2 หลักการนับเบื้องต้น
Basic Counting Principles

ผู้อ่านคงจะคุ้นเคยกับปัญหาเกี่ยวกับการนับมาบ้างแล้วไม่มากก็น้อย ในการศึกษาสมบัติของวัตถุนั้น นักฟิสิกส์อาจต้องการรู้จำนวนวิธีการจัดเรียงของโมเลกุลหรืออาจต้องการคำนวณหาจำนวนวิธีกระจายตัวของอิเล็กตรอนในระดับพลังงานต่าง ๆ กัน ผู้ว่าการรถไฟอาจต้องการหาจำนวนตารางเวลารถไฟที่เป็นไปได้ทั้งหมด กรมไปรษณีย์โทรเลขอาจต้องการนับจำนวนรหัสซึ่งประกอบด้วยการเรียงสลับที่ของจุด · และขีด - ส่วนนักคอมพิวเตอร์อาจต้องการนับจำนวนชื่อแฟ้มข้อมูลซึ่งประกอบด้วยอักขระไม่เกิน 8 ตัว ว่ามีแตกต่างกันได้กี่ชื่อ จะเห็นว่างานเกือบทุกประเภทจะต้องเกี่ยวข้องกับการนับ ดังนั้นการนับจึงเป็นสิ่งสำคัญมากต่อกิจกรรมต่าง ๆ รอบตัวเรา ในบทนี้เราจะศึกษาเกี่ยวกับหลักสำคัญ ๆ ที่ใช้ในการนับ โดยจะเริ่มต้นด้วยหลักการบวกและหลักการคูณ ซึ่งเป็นหลักพื้นฐานของการนับ

2.1 หลักการบวกและหลักการคูณ Addition and Multiplication Principles

หลักพื้นฐานสำหรับการนับสองหลัก ซึ่งเป็นหลักง่าย ๆ ที่เราจะต้องอ้างถึงเสมอ ๆ ได้แก่หลักการบวก และหลักการคูณ

หลักการบวก (The Addition Principle)

งานอย่างหนึ่งมีวิธีทำได้ p วิธีแตกต่างกัน งานอย่างสองมีวิธีทำได้ q วิธีแตกต่างกัน งานทั้งสองอย่างนี้ไม่สามารถทำร่วมกันได้ ถ้าต้องการทำงานอย่างที่หนึ่งหรืออย่างที่สองเพียงอย่างเดียว จะมีวิธีทำได้ p+q วิธีแตกต่างกัน

ตัวอย่าง 2.1.1 มหาวิทยาลัยแห่งหนึ่ง มีนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ 25 คน และมีนักศึกษาวิชาเอกคอมพิวเตอร์ 53 คน ถ้าต้องการเลือกนักศึกษาหนึ่งคนเพื่อร่วมเป็นคณะกรรมการของมหาวิทยาลัย จะมีวิธีเลือกนักศึกษาได้แตกต่างกันกี่วิธี

วิธีทำ งานแรกคือ เลือกนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ ซึ่งจะเลือกได้ 25 วิธี เพราะมีนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ทั้งหมด 25 คน งานที่สองคือเลือกนักศึกษาวิชาเอกคอมพิวเตอร์ ซึ่งจะเลือกได้ 53 วิธี เพราะมีนักศึกษาวิชาเอกคอมพิวเตอร์ทั้งหมด 53 คน จากหลักการบวก ถ้าต้องการเลือกนักศึกษาเพียงคนเดียว จะมีวิธีเลือกได้ 25+53 =78 วิธี ▩

เราอาจพูดถึงหลักการบวกในความหมายของเซตได้ดังนี้ เซตหนึ่งมีของ p สิ่งแตกต่างกัน อีกเซตหนึ่งมีของ q สิ่งแตกต่างกัน เซตทั้ง

สองนี้ไม่มีสมาชิกร่วมกันเลย ถ้าต้องการเลือกของสิ่งหนึ่งจากเซตแรก หรือเซตที่สอง จะมีวิธีเลือกได้แตกต่างกัน p+q วิธี

ตัวอย่าง 2.1.2 ให้เซต A = {a, b, c, d} และ B = {α, β, γ} ต้องการเลือกอักษรหนึ่งตัวจากเซต A หรือเซต B จะมีวิธีเลือกได้กี่วิธี

วิธีทำ งานแรกคือ เลือกอักษรจากเซต A ซึ่งเลือกได้ 4 วิธี คือเลือก a, b, c หรือ d งานที่สองคือเลือกอักษรจากเซต B ซึ่งเลือกได้ 3 วิธี คือเลือก α , β หรือ γ ดังนั้น ถ้าต้องการเลือกอักษรเพียงตัวเดียวจากเซต A หรือเซต B จะมีวิธีเลือกได้แตกต่างกัน 4+3=7 วิธี คือเลือก a , b , c , d , α , β หรือ γ ■

หลักการบวกที่กล่าวข้างต้นนี้ ใช้ในกรณีที่มีงานเพียงสองงานเท่านั้น ในกรณีทั่ว ๆ ไป จำนวนงานอาจมีได้มากกว่าสองงานก็ได้ เช่น ถ้ามี m งาน ซึ่งไม่มีงานใดที่ทำร่วมกับงานอื่นได้ สมมุติว่างานที่หนึ่งมีวิธีทำได้ r_1 วิธี งานที่สองมีวิธีทำได้ r_2 วิธี งานที่สามมีวิธีทำได้ r_3 วิธี ... และงานที่ m มีวิธีทำได้ r_m วิธี ดังนั้น จะมีวิธีทำงานอย่างใดอย่างหนึ่งได้แตกต่างกัน $r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_m$ วิธี

หลักการคูณ (The Multiplication Principle)

กระบวนการทำงานอย่างหนึ่งประกอบด้วยขั้นตอนย่อย ๆ สองขั้นตอน โดยขั้นตอนแรกมีวิธีทำได้แตกต่างกัน p วิธี ขั้นตอนที่สองมีวิธีทำได้แตกต่างกัน q วิธี ขั้นตอนทั้งสองนี้ไม่สามารถทำร่วมกันได้ จะมีวิธีทำงานนี้ได้แตกต่างกัน pq วิธี

ตัวอย่าง 2.1.3 มหาวิทยาลัยแห่งหนึ่ง มีนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ 25 คน และนักศึกษาวิชาเอกคอมพิวเตอร์ 53 คน ต้องการเลือกนักศึกษาสองคนจากวิชาเอกละหนึ่งคนเพื่อร่วมเป็นคณะกรรมการของมหาวิทยาลัย จะมีวิธีเลือกนักศึกษาได้แตกต่างกันกี่วิธี

วิธีทำ การเลือกนักศึกษามีสองขั้นตอนเพราะต้องการนักศึกษาที่เป็นตัวแทนสองคน ขั้นตอนแรก เลือกนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์หนึ่งคนซึ่งมีวิธีเลือกได้ 25 วิธี ขั้นตอนที่สอง เลือกนักศึกษาวิชาเอกคอมพิวเตอร์หนึ่งคน ซึ่งมีวิธีเลือกได้ 53 วิธี การกระทำทั้งสองขั้นตอนนี้จะต้องกระทำต่อเนื่องกัน จึงจะได้ตัวแทนครบสองคนตามต้องการ ดังนั้น การเลือกนักศึกษาสองคนทำได้ $25 \times 53 = 1325$ วิธี แตกต่างกัน ■

เราอาจพูดถึงหลักการคูณในความหมายของเซตได้ดังนี้ เซตหนึ่งมีของ p สิ่งแตกต่างกัน อีกเซตหนึ่งมีของ q สิ่งแตกต่างกัน เซตทั้งสองนี้ไม่มีสมาชิกร่วมกันเลย ถ้าต้องการเลือกของสองสิ่งโดยที่สิ่งหนึ่งเลือกจากเซตแรกและอีกสิ่งหนึ่งเลือกจากเซตที่สอง จะมีวิธีเลือกของสองสิ่งได้แตกต่างกัน $p \times q$ วิธี

ตัวอย่าง 2.1.4 ให้ $A = \{a, b, c, d\}$ และ $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ ต้องการเลือกอักษร 2 ตัวจากเซต A และเซต B โดยที่ตัวหนึ่งเลือกมาจากเซต A อีกตัวหนึ่งเลือกมาจากเซต B จะมีวิธีเลือกได้แตกต่างกันกี่วิธี

วิธีทำ การเลือกอักษรสองตัว เป็นการกระทำซึ่งสามารถแยกออกได้เป็นสองขั้นตอน ขั้นตอนแรก เลือกอักษรหนึ่งตัวจากเซต A ขั้นตอนที่สอง เลือกอักษรหนึ่งตัวจากเซต B การกระทำทั้งสองขั้นตอนนี้จะต้องกระทำต่อเนื่องกันจึงจะได้อักษรครบสองตัวตามต้องการ ขั้นตอนแรกเลือกทำ

ได้ 4 วิธี คือเลือก a, b, c หรือ d ขั้นตอนที่สองเลือกทำได้ 3 วิธี คือเลือก α , β หรือ γ ดังนั้น จากหลักการคูณ จำนวนวิธีเลือกอักษรสองตัวจึงเท่ากับ 4x3 = 12 วิธี ซึ่งได้แก่ $a\alpha$, $a\beta$, $a\gamma$, $b\alpha$, $b\beta$, $b\gamma$, $c\alpha$, $c\beta$, $c\gamma$, $d\alpha$, $d\beta$ หรือ $d\gamma$ ■

ในกรณีทั่ว ๆ ไป ถ้ากระบวนการทำงานอย่างหนึ่งสามารถแยกการกระทำออกได้เป็น m ขั้นตอนต่อเนื่องกัน โดยขั้นตอนแรกมีวิธีทำได้ r_1 วิธี ขั้นตอนที่สองมีวิธีทำได้ r_2 วิธี ขั้นตอนที่สามมีวิธีทำได้ r_3 วิธี ... ขั้นตอนที่ m มีวิธีทำได้ r_m วิธี แล้วการกระทำดังกล่าวจะเลือกทำได้แตกต่างกัน $r_1 \times r_2 \times r_3 \times \ldots \times r_m$ วิธี

ตัวอย่าง 2.1.5 จำนวนเต็มคี่ที่อยู่ระหว่าง 1000 และ 10000 ซึ่งมีเลขในแต่ละหลักแตกต่างกัน มีทั้งหมดกี่จำนวน

