกัน C(n-1,k) วิธี



ดังนั้น จำนวนเส้นทางจากจุดเริ่มต้น A(0,0) ถึงจุด B(n,k) เท่ากับผลบวกของจำนวนเส้นทางในข้อ 1) และจำนวนเส้นทางในข้อ 2) นั่นคือ

$$C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k)$$

ซึ่งก็คือสูตรของปาสกาลนั่นเอง

3.4 เอกลักษณ์อื่น ๆ
Other Identities

เอกลักษณ์จำนวนมากเป็นผลสืบเนื่องมาจากทฤษฎีบททวินาม เอกลักษณ์ที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ เป็นเอกลักษณ์ที่มักพบเสมอ ๆ เอกลักษณ์เหล่านี้สามารถพิสูจน์ได้โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม สูตรของปาสกาล การเดินตามบล็อก หรือการให้เหตุผลเชิงคอมบินาทอริค เอกลักษณ์ที่จะพิจารณาในที่นี้ได้แก่

1. $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$ ซึ่งจะเรียกว่า **สูตรการเลือกคณะกรรมการ**

2. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n} = 2^n$

3. $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n} = 0$ หรือ

$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots = \binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots$

4. $\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$

5. $n(n+1)2^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$

6. $\binom{n+k+1}{k} = \binom{n+k}{k}+\binom{n+k-1}{k-1}+\binom{n+k-2}{k-2}+\cdots+\binom{n+1}{1}+\binom{n}{0}$

7. $\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\cdots+\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

8. $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$

พิสูจน์เอกลักษณ์ 1

เราจะพิสูจน์โดยการให้เหตุผลเชิงคอมบินาทอริค โดยจำลองวิธีคิดจากการเลือกคณะกรรมการ ทางซ้ายมือของเอกลักษณ์ นับวิธีเลือกคน k คน จากทั้งหมด n คน และในจำนวน k คนที่เลือกมานั้น เลือก m คน เพื่อเป็นคณะกรรมการดำเนินงาน ซึ่งจะทำได้ทั้งหมด $\binom{n}{k}\binom{k}{m}$ วิธี ส่วนทางขวามือของเอกลักษณ์นับจำนวนวิธีเลือกคณะกรรมการดำเนินงาน m คน จากทั้งหมด n คน ก่อน แล้วจึงค่อยเลือกอีก k-m คน จากที่เหลือ n-m คน ซึ่งจะเลือกได้ $\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$ วิธี ■

ถ้า m = 1 จะได้

$$\binom{n}{k}\binom{k}{1} = \binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1} \text{ หรือ } k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1} \text{ หรือ } \binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

พิสูจน์เอกลักษณ์ 2 เราจะแสดงวิธีพิสูจน์สองวิธีแตกต่างกัน

วิธีที่ 1 สมมุติให้ S เป็นเซตใด ๆ ซึ่งมีสมาชิก n ตัว เราจะพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้โดยการแสดงว่าจำนวนที่อยู่ทางซ้ายและจำนวนที่อยู่ทางขวาของเครื่องหมาย = เป็นจำนวนเซตย่อยของ S ทั้งสองจำนวน จะเห็นว่าจำนวนเซตย่อยซึ่งไม่มีสมาชิกคือ C(n,0) จำนวนเซตย่อยซึ่งมีสมาชิก 1 ตัวคือ C(n,1) จำนวนเซตย่อยซึ่งมีสมาชิก 2 ตัวคือ C(n,2), ... จำนวนเซตย่อยซึ่งมีสมาชิก n ตัวคือ C(n,n) ดังนั้น มีเซตย่อยของ S ทั้งหมด C(n,0)+C(n,1)+ ... + C(n,n) เซต ซึ่งเป็นจำนวนที่อยู่ทางซ้ายของเครื่องหมาย = ในเอกลักษณ์ 2