วิธีทำ จำนวนเต็มคี่ที่อยู่ระหว่าง 1000 และ 10000 จะต้องเป็นจำนวนเต็มที่ประกอบด้วยเลข 4 หลัก คือจะต้องมีหลักหน่วย หลักสิบ หลักร้อย และหลักพัน เรียงกันดังในภาพข้างล่างนี้

8วิธี	8วิธี	7วิธี	5วิธี
หลักพัน	หลักร้อย	หลักสิบ	หลักหน่วย

โดยเลขในหลักพันจะเป็น 0 ไม่ได้ เพราะถ้าขึ้นต้นด้วย 0 แล้วจำนวนเต็มจำนวนนั้นจะน้อยกว่า 1000 จะไม่อยู่ในช่วง 1000 ถึง 10000 เนื่องจากเราต้องการนับเฉพาะจำนวนที่เป็นเลขคี่ ดังนั้นตัวเลขที่จะเลือกใส่ในตำแหน่งหลักหน่วยมีได้เพียง 5 ตัว คือ 1,3,5,7 หรือ 9 ตัวเลขที่จะเลือกใส่ในแต่ละหลักมีทั้งหมด 10 ตัว คือ 0,1,2,3,4,5,6,7,8 และ 9 หลัง

จากที่เลือกตัวเลขใส่ในหลักหน่วยแล้ว จะเหลือตัวเลขเพียง 8 ตัวที่จะเลือกใส่ในหลักพัน ทั้งนี้เพราะตัวเลขในหลักพันจะเป็น 0 หรือเหมือนกับตัวเลขในหลักหน่วยไม่ได้ ดังนั้นจึงมีวิธีเลือกตัวเลขใส่ในหลักพันได้ 8 วิธี ตัวเลขในหลักร้อยจะเป็นตัวเลขใดก็ได้ แต่ต้องไม่เหมือนกับตัวเลขในหลักหน่วยและหลักพันที่เลือกไปแล้ว ดังนั้นจะมีวิธีเลือกตัวเลขใส่ในหลักร้อยได้เพียง 8 วิธี เท่านั้น ในทำนองเดียวกัน ตัวเลขในหลักสิบจะเหมือนตัวเลขในหลักหน่วย หลักร้อยและหลักพันไม่ได้ จึงมีวิธีเลือกเลขใส่ในหลักสิบได้เพียง 7 วิธี การเลือกตัวเลขใส่ในหลักหน่วย หลักพัน หลักร้อย และหลักสิบตามลำดับนั้น เป็นการกระทำซึ่งจะต้องทำต่อเนื่องกัน ดังนั้น จากหลักการคูณ จำนวนเลขคี่ที่อยู่ระหว่าง 1000 และ 10000 มีทั้งหมด $8 \times 8 \times 7 \times 5 = 2240$ จำนวน ∎

ข้อสังเกต การหาจำนวนเต็มคี่ที่อยู่ระหว่าง 1000 และ 10000 ในตัวอย่าง 2.1.5 นั้น สามารถแบ่งการกระทำออกได้เป็น 4 ขั้นตอนต่อเนื่องกัน คือ

ขั้นตอนที่ 1 เลือกตัวเลขใส่ในหลักหน่วยซึ่งทำได้ 5 วิธี
ขั้นตอนที่ 2 เลือกตัวเลขใส่ในหลักพันซึ่งทำได้ 8 วิธี
ขั้นตอนที่ 3 เลือกตัวเลขใส่ในหลักร้อย ซึ่งทำได้ 8 วิธี
ขั้นตอนที่ 4 เลือกตัวเลขใส่ในหลักสิบ ซึ่งทำได้ 7 วิธี

ผู้อ่านบางท่านอาจสงสัยว่าจะทำขั้นตอนที่ 3 หรือ 4 ก่อนขั้นตอนที่ 2 ได้หรือไม่ คำตอบคือ การกระทำเช่นนั้นจะทำให้ปัญหาซับซ้อนขึ้น เช่นถ้าทำขั้นตอนที่ 3 ก่อนขั้นตอนที่ 2 นั่นคือ เลือกเลขใส่ในหลักร้อยก่อนแล้วจึงเลือกเลขใส่ในหลักพัน เลขที่เลือกใส่ในหลักร้อยอาจเป็น 0 หรือไม่ใช่ 0 ก็ได้ ถ้าเป็น 0 จะเหลือตัวเลขที่จะเลือกใส่ใน

หลักพันได้ 8 ตัว คือเลขอะไรก็ได้ที่นอกเหนือจาก 0 และเลขในหลักหน่วย ถ้าตัวเลขในหลักร้อยไม่ใช่ 0 จะเหลือตัวเลขที่จะเลือกใส่ในหลักพันเพียง 7 ตัว คือจะเป็นอะไรก็ได้ที่ไม่ใช่ 0 และไม่เหมือนกับเลขในหลักร้อยและหลักหน่วย ซึ่งเห็นได้ชัดว่าวิธีนี้จะก่อให้เกิดความซับซ้อน เพราะจะต้องแยกพิจารณาเป็นกรณีย่อยเพิ่มขึ้นอีก จึงไม่แนะนำให้ทำวิธีนี้

ในลำดับต่อไปเราจะศึกษาเรื่องการจัดสิ่งของ การจัดสิ่งของแบ่งเป็น 2 ประเภท คือการจัดเรียง ซึ่งคำนึงถึงลำดับของสิ่งของ การจัดอีกประเภทหนึ่งคือการจัดหมู่หรือการเลือก โดยไม่คำนึงถึงลำดับของสิ่งของ เราจะใช้คำว่า "การเลือก" และ "การจัดเรียง" ในความหมายที่ใช้อยู่ตามปกติ ดังนั้น ผู้อ่านจึงไม่ควรสับสนในความหมายของข้อความ เช่น "**การเลือกผู้แทน 2 คน จากผู้สมัครทั้งหมด 5 คน**" หรือ "**การจัดหนังสือ 5 เล่มขึ้นเรียงบนชั้น**" ในข้อความแรกเราไม่คำนึงถึงลำดับของผู้แทน 2 คนที่เลือก จะเลือกใครก่อนหรือหลังในจำนวน 2 คนนี้ จะถือว่าเป็นการเลือกวิธีเดียวกัน สำหรับข้อความหลังนั้น คำนึงถึงลำดับของหนังสือที่ถูกจัดขึ้นเรียงบนชั้น ถ้ามีการสลับที่ระหว่างหนังสือใด ๆ ใน 5 เล่มนั้น จะถือว่าเป็นการจัดอีกวิธีหนึ่งที่แตกต่างไปจากวิธีเดิม ในหัวข้อต่อไปเราจะศึกษาในรายละเอียดเรื่องการจัดเรียง

2.2 การจัดเรียง

Arrangement

ให้ S = {a, b, c} นำสมาชิกของ S มาจัดเรียงทีละสองตัว จะจัดเรียงได้แตกต่างกัน 6 วิธี คือ

ab, ba, ac, ca, bc และ cb

จะเห็นว่าลำดับของสมาชิกมีบทบาทในการจัดเรียง คือเมื่อสลับที่ของสมาชิก จะได้การจัดเรียงแบบใหม่ที่ต่างไปจากเดิม ในกรณีทั่ว ๆ ไป ถ้า S เป็นเซตซึ่งมีสมาชิก n ตัว แตกต่างกัน นำสมาชิกของ S มาจัดเรียงทีละ k ตัว จะเรียกการจัดเรียงแต่ละแบบว่า **k-เพอร์มิวเทชันของ S** และจะใช้สัญญลักษณ์ P(n, k) แทน จำนวน k-เพอร์มิวเทชันของเซต S นั่นคือ P(n,k) แทนจำนวนวิธีจัดเรียงสิ่งของทีละ k สิ่ง จากของทั้งหมด n สิ่ง

หมายเหตุ บางตำราใช้สัญญลักษณ์ ${}^{n}P_{k}$ แทน P(n,k)

การจัดเรียงสิ่งของทีละ k สิ่ง จากของ n สิ่ง แต่ละแบบจะมีลักษณะดังในรูปข้างล่าง

n วิธี	n-1 วิธี	n-2 วิธี	...	n-k+1 วิธี
ตำแหน่งที่ 1	ตำแหน่งที่ 2	ตำแหน่งที่ 3		ตำแหน่งที่ k

เลือกของใส่ในตำแหน่งแรกได้ n วิธี เพราะมีของ n สิ่ง หลังจากเลือกของใส่ในตำแหน่งแรกแล้ว จะเหลือของ n-1 สิ่ง ที่จะเลือกใส่ในตำแหน่งที่สอง ได้ n-1 วิธี หลังจากเลือกของใส่ในตำแหน่งที่สองแล้ว จะเหลือของ n-2 สิ่ง ที่จะเลือกใส่ในตำแหน่งที่สามได้ n-2 วิธี ทำเช่นเดียวกันนี้ไปเรื่อย ๆ ในที่สุดจะเหลือของ n-(k-1) หรือ n-k+1 สิ่ง ที่จะเลือกใส่ในตำแหน่งสุดท้ายคือตำแหน่งที่ k ได้ n-k+1 วิธี โดยอาศัยหลักการคูณเราได้

P(n,k) = จำนวนวิธีจัดเรียงของทีละ k สิ่งจากของ n สิ่ง

$= n(n-1)(n-2) \ldots (n-k+1)$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\cdots \times 2\times 1}{(n-k)(n-k-1)\cdots \times 2\times 1}$$

แทน n(n-1)(n-2) ... x2x1 ด้วย n! เราได้

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

> การจัดเรียงสิ่งของที่ละ k สิ่ง จากของทั้งหมด n สิ่ง จะจัดเรียงได้
>
> $$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} \text{ วิธี}$$

เนื่องจาก 0! = 1 ดังนั้น จะพบว่า

$$P(n,0) = \frac{n!}{n!} = 1 \quad \text{และ} \quad P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = n$$

ตัวอย่าง 2.2.1 จงหาจำนวนคำซึ่งมีความยาว 4 ตัวอักษร โดยที่ตัวอักษรทั้ง 4 ตัว จะต้องมาจากเซต {a, b, c, d, e}

วิธีทำ คำแต่ละคำเกิดจากการนำอักษรซึ่งมีทั้งหมด 5 ตัวมาจัดเรียงลำดับที่ละ 4 ตัว จะได้จำนวนคำที่แตกต่างกัน $P(5,4) = \frac{5!}{(5-4)!} =$ 120 คำ ■

ตัวอย่าง 2.2.2 จัดคน 6 คน เข้านั่งเรียงในแนวเส้นตรงได้กี่วิธี

วิธีทำ ในที่นี้ n = 6 และ k = 6 คือ มีคน 6 คน นำมาจัดเรียงทีละ 6 คน ซึ่งจัดได้ P(6,6) = 6! = 6x5x4x3x2x1 = 720 วิธี ■

ตัวอย่าง 2.2.3 จัดสามี-ภรรยา 3 คู่ เข้านั่งเรียงแถวได้กี่วิธี ถ้า

ก. หัวแถวและท้ายแถวต้องเป็นผู้ชาย

ข. ภรรยาต้องนั่งติดกับสามี

วิธีทำ ก. ขั้นแรกจัดสามี 2 คน จากทั้งหมด 3 คน เข้านั่งหัวแถวและท้ายแถว ซึ่งจัดได้ P(3,2) วิธี ขั้นที่สอง จัดคน 4 คน ที่เหลือ (สามี 1 คน และภรรยา 3 คน) เข้านั่งในที่นั่ง 4 ที่ ที่เหลือ ซึ่งจัดได้ P(4,4) วิธี จากหลักการคูณ จะได้จำนวนวิธีจัดทั้งหมด P(3,2)xP(4,4) = 6x24 = 144 วิธี

วิธีทำ ข. ขั้นแรก จัดสามี 3 คน นั่งเรียงสลับกัน ซึ่งจัดเรียงได้แตกต่างกัน P(3,3) วิธี ขั้นที่สองจัดภรรยาคนแรกเข้านั่งที่ได้ 2 วิธี คืออยู่ทางซ้ายหรืออยู่ทางขวาของสามีตนเอง จัดภรรยาคนที่สองเข้านั่งที่ได้ 2 วิธี และจัดภรรยาคนที่สามเข้านั่งที่ได้ 2 วิธี เช่นกัน ดังนั้น จากหลักการคูณ จำนวนวิธีจัดเรียงสามี-ภรรยา 3 คู่ โดยมีสามี-ภรรยานั่งติดกัน เท่ากับ P(3,3)x2x2x2 = 6x2x2x2 = 48 วิธี ■

ตัวอย่าง 2.2.4 จงหาจำนวนเต็มซึ่งมีความยาว 7 หลัก แต่ละหลักแตกต่างกันและไม่เป็น 0 โดยที่เลข 5 และเลข 6 ต้องไม่ปรากฏในตำแหน่งติดกัน

วิธีทำ การจัดนี้คำนึงถึงลำดับของตัวเลข เพราะถ้าสลับที่ระหว่างตัวเลขจะได้จำนวนใหม่ เราแยกพิจารณาปัญหาออกเป็น 4 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 เลข 5 และเลข 6 ไม่ปรากฏ

มีเลขทั้งหมด 9 ตัว คือ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 และ 9 เมื่อไม่รวม 5 และ 6 จะเหลือเลขเพียง 7 ตัว นำมาจัดเรียงที่ละ 7 ตัว จะจัดได้ P(7,7) = 7! = 5040 วิธี

กรณีที่ 2 เลข 5 ปรากฏแต่เลข 6 ไม่ปรากฏ

เราแบ่งการกระทำเป็นสองขั้นตอนย่อย ๆ ดังนี้ ขั้นแรกเลือกตำแหน่งสำหรับใส่เลข 5 ซึ่งมีวิธีเลือกได้ 7 วิธี เพราะมี 7 ตำแหน่ง เมื่อ

กำหนดตำแหน่งของเลข 5 ได้แล้ว ขั้นตอนที่สองจะต้องจัดเรียงเลข 7 ตัวที่เหลือ คือ 1,2,3,4,7,8,9 เพื่อใส่ลงใน 6 ตำแหน่งที่เหลือโดยคำนึงถึงลำดับ ซึ่งจะทำได้ P(7,6) วิธี ขั้นตอนทั้งสองนี้จะต้องทำต่อเนื่องกัน จึงจะได้เลขครบทั้ง 7 หลัก ตามที่ต้องการ ดังนั้น การจัดเรียงเลข 7 หลักโดยมี 5 ปรากฏแต่ 6 ไม่ปรากฏจะทำได้ $7 \times P(7,6) = 7 \times 7! = 35280$ วิธี

กรณีที่ 3 เลข 6 ปรากฏแต่เลข 5 ไม่ปรากฏ

กรณีนี้ทำได้ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 2 ดังนั้น จะทำได้ 35280 วิธี เช่นกัน

กรณีที่ 4 ทั้งเลข 5 และเลข 6 ปรากฏ

เราแยกพิจารณาการจัดเรียงออกเป็น 3 แบบย่อย ๆ คือ

ก. 5 ปรากฏในตำแหน่งแรก

$$\underline{5}\quad \underline{\neq 6}\quad \underline{\quad}\quad \underline{\quad}\quad \underline{\quad}\quad \underline{\quad}\quad \underline{\quad}$$

ตำแหน่งที่ 2 จะเป็น 6 ไม่ได้ เลข 6 จะต้องปรากฏใน 5 ตำแหน่งที่เหลือ คือตำแหน่งที่ 3, 4, 5, 6 หรือ 7 เท่านั้น ดังนั้นเรามีวิธีใส่เลข 6 ได้ 5 วิธี เหลือตัวเลข 7 ตัว คือ 1, 2, 3, 4, 7, 8, และ 9 ที่จะต้องเลือกใส่ใน 5 ตำแหน่งที่เหลือ ซึ่งจะเลือกได้ $P(7,5) = 2520$ วิธี ดังนั้นวิธีจัดเรียงเลข 7 หลักโดยที่มี 5 ปรากฏอยู่ในตำแหน่งแรกจะจัดได้แตกต่างกัน $5 \times P(7,5) = 5 \times 2520 = 12600$ วิธี

ข. 5 ปรากฏในตำแหน่งท้ายสุด

$$\underline{\quad}\quad \underline{\quad}\quad \underline{\quad}\quad \underline{\quad}\quad \underline{\quad}\quad \underline{\neq 6}\quad \underline{5}$$

คิดในทำนองเดียวกันกับแบบ ก. ดังนั้นวิธีจัดเรียงเลข 7 หลัก โดยมี 5 ปรากฏอยู่ในตำแหน่งท้ายสุด จะจัดได้แตกต่างกัน $5 \times P(7,5) = 5 \times 2520 = 12600$ วิธี

ค. 5 ปรากฏในตำแหน่งที่ไม่ใช่ตำแหน่งแรกหรือตำแหน่งสุดท้าย

$$\_\_ \quad \_\_ \quad \underline{\neq 6} \quad \underline{5} \quad \underline{\neq 6} \quad \_\_ \quad \_\_$$

ในกรณีนี้เลข 6 จะปรากฏอยู่ข้างหน้าหรือข้างหลังเลข 5 ไม่ได้ เราแบ่งกระบวนการจัดเรียงนี้ออกเป็นขั้นตอนย่อย ๆ โดยในขั้นตอนแรก เลือกตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งที่ไม่ใช่ตำแหน่งแรกหรือตำแหน่งสุดท้ายสำหรับใส่เลข 5 ซึ่งมีวิธีเลือกได้ 5 วิธี ขั้นตอนที่สอง ใส่เลข 6 ลงในตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งที่ไม่ใช่ตำแหน่งที่ติดกับเลข 5 ซึ่งจะเลือกใส่ได้ 4 วิธี ขั้นตอนที่สาม จัดเรียงเลขห้าตัวจาก 1, 2, 3, 4, 7, 8 และ 9 ใส่ลงใน 5 ตำแหน่งที่เหลือได้ P(7,5) วิธี ใช้หลักการคูณ จะได้จำนวนวิธีจัดเรียงทั้งหมด 5x4xP(7,5) = 5x4x2520 = 50400 วิธี ดังนั้น จำนวนเต็มที่มีทั้ง 5 และ 6 อยู่ด้วย มีทั้งหมด 12600 + 12600 + 50400 = 75600 จำนวน

จากทั้ง 4 กรณี เราสรุปโดยใช้หลักการบวก จะได้จำนวนเต็มที่มีลักษณะตามที่โจทย์กำหนดมีทั้งหมด 5040 + 35280 + 35280 + 75600 = 151200 จำนวน ■

ข้อสังเกต P(n,n) = P(n,k)xP(n-k,n-k) ดังนั้น

$$P(n,k) = \frac{P(n,n)}{P(n-k,n-k)} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

การจัดสิ่งของ n สิ่ง เรียงลำดับกันทีละทั้งหมดนั้น สามารถแยกทำได้เป็น 2 ขั้นตอน ขั้นตอนแรกจัดเรียงสิ่งของ k สิ่งจาก n สิ่งใส่ลงใน k ตำแหน่งแรก ซึ่งทำได้ P(n,k) วิธี ขั้นตอนที่ 2 จัดเรียงสิ่งของ n-k สิ่ง ที่เหลือใส่ใน n-k ตำแหน่งที่เหลือ ซึ่งจะทำได้ P(n-k,n-k) วิธี ดังนั้น จากหลักการคูณ จำนวนวิธีจัดของ n สิ่งมาเรียงกันทีละทั้งหมด คือ

$$P(n,n) = P(n,k) \times P(n-k,n-k)$$

จะเห็นว่าการจัดสิ่งของที่ได้กล่าวไปแล้วนั้นเป็นการจัดเรียงสิ่งของในแนวเส้นตรง (linear permutation) ต่อไปจะกล่าวถึงการจัดเรียงสิ่งของในลักษณะวงกลม