เราสามารถนับจำนวนเซตย่อยของ S ได้อีกแบบหนึ่ง นึกภาพว่าเรามีกล่องอยู่หนึ่งกล่อง ต้องเลือกสมาชิกในเซต S มาใส่ในกล่อง สมาชิกที่อยู่ในกล่องก็คือสมาชิกของเซตย่อย สมาชิกแต่ละตัวใน S มีโอกาสเป็นไปได้ 2 แบบ คือ ถูกเลือกมาใส่กล่องหรือไม่ถูกเลือกมาใส่กล่อง ดังนั้นจำนวนเซตย่อยทั้งหมดของเซต S จะเท่ากับ

$$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n} = 2^n$$

ดังนั้น 2^n = C(n,0) + C(n,1) + ... + C(n,n) ตามที่ต้องการพิสูจน์

วิธีที่ 2 จากทฤษฎีบททวินาม เรามี

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^n = (1+x)^n$$

แทนค่า x = 1 จะได้

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n \qquad \blacksquare$$

พิสูจน์เอกลักษณ์ 3

แทนค่า x = -1 ในทฤษฎีบททวินาม (2) จะได้

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n} = (1-1)^n = 0$$

พิสูจน์เอกลักษณ์ 4

จากทฤษฎีบททวินาม(2) หาอนุพันธ์ของทั้งสองข้างเทียบกับ x จะได้

$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}x+3\binom{n}{3}x^2+\cdots+n\binom{n}{n}x^{n-1} = n(1+x)^{n-1}$$

แทนค่า x = 1 เราได้

$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n} = n(1+1)^n = n2^{n-1} \qquad \blacksquare$$

พิสูจน์เอกลักษณ์ 5

เพื่อความสะดวก เราจะเขียนทฤษฎีบททวินาม (2) ใหม่ในรูปย่อ ดังนี้

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

หาอนุพันธ์ของทั้งสองข้างเทียบกับ x จะได้

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}$$

คูณทั้งสองข้างด้วย x จะได้

$$nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^k$$

หาอนุพันธ์ของทั้งสองข้างเทียบกับ x จะได้

$$n[(1+x)^{n-1} + x(n-1)(1+x)^{n-2}] = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^{k-1}$$

แทนค่า x = 1 จะพบว่า

$$n[2^{n-1} + (n-1)2^{n-2}] = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}$$

ดังนั้น $n(n+1)2^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}$ ■

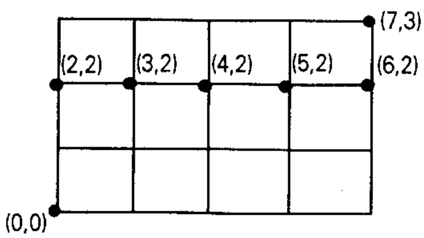
พิสูจน์เอกลักษณ์ 6

ใช้สูตรของปาสกาลซ้ำ ๆ กันจะได้

$$\begin{aligned}
\binom{n+k+1}{k} &= \binom{n+k}{k} + \binom{n+k}{k-1} \\
&= \binom{n+k}{k} + \binom{n+k-1}{k-1} + \binom{n+k-1}{k-2} \\
&= \binom{n+k}{k} + \binom{n+k-1}{k-1} + \binom{n+k-2}{k-2} + \binom{n+k-2}{k-3} \\
&\vdots \\
&= \binom{n+k}{k} + \binom{n+k-1}{k-1} + \binom{n+k-2}{k-2} + \cdots + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{0}
\end{aligned}$$

พิสูจน์เอกลักษณ์ 7

ในที่นี้จะพิสูจน์โดยใช้การเดินตามบล็อก เพื่อให้ง่ายต่อการอธิบาย ก่อนอื่นเราจะพิจารณากรณีเฉพาะเมื่อ n = 6 และ k = 2 การเดินจาก



จุด (0,0) ถึงจุด (7,3) ทำได้โดยเดินจากจุดเริ่มต้น (0,0) ผ่านจุด (2,2), (3,2), (4,2),