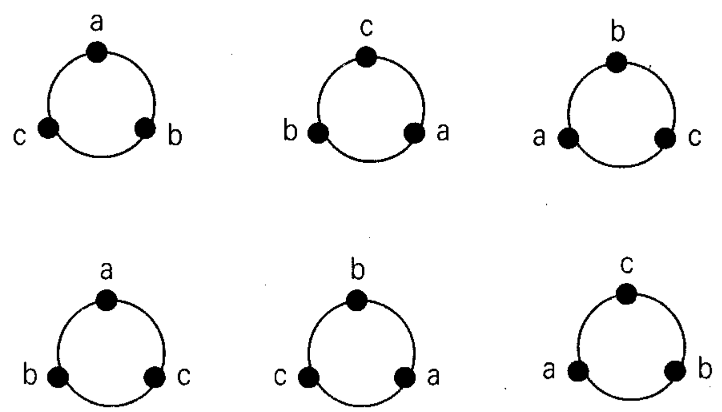
การจัดเรียงแบบวงกลม

Circular Permutation

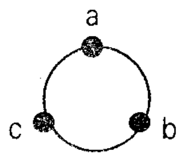
ในการจัดเรียงคน n คน เข้านั่งรอบโต๊ะกลมนั้น หลังจากที่จัดคนเข้านั่งเรียบร้อยแล้ว ถ้าเลื่อนตำแหน่งที่นั่งของทุกคนไปในทิศทางเดียวกัน (ตามเข็มนาฬิกาหรือทวนเข็มนาฬิกา) ทุกคนจะได้ที่นั่งใหม่ แต่เราจะถือว่าการจัดที่นั่งที่ได้ใหม่นั้นไม่แตกต่างไปจากเดิม ทั้งนี้เนื่องจากคนที่นั่งอยู่ทางซ้ายและทางขวาของคนคนหนึ่ง หลังจากที่หมุนเลื่อนตำแหน่งไปแล้ว คนทั้งสองนั้นก็ยังคงนั่งอยู่ทางด้านซ้ายและขวาของคนคนนั้นเช่นเดิม เช่น ให้ a, b และ c แทนคน 3 คน ถ้าจัดเรียงคนทั้งสามนี้ในแนวเส้นตรง จะจัดเรียงได้ 6 แบบแตกต่างกัน คือ

abc, cab, bca, acb, bac, และ cba

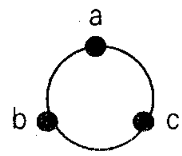
แต่ถ้านำมาจัดเรียงแบบวงกลม จะได้



เราถือว่าการจัดเรียงสามแบบในแถวบนเป็นการจัดแบบเดียวกัน เพราะถ้าหมุนการจัดในรูปแรก โดยหมุนตามเข็มนาฬิกา จะได้การจัดในรูปที่สองและสามตามลำดับ ในทำนองเดียวกัน เราถือว่าการจัดเรียงสามแบบในแถวล่างเหมือนกัน ดังนั้น การจัดคน 3 คน เข้านั่งเรียงในลักษณะวงกลม จะจัดเรียงได้เพียง 2 แบบเท่านั้นที่แตกต่างกัน คือ



และ



ในกรณีทั่วไป วิธีนับการจัดเรียงแบบวงกลมนั้น มีวิธีนับได้ 2 วิธี ดังนี้

วิธีที่1 นำคนทั้งหมด n คน มาจัดเรียงในแนวเส้นตรง ซึ่งทำได้ P(n,n) วิธี แล้วจับคนหัวแถวและท้ายแถวมาชิดกันเป็นรูปวงกลม การเลื่อนตำแหน่งที่นั่งในวงกลมของทุกคนไปในทิศทางเดียวกัน ซึ่งเลื่อนได้ n-1 วิธี รวมกับวิธีเดิมอีก 1 วิธี เป็น n วิธี การเลื่อนตำแหน่งทั้งหมดนี้ในลักษณะวงกลม เราถือว่าเป็นการจัดเรียงแบบเดียวกัน แต่ในลักษณะเส้นตรงจะถือว่าไม่เหมือนกัน ดังนั้น จำนวนวิธีจัดเรียงคน เข้านั่งโต๊ะกลมจะต้องน้อยกว่าจำนวนวิธีจัดเรียงในลักษณะเส้นตรง การจัดเรียงแบบเส้นตรง n วิธี จะเหมือนกับการจัดเรียงแบบวงกลมเพียงวิธีเดียวเท่านั้น ดังนั้น จำนวนวิธีจัดคน n คนเข้าเรียงแบบวงกลมจะเท่ากับ $\frac{P(n,n)}{n} = (n-1)!$ วิธี

วิธีที่2 ขั้นแรก จัดคนหนึ่งคน(คนใดก็ได้ใน n คน) ให้เข้านั่งที่หนึ่งที่ (ที่ใดที่หนึ่งก็ได้เพียงที่เดียวเท่านั้น) ซึ่งจะจัดได้เพียงวิธีเดียวเท่า

นั้น แล้วจัดคนที่เหลือ n-1 คน เข้าเรียงใน n-1 ตำแหน่งที่เหลือ ซึ่งจะจัดได้ $P(n-1,n-1) = (n-1)!$ วิธี

จากเหตุผลข้างบนนี้ เราสรุปได้ดังนี้

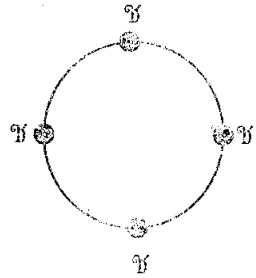
การจัดสิ่งของ n สิ่งเข้าเรียงในลักษณะวงกลม มีวิธีจัดได้ $(n-1)!$ วิธี

ตัวอย่าง 2.2.5 จัดเด็กชาย 4 คนและเด็กหญิง 3 คน เข้านั่งรอบโต๊ะกลมได้กี่วิธี ถ้า

ก. ไม่มีข้อจำกัดใด ๆ

ข. เด็กหญิงต้องไม่นั่งติดกัน

วิธีทำ ก. ในกรณีที่ไม่มีข้อจำกัดใด ๆ การจัดเด็กชาย 4 คนและเด็กหญิง 3 คน เข้านั่งรอบโต๊ะกลม ก็คือการจัดคน 7 คนเข้านั่งรอบโต๊ะกลมนั่นเอง ซึ่งจะจัดได้แตกต่างกัน $(7-1)! = 6! = 720$ วิธี



วิธีทำ ข. ขั้นแรก จัดเด็กชาย 4 คน เข้านั่งรอบโต๊ะกลมก่อน ซึ่งจัดได้ $(4-1)! = 3!$ วิธี หลังจากจัดเด็กชายเข้านั่งรอบโต๊ะกลมแล้ว จะมีที่ว่างระหว่างเด็กชาย 4 ที่ ดังในรูปข้างบนนี้ ขั้นต่อไปจัดเด็กหญิงคนแรกเข้านั่งระหว่างที่ว่างได้ 4 วิธี จัดเด็กหญิงคนที่สองเข้านั่งที่ว่างที่เหลือได้ 3 วิธี และขั้นสุดท้าย จัดเด็กหญิงคนที่สามเข้านั่งที่ว่างที่เหลือได้ 2 วิธี ดังนั้น จากหลักการคูณ การจัดเด็กเข้านั่งรอบโต๊ะกลมตามเงื่อนไขดังกล่าว จัดได้ $(3!) \times 4\times3\times2 = 144$ วิธี ∎

ตัวอย่าง 2.2.6 ลูกปัด 20 ลูก มีสีแตกต่างกัน นำลูกปัดทั้ง 20 ลูกมาร้อยเป็นสร้อยคอ จะได้สร้อยคอที่แตกต่างกันกี่แบบ

วิธีทำ นำลูกปัด 20 ลูกมาเรียงในลักษณะวงกลมได้ (20-1)! = 19! วิธี แต่ในการนำลูกปัดมาทำเป็นสร้อยคอนั้น จะทำได้น้อยกว่า 19! วิธี สมมุติว่าเรานำลูกปัดที่ถูกเรียงเป็นสร้อยคอแล้วนั้นมาวางบนโต๊ะกระจก ที่สามารถมองเห็นสร้อยคอจากด้านล่างได้ การเรียงแบบวงกลมที่มองเห็นจากด้านบน จะถือว่าเหมือนกับการเรียงแบบวงกลมที่มองเห็นจากด้านล่างของกระจก แสดงว่าการจัดเรียงลูกปัดในลักษณะวงกลม 2 แบบ ถือว่าเป็นสร้อยคอแบบเดียวกัน ดังนั้น เรามีวิธีร้อยลูกปัด 20 ลูก เป็นสร้อยคอได้ $\frac{19!}{2}$ วิธี ■

2.3 การเลือก

Selection

ให้ S = {a, b, c} เลือกสมาชิกของ S ทีละสองตัว โดยไม่คำนึงถึงลำดับ จะมีวิธีเลือกได้แตกต่างกัน 3 วิธี คือ

ab, ac และ bc

ในกรณีทั่ว ๆ ไป ถ้า S เป็นเซตซึ่งมีสมาชิก n ตัว แตกต่างกัน เลือกสมาชิกของ S ทีละ k ตัว จะเรียกการเลือกแต่ละแบบว่า **k-คอมบิเนชันของ S** และจะใช้สัญญลักษณ์ C(n, k) หรือ $\binom{n}{k}$ แทน จำนวน k-คอมบิเนชันของเซต S นั่นคือ C(n,k) แทนจำนวนวิธีเลือกสิ่งของทีละ k สิ่ง จากของทั้งหมด n สิ่ง

หมายเหตุ บางตำราอาจใช้สัญญลักษณ์ ${}^{n}C_{k}$ แทน C(n,k) หรือ $\binom{n}{k}$

ตัวอย่าง 2.3.1 เลือกอักษร 3 ตัว จากอักษร a, b, c และ d ได้แตกต่างกันกี่วิธี

วิธีทำ เลือกได้ 4 วิธี คือ

abc , abd , acd และ bcd

นั่นคือ $C(4,3) = 4$ ■

ในกรณีที่จำนวนตัวอักษรหรือสมาชิกในเซตที่พิจารณามีจำนวนมาก เราไม่สามารถแจกแจงการเลือกได้ทั้งหมด เนื่องจากจะสิ้นเปลืองเวลาและในบางครั้งเราเพียงต้องการจะรู้เพียงว่ามีกี่วิธีโดยไม่ต้องการจะรู้ว่ามีวิธีใดบ้าง ดังนั้น จึงเป็นการสะดวกถ้าเราจะมีสูตรในการคำนวณหา $C(n,k)$ ในลักษณะที่คล้ายกับสูตรของ $P(n,k)$ จะเห็นว่าการจัดเรียงสิ่งของทีละ k สิ่ง จากของ n สิ่งที่แตกต่างกันนั้น เราแยกกระทำได้เป็นสองขั้นตอนคือ ขั้นตอนแรก เลือกของ k สิ่งจากของทั้งหมด n สิ่งโดยไม่คำนึงถึงลำดับของการเลือก ซึ่งจะทำได้ $C(n,k)$ วิธี ขั้นตอนที่สอง นำสิ่งของ k สิ่งที่เลือกได้ในขั้นตอนแรกมาจัดเรียงลำดับ ซึ่งจะจัดเรียงได้แตกต่างกัน $P(k,k)$ วิธี โดยอาศัยหลักการคูณ เราได้

จำนวนวิธีจัดเรียงสิ่งของทีละ k สิ่งจากของ n สิ่ง

= (จำนวนวิธีเลือกสิ่งของ k สิ่งจากของ n สิ่ง)

x (จำนวนวิธีจัดเรียงสิ่งของ k สิ่งจาก k สิ่ง)

นั่นคือ $P(n,k) = C(n,k) \times P(k,k)$ ดังนั้น

$$C(n,k) = \frac{P(n,k)}{P(k,k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ตัวอย่าง 2.3.2 จงหาจำนวนลำดับของเลขฐานสองซึ่งมีความยาวเท่ากับเจ็ด ที่มีเลข 0 สามตัว

วิธีทำ การสร้างลำดับฐานสองซึ่งมีความยาวเท่ากับเจ็ดและมี 0 สามตัว ทำได้โดยเลือกตำแหน่ง 3 ตำแหน่ง จาก 7 ตำแหน่ง เพื่อใส่เลข 0

□ □ □ □ □ □ □

และใส่เลข 1 ใน 4 ตำแหน่งที่เหลือ ดังนั้น จะมีจำนวนลำดับทั้งหมด

$C(7,3) = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$ ลำดับ ■

ตัวอย่าง 2.3.3 ข้อสอบชุดหนึ่งมีข้อสอบ 10 ข้อ นักศึกษาจะต้องเลือกตอบ 7 ข้อ โดยเลือก 3 ข้อ จาก 5 ข้อแรกและเลือกอีก 4 ข้อ จาก 5 ข้อหลัง นักศึกษาจะมีวิธีเลือกทำข้อสอบได้แตกต่างกันกี่วิธี

วิธีทำ แบ่งการเลือกข้อสอบเป็นสองขั้นตอน ขั้นแรก เลือกข้อสอบ 3 ข้อ จาก 5 ข้อแรก ซึ่งมีวิธีเลือกได้ $C(5,3)$ วิธี ขั้นตอนที่สอง เลือกข้อสอบ 4 ข้อ จาก 5 ข้อหลัง ซึ่งมีวิธีเลือกได้ $C(5,4)$ วิธี ดังนั้น โดยหลักการคูณ นักศึกษาจะมีวิธีเลือกทำข้อสอบ 7 ข้อได้แตกต่างกัน $C(5,3) \times C(5,4) = 10 \times 5 = 50$ วิธี ■

ตัวอย่าง 2.3.4 มีจุดบนระนาบ 25 จุดโดยไม่มี 3 จุดใด ๆ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

ก. ถ้าจุด 2 จุด กำหนดเส้นตรงได้หนึ่งเส้น จะมีเส้นตรงที่แตกต่างกันได้กี่เส้น

ข. ถ้าจุดสามจุดกำหนดสามเหลี่ยมได้หนึ่งรูป จะมีสามเหลี่ยมที่แตกต่างกันกี่รูป

วิธีทำ ก. จุดสองจุดกำหนดเส้นตรงได้หนึ่งเส้น ดังนั้นจุด 25 จุดจะกำหนดเส้นตรง(หรือทำให้เกิดเส้นตรง)ได้ทั้งหมด

$$C(25,2) = \frac{25!}{2!(25-2)!} = \frac{25!}{2!23!} = 300 \text{ เส้น}$$

วิธีทำ ข. จุดสามจุดกำหนดสามเหลี่ยมได้หนึ่งรูป ดังนั้นจุด 25 จุดจะกำหนดสามเหลี่ยม(หรือทำให้เกิดสามเหลี่ยม)ได้ทั้งหมด

$$C(25,3) = \frac{25!}{3!(25-3)!} = \frac{25!}{3!22!} = 2300 \text{ รูป}$$ ■

หมายเหตุ เราสามารถแสดงได้ไม่ยากนักว่า

1) $C(n,0) = 1$ 2) $C(n,1) = n$

3) $C(n,n) = 1$ 4) $C(n,k) = C(n,n-k)$

เลือกสองตัว	เลือกทิ้งสามตัว
ab	cde
ac	bde
ad	bce
ae	bcd
bc	ade
bd	ace
be	acd
cd	abe
ce	abd
de	abc

เราสามารถพิสูจน์ข้อ 4) โดยการให้เหตุผลดังนี้ การเลือกสิ่งของที่ต้องการ k สิ่งจากสิ่งของ n สิ่งมาเก็บไว้ จะเหมือนกับการเลือกของออก n-k สิ่ง จากกองซึ่งมีของ n สิ่ง เช่นถ้า n = 5, k = 3 และสมมุติว่าสิ่งของทั้งห้าสิ่งนั้นคืออักษร a, b, c, d และ e ผลที่ได้จากการเลือกสิ่งของออกสามสิ่งทางด้านขวาของตารางนี้จะเหลือสิ่งของสองสิ่งทางด้านซ้ายมือ หรืออาจพิสูจน์ข้อ 4) โดยใช้สูตร C(n,k) ก็ได้ นั่นคือ

$$C(n,n-k) = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C(n,k)$$

แบบฝึกหัด

1. ก. จงหา P(7,4) , P(8,2) , P(8,6)

   ข. จงหา C(7,4) , C(8,2) , C(8,6)

2. จงหาจำนวนวิธีจัดเรียงอักษรในคำ JUPITER

3. จงพิสูจน์ว่า P(n,n) = P(n,n-1) โดยการให้เหตุผลเชิงคอมบินาทอริค

4. เขียนเลขจำนวนเต็มจาก 1 ถึง 100,000 อยากทราบว่า ในจำนวนนี้มีกี่จำนวนที่มีเลข 5 อยู่ด้วย

5. ร้านขายกางเกงยีนแห่งหนึ่งมีกางเกงแบบทรงต่าง ๆ กัน 8 แบบ แต่ละแบบมี 4 สี และมี 10 ขนาด อยากทราบว่าร้านค้าแห่งนี้มีกางเกงซึ่งแตกต่างกันกี่ชนิด

6. ก. จงหาจำนวนเต็มระหว่าง 0 และ 50 (รวม 0 และ 50) ซึ่งหารด้วย 2 ลงตัว

ข. จำนวนเต็มระหว่าง 0 และ 50 (รวม 0 และ 50) มีกี่คู่ที่มีผลต่างเท่ากับ 5

7. จะมีวิธีใส่ยางรถ 4 เส้นให้กับรถยนต์คันหนึ่งได้กี่วิธี

8. ให้ S เป็นเซตขนาด n (เซตซึ่งมีสมาชิก n ตัว) จงหาจำนวนเซตย่อยของ S ซึ่งมีสมาชิก k ตัว

9. เลขทะเบียนรถยนต์ประกอบด้วย 3 ส่วน ส่วนแรกเป็นเลขตัวเดียวจาก 1 ถึง 9 ส่วนที่สองเป็นอักษรจาก ก ถึง ฮ ส่วนที่สามเป็นเลข 4 หลัก จงหาจำนวนทะเบียนรถยนต์ที่แตกต่างกันทั้งหมดว่ามีจำนวนกี่หมายเลขทะเบียน

10. จำนวนเต็มบวกซึ่งประกอบด้วยเลขเก้าหลัก แต่ละหลักแตกต่างกันและเลือกมาจาก 1, 2, ... , 9 จงหาจำนวนเต็มบวกดังกล่าวว่ามีทั้งหมดกี่จำนวน และมีกี่จำนวนซึ่งมีค่ามากกว่า 500,000,000

11. จะมีวิธีจัดคน 6 คน เข้านั่งรอบโต๊ะกลมได้กี่วิธี และถ้ามีสองคน คือนายแดงและนายดำไม่ยอมนั่งติดกัน จะมีวิธีจัดได้กี่วิธี

12. นักเรียนคนหนึ่งมีหนังสือ 75 เล่ม แตกต่างกัน แต่มีชั้นวางหนังสือซึ่งวางหนังสือได้เพียง 20 เล่ม เขาจะมีวิธีจัดเรียงหนังสือบนชั้นได้แตกต่างกันกี่วิธี

13. คณะกรรมการชุดหนึ่งประกอบด้วยบุคคล 12 คน จะต้องเลือก 3 คน ในจำนวนนี้เพื่อทำหน้าที่ประธาน เลขาฯ และเหรัญญิก จะมีวิธีตั้งคณะกรรมการได้แตกต่างกันกี่วิธี

14. จงหาจำนวนวิธีจัดเรียงอักษรภาษาอังกฤษ 26 ตัว โดยมีสระทั้ง 5 ตัวอยู่ติดกัน

15. เลขฐานสองคือเลขซึ่งแต่ละหลักเป็น 0 หรือ 1 จงหาจำนวนเลขฐานสองซึ่งมีความยาว n หลัก และจงแจกแจงเลขฐานสองทั้งหมดที่มีความยาว 4 หลัก

16. จงหาจำนวนเต็มคู่ซึ่งมี 4 หลัก แต่ละหลักแตกต่างกันและแต่ละหลักเลือกมาจาก 1, 2, 3, 4 หรือ 5

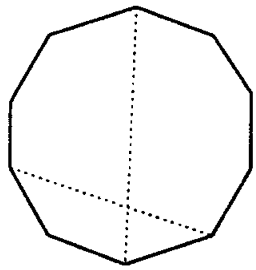
17. ต้องการสร้างคำภาษาอังกฤษซึ่งมีความยาว 8 ตัวอักษร จงนับจำนวนคำซึ่งมีสระ 3 , 4 หรือ 5 ตัว

18. จำนวนเต็มบวกซึ่งหาร $3^4 \times 5^2 \times 7^2 \times 11$ ได้ลงตัวมีทั้งหมดกี่จำนวน

19. จำนวนเต็มบวกซึ่งหาร 620 ได้ลงตัวมีทั้งหมดกี่จำนวน

20. ระยะทางระหว่างเลขฐานสองสองจำนวนคือจำนวนตำแหน่งที่แตกต่างกันของเลขฐานสองทั้งสองจำนวนนั้น เช่น ระยะทางระหว่าง 110110 และ 011110 คือ 2 กำหนดเลขฐานสองซึ่งมีความยาว n หลักให้ จำนวนเลขฐานสองซึ่งอยู่ห่างจากเลขฐานสองที่กำหนดให้เป็นระยะ d มีทั้งหมดกี่จำนวน