(5,2) หรือ (6,2) แล้วต่อจากนั้นจะต้องเดินขึ้นเหนือหนึ่งบล็อกแล้วเลี้ยวไปทางขวาตลอด ยกเว้นที่จุด (6,2) เช่น การเดินจากจุด (0,0) ถึงจุด (7,3) โดยผ่านจุด (2,2) ในขั้นตอนแรกจะต้องเดินจากจุด (0,0) ถึงจุด (2,2) ซึ่งจะเดินได้แตกต่างกัน $\binom{2}{2}$ วิธี ขั้นตอนที่สอง จะต้องเดินจากจุด (2,2) ต่อไปยังจุด (7,3) ซึ่งทำได้เพียงวิธีเดียว คือเดินขึ้นเหนือหนึ่งบล็อกแล้วเลี้ยวไปทางขวา 4 บล็อกก็จะถึงจุด (7,3) ดังนั้นจำนวนวิธีเดินจากจุด (0,0) ถึงจุด (7,3) โดยผ่านจุด (2,2) เดินได้แตกต่างกัน $\binom{2}{2}$ วิธี ในทำนองเดียวกันการเดินจากจุด (0,0) ถึงจุด (7,3) โดยผ่านจุด (k,2) เมื่อ k = 3,4,5 หรือ 6 จะมีวิธีเดินที่แตกต่างกัน $\binom{k}{2}$ วิธี ดังนั้นจำนวนวิธีเดินจากจุด (0,0) ถึงจุด (7,3) จะเท่ากับผลบวกต่อไปนี้

จำนวนวิธีเดินจากจุด (0,0) ถึงจุด (7,3) โดยผ่านจุด (2,2) + จำนวนวิธีเดินจากจุด (0,0) ถึงจุด (7,3) โดยผ่านจุด (3,2) + ... + จำนวนวิธีเดินจากจุด (0,0) ถึงจุด (7,3) โดยผ่านจุด (6,2) นั่นคือ

$$\binom{7}{3} = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{6}{2}$$

ในกรณีทั่วไป การเดินจากจุด (0,0) ถึงจุด (n+1,k+1) ซึ่งเดินได้แตกต่างกัน $\binom{n+1}{k+1}$ วิธี ถ้าแบ่งการเดินเป็นสองตอน ตอนแรกเดินจากจุด (0,0) ถึงจุด (t,k) เมื่อ t = k , k + 1 ,..., n ซึ่งเดินได้ $\binom{t}{k}$ วิธี ตอนที่สองเดินจากจุด (t,k) ถึงจุด (n,k) โดยเดินขึ้นเหนือหนึ่งบล็อกแล้วเลี้ยวไปทางขวาตลอดทางที่เหลือ ซึ่งเป็นวิธีเดียวเท่านั้นสำหรับการเดินตอนที่สองนี้ ดังนั้นเราได้

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+ \cdots +\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} \qquad \blacksquare$$

พิสูจน์เอกลักษณ์ 8

ในที่นี้จะแสดงวิธีพิสูจน์ที่แตกต่างกัน 3 วิธี

วิธีที่ 1 พิจารณาผลคูณต่อไปนี้

$$(1+x)^n(1+x^{-1})^n = (1+x)^n(1+x)^n x^{-n} = x^{-n}(1+x)^{2n}$$

$$= x^{-n}\left[\binom{2n}{0} + \binom{2n}{1}x + \binom{2n}{2}x^2 + \cdots + \binom{2n}{n}x^n + \cdots + \binom{2n}{2n}x^{2n}\right]$$

คูณแต่ละพจน์ในวงเล็บด้วย x^{-n} จะเห็นว่า พจน์ที่เป็นค่าคงตัวในผลคูณข้างบนนี้มีเพียงพจน์เดียว คือพจน์ที่เกิดจากการคูณระหว่าง x^{-n} และ $\binom{2n}{n}x^n$ ซึ่งจะได้ผลลัพธ์เป็นค่าคงตัว $\binom{2n}{n}$ ดังนั้น พจน์ที่มีค่าคงตัวของ $(1+x)^n(1+x^{-1})^n$ คือ $\binom{2n}{n}$ ต่อไปจะพิจารณาผลคูณในอีกรูปแบบหนึ่ง ดังนี้

$$(1+x)^n(1+x^{-1})^n =$$

$$\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^n\right]\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x^{-1}+\binom{n}{2}x^{-2}+\cdots+\binom{n}{n}x^{-n}\right]$$