21. รูปสิบเหลี่ยมรูปหนึ่ง มีสมบัติว่าเส้นทแยงมุม 3 เส้นใด ๆ จะไม่ตัดกันที่จุด ๆ เดียวกัน

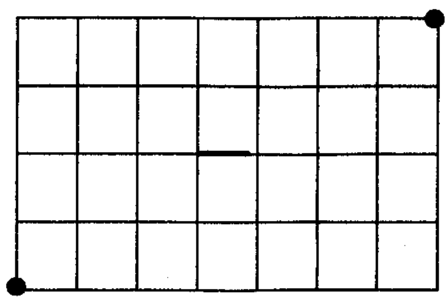


ก. จงหาจำนวนเส้นทแยงมุมทั้งหมด

ข. จงหาจำนวนจุดตัดทั้งหมดของเส้นทแยงมุม

ค. จงหาจำนวนส่วนของเส้นตรงทั้งหมดภายในรูปสิบเหลี่ยมที่เกิดจากการตัดกันของเส้นทแยงมุมทั้งหมด

22. ที่ทำงานของชายคนหนึ่งตั้งอยู่ห่างจากบ้านเขา 7 บล็อกไปทางตะวันออก และ 4 บล็อกไปทางเหนือ (ดังรูป) เขาจะต้องเดินไปทำงานทุกวัน เขาจะมีเส้นทางเดิน (ที่สั้นที่สุด) ที่แตกต่างกันกี่เส้นทางและถ้าบล็อกที่อยู่ในตำแหน่งที่แสดงด้วยเส้นทึบสีดำในรูปถูกน้ำท่วม เดินผ่านไม่ได้ เขาจะเดินทางได้แตกต่างกันกี่เส้นทาง



2.4 การจัดเรียงเมื่อมีของซ้ำกัน

Arrangement with Repetition

ในหัวข้อนี้ เราจะพิจารณาปัญหาการจัดเรียงสิ่งของซึ่งไม่จำเป็นจะต้องแตกต่างกันทั้งหมด หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ เราจะพิจารณาปัญหาการจัดเรียงสิ่งของซึ่งอนุญาตให้เรียงซ้ำได้ โดยแยกพิจารณาดังนี้

กรณีที่ 1 เมื่อสิ่งของแต่ละชนิดมีจำนวนไม่จำกัด

เช่น ให้ S = {a, b, c} ต้องการจัดเรียงอักษรใน S ทีละสองตัว เมื่อสมาชิกแต่ละตัวของ S มีจำนวนไม่จำกัดหรือเมื่ออนุญาตให้เรียงซ้ำอักษรได้ จะจัดเรียงได้ 9 วิธี คือ aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb และ cc จะเห็นว่าการจัดเรียงอักษรทีละสองตัวนี้เป็นกระบวนการทำงานที่แยกเป็นสองขั้นตอนย่อย ๆ ขั้นตอนแรก เลือกอักษรใส่ในตำแหน่งแรก ซึ่งมีวิธีเลือกได้ 3 วิธี ขั้นตอนที่สอง เลือกอักษรใส่ในตำแหน่งที่สอง ซึ่งมีวิธีเลือกได้ 3 วิธี เช่นกัน เพราะจัดเรียงซ้ำได้ ดังนั้น โดยหลักการคูณ จะมีวิธีจัดเรียงอักษรสองตัวได้แตกต่างกัน $3 \times 3 = 3^2 = 9$ วิธี ซึ่งตรงกับจำนวนที่แจกแจงไว้ข้างบนนี้

ทฤษฎีบท 2.4.1

ให้ S เป็นเซตซึ่งมีสมาชิก n ตัวแตกต่างกัน นำมาจัดเรียงทีละ k ตัว โดยอนุญาตให้จัดเรียงซ้ำได้ จะจัดเรียงได้ n^k วิธี

พิสูจน์ สมมุติว่ามีตำแหน่งอยู่ k ตำแหน่ง เลือกสมาชิกในเซต S ไปใส่ในตำแหน่งแรกได้ n วิธี เนื่องจากมีสมาชิกในเซต S แตกต่างกัน n ตัว เลือกสมาชิกที่เหลือใส่ในตำแหน่งที่ 2 ได้ n วิธี เช่นกัน เพราะอนุญาตให้เรียงซ้ำได้ ในทำนองเดียวกัน เราสามารถเลือกสมาชิกในเซต S ที่เหลือไปใส่ในตำแหน่งที่ 3, 4, ..., k ได้ตำแหน่งละ n วิธี

n วิธี	n วิธี	n วิธี	...	n วิธี
ตำแหน่งที่ 1	ตำแหน่งที่ 2	ตำแหน่งที่ 3		ตำแหน่งที่ k

จากหลักการคูณ จะจัดได้ทั้งหมด $\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{k} = n^k$ วิธี ■

ข้อสังเกต ถ้าสมาชิกแต่ละตัวในเซต S มีซ้ำกันเป็นจำนวนอย่างน้อย k ตัว ทฤษฎีบทข้างบนนี้ก็ยังเป็นจริงอยู่

ตัวอย่าง 2.4.1 สลากกินแบ่งประกอบด้วยเลขฐานสิบ 6 หลักเรียงกัน อยากทราบว่ามีจำนวนสลากกินแบ่งที่แตกต่างกันทั้งหมดเท่าใด

วิธีทำ จะเห็นว่า สลากกินแบ่งแต่ละฉบับมีเลขซ้ำกันได้ ดังนั้น ปัญหาข้อนี้จึงเป็นปัญหาเกี่ยวกับการจัดเรียงที่อนุญาตให้เรียงซ้ำได้ เรามีวิธีเลือกเลขใส่ในแต่ละหลักได้ 10 วิธี คือเลือก 0, 1, ... หรือ 9 ดังนั้น จำนวนสลากกินแบ่งที่แตกต่างกันทั้งหมดเท่ากับ $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^6 = 1{,}000{,}000$ ฉบับ ■

กรณีที่ 2 เมื่อสิ่งของแต่ละประเภทมีซ้ำกันเป็นจำนวนจำกัด ดังเช่นในตัวอย่าง 2.4.2

ตัวอย่าง 2.4.2 มีอักษร 6 ตัว ในคำ BANANA นำมาจัดเรียงสลับที่กันจะจัดเรียงได้แตกต่างกันกี่แบบ

วิธีทำ เราแบ่งกระบวนการจัดเรียงอักษรทั้ง 6 ตัวนี้ออกเป็น 3 ขั้นตอน โดยนึกภาพว่ามีตำแหน่งอยู่ 6 ตำแหน่งที่จะต้องนำอักษรทั้ง 6 ตัวนี้ไปใส่ตำแหน่งละหนึ่งตัว

ขั้นตอนที่ 1 เลือก 3 ตำแหน่งจาก 6 ตำแหน่งเพื่อจะใส่ A เช่น

__ A A __ __ A

ซึ่งจะทำได้แตกต่างกัน C(6,3) วิธี (มี 6 ตำแหน่งเลือกมา 3 ตำแหน่ง)

ขั้นตอนที่ 2 เลือก 2 ตำแหน่งจาก 3 ตำแหน่งที่เหลือเพื่อใส่ N ซึ่งจะทำได้ C(3,2) วิธี

ขั้นตอนที่ 3 หลังจากการเลือกขั้นตอนที่ 1 และขั้นตอนที่ 2 แล้วจะเหลือเพียงหนึ่งตำแหน่งเพื่อใส่ B ดังนั้น การเลือกใส่ B จะทำได้เพียงวิธีเดียวเท่านั้น

การกระทำทั้งสามขั้นตอนนี้จะต้องกระทำต่อเนื่องกัน ดังนั้น โดยอาศัยหลักการคูณ จำนวนวิธีจัดเรียงอักษรทั้ง 6 ตัว จะเท่ากับ

C(6,3) x C (3,2) x 1 = 20 x 3 x 1 = 60 วิธี ■

หมายเหตุ มัลติเซต (multi-set) คือเซตที่มีสมาชิกซ้ำกัน

ทฤษฎีบท 2.4.2

ถ้า S เป็นมัลติเซตซึ่งประกอบด้วยสมาชิกประเภทแรก n_1 ตัวซ้ำกัน ประเภทที่ 2 มี n_2 ตัวซ้ำกัน ... ประเภทที่ k มี n_k ตัวซ้ำกัน และ $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ แล้วจำนวนวิธีจัดเรียงสมาชิกใน S จะเท่ากับ

$$P(n;\ n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\ldots\,n_k!}$$

พิสูจน์ สมมุติว่าสมาชิกของ S ที่แตกต่างกัน k ประเภทนั้นคือ a_1, a_2, ..., a_k และสมมุติว่ามีตำแหน่งอยู่ n ตำแหน่ง การจัดเรียงสิ่งของที่ละ n ทำได้โดยเลือกสมาชิกใน S ไปใส่ในตำแหน่งเหล่านั้น เราแบ่งกระบวนการเลือกออกเป็นขั้นตอนย่อย ๆ ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือก n_1 ตำแหน่งจากตำแหน่งทั้งหมด n ตำแหน่งเพื่อใส่ a_1 ซึ่งจะทำได้ $C(n,n_1)$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือก n_2 ตำแหน่งจาก $n - n_1$ ตำแหน่งที่เหลือเพื่อใส่ a_2 ซึ่งจะทำได้ $C(n - n_1, n_2)$ วิธี

⋮

ขั้นตอนที่ k เลือก n_k ตำแหน่งที่เหลือเพื่อใส่ a_k ซึ่งจะทำได้

$$C(n - n_1 - n_2 - \dots - n_{k-1}, n_k) = C(n_k, n_k) = 1 \text{ วิธี}$$

การกระทำแต่ละขั้นตอนนั้นจะต้องกระทำต่อเนื่องกัน ดังนั้น โดยหลักการคูณ จะได้การจัดทั้งหมดเท่ากับ

$$C(n,n_1)C(n - n_1,n_2) \dots C(n- n_1- n_2 - \dots - n_{k-1},n_k)$$

$$= C(n,n_1)C(n - n_1,n_2) \dots C(n_k,n_k)$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \times \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \times \dots \times \frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-n_2-\cdots-n_k)!}$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!(n-n_1-n_2-\cdots-n_k)!}$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} \quad \text{เนื่องจาก } n - n_1 - n_2 - \dots - n_k = 0$$

ตัวอย่าง 2.4.3 จัดเรียงอักษร 6 ตัวในคำ BANANA ได้แตกต่างกันกี่วิธี

วิธีทำ จะมีวิธีจัดได้แตกต่างกัน $P(6;3,2,1) = \frac{6!}{3!2!1!} = 60$ วิธี ■

ตัวอย่าง 2.4.4 จงหาจำนวนวิธีจัดเรียงอักษรในคำ DECIDED เมื่อ

ก. ไม่มีเงื่อนไขใด ๆ

ข. อักษร E ต้องอยู่ติดกัน

ค. อักษร E ต้องไม่อยู่ติดกัน

วิธีทำ ก. เป็นปัญหาการจัดเรียงสิ่งของที่มีของซ้ำกัน คือมี D สามตัว E สองตัว ส่วน C และ I มีอย่างละหนึ่งตัว รวมอักษรทั้งหมด 7 ตัว ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 2.4.2 จะมีวิธีจัดเรียงอักษรได้ทั้งหมด $P(7;3,2,1,1) = \frac{7!}{3!2!1!1!} = 420$ วิธี

วิธีทำ ข. ก่อนอื่นเราผูกอักษร E ทั้งสองตัวติดกัน แล้วคิดว่า E ทั้งสองตัวนั้นเป็นตัวเดียวกัน ดังนั้น อักษรในคำ DECIDED ทั้ง 7 ตัว จะเปรียบเสมือนมีอักษรเพียง 6 ตัว คือมี D สามตัว C, E และ I มีอย่างละหนึ่งตัว ซึ่งจัดเรียงได้แตกต่างกัน $P(6;3,1,1,1) = \dfrac{6!}{3!1!1!1!} = 120$ วิธี

วิธีทำ ค. นำจำนวนวิธีจัดเรียงใน ข. ไปหักออกจากจำนวนวิธีจัดเรียงใน ก. ได้จำนวนวิธีจัดเรียงอักษร 420 - 120 = 300 วิธี ซึ่งมี E ไม่อยู่ติดกัน ■

ข้อสังเกต ในกรณีที่มัลติเซต S มีสมาชิกเพียงสองตัวแตกต่างกัน โดยมีสมาชิกตัวแรกซ้ำกันเป็นจำนวน n_1 ตัว ตัวที่สองซ้ำกันเป็นจำนวน n_2 ตัว ถ้าให้ $n = n_1 + n_2$ แล้ว จำนวนวิธีจัดเรียงสมาชิกทั้งหมดในเซต S จะเท่ากับ

$$P(n;n_1,n_2) = \frac{n!}{n_1!n_2!} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} = C(n,n_1) \quad \text{หรือ}$$

$$P(n;n_1,n_2) = \frac{n!}{n_1!n_2!} = \frac{n!}{n_2!(n-n_2)!} = C(n,n_2)$$

ดังนั้น เราได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.4.3

$$P(n;n_1,n_2) = C(n,n_1) = C(n,n_2)$$

แสดงว่า **การจัดเรียง** เมื่อคำนึงถึงความสำคัญของลำดับของสมาชิกในเซต S จะเหมือนกับ **การเลือก** สมาชิก n_1 ตัวจากเซต S หรือเลือกสมาชิก n_2 ตัวจากเซต S โดยไม่คำนึงถึงลำดับในการเลือก

ในทฤษฎีบท 2.4.2 เป็นสูตรสำหรับใช้หาการจัดเรียงสมาชิกในเซต S ทีละทั้งหมด ถ้าต้องการหาจำนวนวิธีจัดเรียงสมาชิกในเซต S ทีละบางส่วน จะต้องแยกพิจารณาเป็นกรณี ๆ หรืออาจใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิด (generating function) เข้าช่วย ซึ่งจะได้ศึกษาต่อไปในบทที่ห้า

2.5 การเลือกเมื่อมีของซ้ำกัน
Selection with Repetition

เพื่อสะดวกต่อการอธิบายจะขอเริ่มด้วยตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.5.1 ร้านอาหารแห่งหนึ่ง มีอาหารให้เลือก 3 ประเภทคือ ก๋วยเตี๋ยวเส้นเล็ก ก๋วยเตี๋ยวเส้นใหญ่ และเส้นบะหมี่ ถ้าต้องการสั่งอาหาร 6 ห่อ จะมีวิธีสั่งที่แตกต่างกันได้กี่วิธี

วิธีทำ สมมุติว่าร้านค้ามีแบบฟอร์มให้ลูกค้าสั่งอาหารดังนี้

เส้นเล็ก	เส้นใหญ่	บะหมี่
x	xxxx	x

จำนวนของ x ในแต่ละช่องจะแทนจำนวนอาหารประเภทนั้น ๆ เช่น ถ้าลูกค้ากรอกแบบฟอร์มดังในตารางข้างบนนี้ แสดงว่าลูกค้าต้องการสั่งก๋วยเตี๋ยวเส้นเล็ก 1 ห่อ เส้นใหญ่ 4 ห่อ และเส้นบะหมี่ 1 ห่อ สมมุติว่าพนักงานเสริฟอาหารทุกคนในร้านจำแบบฟอร์มนี้ได้ขึ้นใจ นั่นคือจำได้ว่าจำนวน x ในช่องแรกแทนจำนวนห่อของก๋วยเตี๋ยวเส้นเล็ก จำนวน x ในช่องที่สองแทนจำนวนห่อของก๋วยเตี๋ยวเส้นใหญ่ และจำนวน x ในช่องสุดท้ายแทนจำนวนห่อของเส้นบะหมี่ ดังนั้นจึงไม่จำเป็นจะต้องมีหัวข้อแสดงประเภทของอาหารในบรรทัดบนสุดของใบสั่ง พนักงานเสริฟจะดู

เฉพาะบรรทัดล่างซึ่งเป็นการจัดเรียงของเครื่องหมาย x และเครื่องหมาย I (เส้นในแนวตั้ง) ในตัวอย่างนี้จะเห็นว่ามีเครื่องหมาย x เป็นจำนวน 6 ตัว (เท่ากับจำนวนอาหารที่ต้องการสั่ง) และมีเครื่องหมาย I เป็นจำนวน 2 ตัว (เท่ากับจำนวนประเภทของอาหารลบด้วยหนึ่ง) เมื่อตัดบรรทัดบนสุดออก การสั่งอาหารในตัวอย่างข้างบนนี้จะมีลักษณะ xIxxxxIx ซึ่งแทนการสั่งอาหารหนึ่งแบบ จะเห็นว่าการสั่งอาหารหนึ่งแบบจะสมนัยหรือเทียบได้กับการจัดเรียงสลับที่ของเครื่องหมาย x เหมือนกัน 6 ตัว และเครื่องหมาย I เหมือนกัน 2 ตัว ดังนั้น จำนวนวิธีสั่งอาหารจึงเท่ากับจำนวนวิธีจัดเรียงสิ่งของสองชนิด เมื่อของชนิดแรกคือ x เหมือนกันหกตัว ของชนิดที่สองคือเครื่องหมาย I เหมือนกันสองตัว นั่นคือ เท่ากับ P(6+2;6,2) และจากทฤษฎีบท 2.4.3 เราทราบว่า P(6+2;6,2) = C(6+2,6) ดังนั้น จำนวนวิธีสั่งอาหารทั้งหมดคือ

C(6+2,6) = C (จำนวนสิ่งของที่ต้องการเลือก + จำนวนประเภทของสิ่งของ - 1, จำนวนสิ่งของที่ต้องการเลือก) ■

ในกรณีทั่วไป ถ้า k เป็นจำนวนสิ่งของที่ต้องการ และ n เป็นจำนวนประเภทของสิ่งของแล้ว จำนวนวิธีเลือกที่อนุญาตให้เลือกซ้ำได้จะเท่ากับ C(k+n-1,k) นั่นคือเราได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.5.1

เลือกสิ่งของ k ชิ้นจากของ n ชนิด โดยอนุญาตให้เลือกซ้ำกันได้ จะมีวิธีเลือกได้แตกต่างกัน C(k+n-1,k) วิธี

พิสูจน์ เว้นไว้ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

การเลือกของซ้ำกันดังที่กล่าวไปแล้วนั้น เหมือนกับการเรียงสลับที่ของเครื่องหมาย x และเครื่องหมาย I ดังนั้นจึงอาจเป็นไปได้ว่า การจัดเรียงเป็นแบบ

xxIxxxxI หรือ IIxxxxxx

ถ้าการจัดเรียงเป็นแบบแรก แสดงว่าของชนิดที่ 3 ไม่ถูกเลือกเลย นั่นคือสั่งก๋วยเตี๋ยวเส้นเล็ก 2 ห่อ เส้นใหญ่ 4 ห่อ และไม่สั่งเส้นบะหมี่เลย ถ้าการจัดเรียงเป็นแบบหลัง แสดงว่าของชนิดแรกและชนิดที่สองไม่ถูกเลือกเลย ดังนั้น สูตร C(k+n-1,k) ใช้ได้เฉพาะกรณีที่การเลือกไม่มีเงื่อนไขใด ๆ เลย แต่ถ้าการเลือกนั้นมีเงื่อนไข เช่น มีเงื่อนไขว่าของแต่ละชนิดจะต้องถูกเลือกอย่างน้อย 1 ชิ้น ในกรณีนี้ k จะต้องมากกว่าหรือเท่ากับ n (เพราะเหตุใด) และเครื่องหมาย I จะอยู่หน้าสุด หลังสุด หรืออยู่ติดกันไม่ได้ จากตัวอย่างการสั่งอาหารข้างบนนี้ จะเห็นว่ามีช่องว่างระหว่างเครื่องหมาย x ห้าช่อง ซึ่งเท่ากับจำนวนของที่ต้องการเลือกลบด้วย 1 การสั่งแต่ละแบบจะเทียบได้กับการเลือกช่องว่างสองช่องจากห้าช่อง เพื่อใส่เครื่องหมาย I ดังนั้นจำนวนวิธีเลือกทั้งหมดจะเท่ากับ

C(5,2) = C (จำนวนของที่ต้องการเลือก -1, จำนวนชนิดของสิ่งของ -1)

= C(k-1,n-1)

เราอาจทำได้อีกวิธีหนึ่งคือ ขั้นแรก สั่งของอย่างละหนึ่งห่อรวม 3 ห่อก่อน แล้วจึงค่อยสั่งอาหารอีก 6-3 = 3 ห่อ (เพื่อให้ครบ 6 ห่อตามต้องการ) อย่างไม่มีเงื่อนไขใด ๆ ซึ่งจะทำได้