จะพบว่าจำนวนที่เป็นค่าคงตัวในผลคูณข้างบนนี้คือ

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2$$

ดังนั้น $$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

วิธีที่ 2 จะแสดงโดยการให้เหตุผลเชิงคอมบินาทอริค การเลือกของ n สิ่งจากของทั้งหมด 2n สิ่ง จะมีวิธีเลือกได้ $\binom{2n}{n}$ วิธี ในอีกแง่มุมหนึ่ง การเลือกของ n สิ่งจากของทั้งหมด 2n สิ่งนั้น ทำได้โดยแบ่งของ 2n สิ่ง

เป็น สองกลุ่ม ๆ ละ n สิ่ง เท่า ๆ กัน การเลือกของ n สิ่งจากทั้งหมด 2n สิ่ง ทำได้โดยเลือก k สิ่งจากกลุ่มแรกและเลือกอีก n-k สิ่งจากกลุ่มที่ 2 เมื่อ k = 0, 1, 2, ..., n เช่น ถ้าไม่เลือกของจากกลุ่มแรก นั่นคือเลือก 0 สิ่งจากกลุ่มแรก จะต้องเลือก n สิ่งจากกลุ่มที่ 2 ถ้าเลือกหนึ่งสิ่งจากกลุ่มแรก จะต้องเลือก n -1 สิ่งจากกลุ่มที่ 2 เป็นต้น ดังนั้นจำนวนวิธีเลือกของ n สิ่งจากทั้งหมด 2n สิ่ง เท่ากับ

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} &= \binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\binom{n}{2}\binom{n}{n-2}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{0}\\ &= \binom{n}{0}\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{n}\\ &= \binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2\end{aligned}$$

วิธีที่ 3 เราจะพิสูจน์โดยใช้การเดินตามบล็อก ผู้อ่านคงยังจำได้ว่าสัญลักษณ์ (n,k) หมายถึงจุดที่อยู่ห่างจากจุดเริ่มต้น (0,0) เป็นระยะทาง n บล็อก และ k คือจำนวนครั้งที่จะต้องเดินขึ้นเหนือ ในทำนองเดียวกัน (2n,n) คือจุดซึ่งอยู่ห่างจากจุด (0,0) เป็นระยะ 2n บล็อก และถ้าเดินจากจุด (0,0) ถึงจุด (2n,n) จะต้องเดินขึ้นเหนือทั้งหมด n บล็อก ดังนั้นถ้าเดินจากจุด (n,k) ถึงจุด (2n,n) ระยะทางที่ต้องเดินทั้งหมดจะเท่ากับ 2n - n = n บล็อก และจำนวนบล็อกที่ต้องเดินขึ้นเหนือทั้งหมดจะเท่ากับ n - k บล็อก นั่นคือ จำนวนวิธีเดินจากจุด (n,k) ถึงจุด (2n,n) เท่ากับ $\binom{n}{n-k}$ การเดินจากจุด (0,0) ถึงจุด (2n,n) มีวิธีเดินได้แตกต่างกัน $\binom{2n}{n}$ วิธี ถ้าคิดในอีกแง่มุมหนึ่ง เราแบ่งการเดินจากจุด (0,0) ถึงจุด (2n,n) ออกเป็นสองขั้นตอน ขั้นตอนแรกเดินจากจุด (0,0) ถึงจุด (n,k) ซึ่งเดินได้แตกต่าง

กัน $\binom{n}{k}$ วิธี เมื่อ k = 0, 1, 2,..., n ขั้นตอนที่สอง จะต้องเดินจากจุด (n,k) ต่อไปจนถึงจุด (2n,n) ซึ่งจะมีวิธีเดินได้แตกต่างกัน $\binom{n}{n-k}$ วิธี ดังนั้น จำนวนวิธีเดินจากจุด (0,0) ถึงจุด (n,k) และจากจุด (n,k) ถึงจุด (2n,n) เท่ากับ

$$\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}\binom{n}{k} = \binom{n}{k}^2$$

เมื่อ k = 0, 1, 2,..., n ดังนั้น

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

เนื่องจากทั้งสองข้างของเอกลักษณ์บ่งถึงจำนวนวิธีเดินจากจุด (0,0) ถึงจุด (2n,n) ทั้งคู่ ■

ตัวอย่างการพิสูจน์เอกลักษณ์โดยใช้เทคนิคต่าง ๆ กันข้างบนนี้พอจะเป็นแนวทางให้นักศึกษารู้จักนำเทคนิคเหล่านี้ไปใช้ในการพิสูจน์เอกลักษณ์อื่น ๆ ได้โดยง่าย ในลำดับต่อไปจะยกตัวอย่างการนำเอกลักษณ์บางเอกลักษณ์ไปใช้ในการหาผลบวกของพจน์ที่มีลักษณะใกล้เคียงกับสัมประสิทธิ์ทวินาม หรือสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสัมประสิทธิ์ทวินามได้

ตัวอย่าง 3.4.1 จงหาผลบวกของ 1 + 2 + 3 +...+ n

วิธีทำ เขียนในรูปสัมประสิทธิ์ทวินามจะได้

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \cdots + \binom{n}{1}$$

$$= \binom{n+1}{2} \quad \text{ใช้เอกลักษณ์ 7}$$

$$= \frac{(n+1)!}{2!(n+1-2)!} = \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} = \frac{n(n+1)}{2}$$ ■

ตัวอย่าง 3.4.2 จงหาผลบวกของ

$$1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \cdots + (n-2)(n-1)n$$

วิธีทำ จะเห็นว่าแต่ละพจน์ในผลบวกอยู่ในรูป (k-2)(k-1)k ซึ่งเท่ากับ

$$P(k,3) = \frac{k!}{(k-3)!}$$

แต่เนื่องจาก

$$\frac{P(k,3)}{3!} = \frac{k!}{3!(k-3)!} = \binom{k}{3} \quad \text{หรือ} \quad P(k,3) = 3!\binom{k}{3}$$

ดังนั้น เมื่อเขียนผลบวกที่กำหนดให้ใหม่ในรูป $3!\binom{k}{3}$ สำหรับ k = 3,4,....,n จะได้

$$3!\binom{3}{3} + 3!\binom{4}{3} + \cdots + 3!\binom{n}{3} = 3!\left[\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \cdots + \binom{n}{3}\right]$$

ใช้เอกลักษณ์ 7 กับจำนวนทางขวามือของสมการข้างบนนี้ เราได้ $3!\binom{n+1}{4}$ ดังนั้น

$$1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \cdots + (n-2)(n-1)n = 3!\binom{n+1}{4}$$ ■

แบบฝึกหัด

1. จงกระจาย $(x + y)^5$ และ $(x + y)^6$ โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม
2. จงกระจาย $(2x - y)^7$ โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม
3. จงหาสัมประสิทธิ์ของพจน์ x^5y^{13} ในการกระจาย $(3x - 2y)^{18}$
4. จงหาสัมประสิทธิ์ของพจน์ x^{23} ในการกระจาย $(1 + x^5)^{100}$

5. จงพิสูจน์ทฤษฎีบททวินามโดยใช้การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

6. จงหาผลบวกในแต่ละข้อต่อไปนี้โดยการแทนค่า x ที่เหมาะสมในทฤษฎีบททวินาม

ก. $\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$ ข. $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$ ค. $\sum_{k=0}^{n} k3^k \binom{n}{k}$

7. จงพิสูจน์ $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{q} = 2^{n-1}$ สำหรับ q = n เมื่อ n เป็นเลขคี่ และ q = n-1 เมื่อ n เป็นเลขคู่

8. จงพิสูจน์

$$\binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \cdots + \binom{m}{k}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{k}$$

9. จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^n ในการกระจาย

$$(1+x)^{2n} + x(1+x)^{2n-1} + x^2(1+x)^{2n-2} + \ldots + x^n(1+x)^n$$

10. จงพิสูจน์ว่า $\sum_{k=0}^{n} 3^k \binom{n}{k} = 4^n$