C(3+3-1,3) = C(5,3) = C(5,2) วิธี

ตัวอย่าง 2.5.2 ร้านขายโดนัทแห่งหนึ่ง มีโดนัทให้เลือกซื้อได้ 5 ชนิด ลูกค้าคนหนึ่งต้องการซื้อโดนัทหนึ่งโหล (12 ชิ้น)

ก. เขาจะมีวิธีสั่งโดนัทได้แตกต่างกันกี่วิธี

ข. ถ้ามีเงื่อนไขว่าเขาจะต้องเลือกโดนัทแต่ละชนิดเป็นจำนวนอย่างน้อยหนึ่งชิ้น เขาจะมีวิธีเลือกซื้อโดนัทได้แตกต่างกันกี่วิธี

วิธีทำ ก. เป็นปัญหาการเลือกที่อนุญาตให้เลือกซ้ำได้ ในที่นี้ จำนวนของที่ต้องการคือ k = 12 และจำนวนชนิดคือ n = 5 ดังนั้น จะมีวิธีเลือกซื้อโดนัทได้แตกต่างกัน C(12+5-1,12) = C(16,12) = 1820 วิธี

วิธีทำ ข. เป็นปัญหาการเลือกที่อนุญาตให้เลือกซ้ำได้ โดยมีเงื่อนไขในการเลือก คือจะต้องเลือกโดนัทแต่ละชนิดอย่างน้อยหนึ่งชิ้น จะมีวิธีเลือกได้แตกต่างกัน C(12-1,5-1) = C(11,4) = 330 วิธี ■

ตัวอย่าง 2.5.3 ลูกบอลกองหนึ่งประกอบด้วยลูกบอล 3 สี คือ ขาว แดง และน้ำเงิน ต้องการหยิบลูกบอล 10 ลูก โดยมีเงื่อนไขว่า จะต้องเลือกลูกบอลสีขาวอย่างน้อย 5 ลูก จะมีวิธีหยิบได้แตกต่างกันกี่วิธี

วิธีทำ ขั้นแรกหยิบลูกบอลสีขาวมาก่อน 5 ลูก ส่วนอีก 5 ลูกที่จะต้องหยิบจะเป็นสีอะไรก็ได้ใน 3 สีนั้น นั่นคือการหยิบลูกบอล 5 ลูกหลังนี้เป็นการเลือกหยิบแบบไม่มีเงื่อนไข ซึ่งจะมีวิธีเลือกหยิบได้ C(5+3-1,5) = C(7,5) = 21 วิธี ดังนั้นการหยิบลูกบอล 10 ลูก โดยมีสีขาวอย่างน้อย 5 ลูก จะมีวิธีหยิบได้แตกต่างกัน 21 วิธี ■

ตัวอย่าง 2.5.4 จากตัวอย่าง 2.5.3 ถ้ามีเงื่อนไขว่าจะต้องมีลูกบอลสีแดงอย่างมาก 5 ลูก จะมีวิธีเลือกหยิบได้แตกต่างกันกี่วิธี

วิธีทำ ขั้นแรก เราจะนับจำนวนวิธีหยิบลูกบอล 10 ลูกโดยไม่มีเงื่อนไขใด ๆ ทั้งสิ้น ขั้นที่สองนับจำนวนวิธีหยิบลูกบอล 10 ลูก โดยมีเงื่อนไขว่าจะต้องมีสีแดง 6 ลูก หรือมากกว่า นั่นคือต้องมีสีแดงอย่างน้อย 6 ลูก

นำจำนวนหลังนี้ไปหักออกจากจำนวนแรก ก็จะได้จำนวนวิธีหยิบลูกบอล 10 ลูก โดยมีสีแดงอย่างมาก 5 ลูก

จำนวนวิธีหยิบลูกบอล 10 ลูกแบบไม่มีเงื่อนไขใด ๆ

= C(10+3-1,10) = C(12,10) = 66 วิธี

จำนวนวิธีหยิบลูกบอล 10 ลูกโดยมีเงื่อนไขว่าจะต้องมีสีแดงอย่างน้อย 6 ลูกนั้นทำได้โดย ขั้นแรกหยิบลูกบอลสีแดงมาก่อน 6 ลูก เหลืออีก 4 ลูกที่จะต้องหยิบ ซึ่งจะเป็นสีอะไรก็ได้ นั่นคือ 4 ลูกที่จะต้องหยิบเพิ่มนั้นเลือกได้แบบไม่มีเงื่อนไขใด ๆ ซึ่งจะมีวิธีหยิบได้ C(4+3-1,4) = C(6,4) = 15 วิธี นำจำนวนหลังนี้ไปลบออกจากจำนวนแรก ผลลัพธ์จะเป็นจำนวนวิธีหยิบลูกบอล 10 ลูก โดยมีลูกบอลสีแดงอย่างมาก 5 ลูก ซึ่งเท่ากับ 66-15 = 51 วิธี ■

2.6 ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ

Integer Solution of an Equation

จากตัวอย่าง 2.5.2 ก. เราพบว่าการเลือกซื้อโดนัท 12 ชิ้น จากโดนัทห้าชนิดโดยไม่มีเงื่อนไขนั้น มีวิธีเลือกซื้อได้แตกต่างกันถึง 1820 วิธี

ชนิดที่ 1	ชนิดที่ 2	ชนิดที่ 3	ชนิดที่ 4	ชนิดที่ 5
3	1	0	5	3

การเลือกซื้อโดนัทตามจำนวนในตารางข้างบนนี้ เป็นการเลือกซื้อโดนัทวิธีหนึ่ง คือเลือกโดนัทชนิดที่ 1 เป็นจำนวน 3 ชิ้น ชนิดที่ 2 เป็นจำนวน 1 ชิ้น ชนิดที่ 3 ไม่เลือกเลย ชนิดที่ 4 เป็นจำนวน 5 ชิ้น และชนิดที่ 5 เป็นจำนวน 3 ชิ้น รวมโดนัทที่เลือกทั้งหมดเท่ากับ 12 ชิ้น จะเห็นว่าการ

ซื้อโดนัทแบบไม่มีเงื่อนไขแต่ละวิธีเปรียบได้กับผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มแต่ละชุดของสมการ

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12 \text{ เมื่อ } x_i \geq 0 \text{ สำหรับ } i = 1,2,3,4,5$$

ถ้าการซื้อนั้นมีเงื่อนไขว่าจะต้องเลือกโดนัทแต่ละชนิดอย่างน้อยหนึ่งชิ้น การซื้อแต่ละวิธีก็จะเปรียบได้กับผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มแต่ละชุดของสมการ

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12 \text{ เมื่อ } x_i > 0 \text{ สำหรับ } i = 1,2,3,4,5$$

จากตัวอย่าง 2.5.3 การเลือกลูกบอล 10 ลูกจากกองลูกบอล 3 สี คือ ขาว แดง และน้ำเงิน โดยจะต้องเลือกลูกบอลสีขาวอย่างน้อย 5 ลูก วิธีเลือกแต่ละวิธีจะสมนัยกับผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มแต่ละชุดของสมการ

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10 \text{ เมื่อ } x_1 \geq 5 \text{ และ } x_2, x_3 \geq 0$$

ในที่นี้ x_1 แทนจำนวนลูกบอลสีขาว x_2 และ x_3 แทนจำนวนลูกบอลสีแดงและน้ำเงินตามลำดับ

จะเห็นว่าปัญหาการเลือกที่อนุญาตให้เลือกซ้ำได้นั้นเหมือนกับปัญหาการหาจำนวนชุดผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ ในกรณีทั่ว ๆ ไป ปัญหาการเลือกของ k ชิ้น จากของ n ชนิด โดยอนุญาตให้เลือกซ้ำได้ จะเหมือนกับปัญหาการหาจำนวนชุดผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$ เมื่อ x_i เป็นจำนวนเต็มซึ่งมีค่าเป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดในแต่ละปัญหา

ตัวอย่าง 2.6.1 จงหาจำนวนชุดผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4 \text{ เมื่อ } x_i \geq 0 \text{ สำหรับ } i = 1, 2, 3$$

วิธีทำ เหมือนกับปัญหาการเลือกซื้อโดนัท 4 ชิ้น จากโดนัท 3 ชนิด ดังนั้น สมการที่กำหนดให้นี้มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม C(4+3-1,4) = C(6,4) = 15 ชุด ดังในตารางข้างล่างนี้

x_1 x_2 x_3	x_1 x_2 x_3	x_1 x_2 x_3
4 0 0	2 0 2	0 4 0
3 1 0	1 3 0	0 3 1
3 0 1	1 2 1	0 2 2
2 2 0	1 1 2	0 1 3
2 1 1	1 0 3	0 0 4

■

ตัวอย่าง 2.6.2 จงหาจำนวนชุดผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มของอสมการ

$$x_1+ x_2+ x_3 \leq 11 \text{ เมื่อ } x_i \geq 0 \text{ สำหรับ } i = 1,2,3 \qquad ....(2.5.1)$$

วิธีทำ เราแยกปัญหาออกเป็น 12 กรณี แต่ละกรณีหาจำนวนชุดผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มของแต่ละสมการต่อไปนี้

$$x_1+ x_2+ x_3 = 0 \text{ เมื่อ } x_i \geq 0 \text{ สำหรับ } i = 1,2,3$$

$$x_1+ x_2+ x_3 = 1 \text{ เมื่อ } x_i \geq 0 \text{ สำหรับ } i = 1,2,3$$

$$\vdots$$

$$x_1+ x_2+ x_3 = 11 \text{ เมื่อ } x_i \geq 0 \text{ สำหรับ } i = 1,2,3$$

จำนวนชุดผลเฉลยของสมการแรกคือ C(0+3-1,0) = C(2,0) วิธี

จำนวนชุดผลเฉลยของสมการที่สองคือ C(1+3-1,1) = C(3,1) วิธี

$$\vdots$$

จำนวนชุดผลเฉลยของสมการสุดท้ายคือ C(11+3-1,11)= C(13,11) วิธี

ใช้หลักการบวก เราได้จำนวนชุดผลเฉลยของอสมการ (2.5.1) เท่ากับ

$$C(2,0) + C(3,1) + \ldots + C(13,11)$$

การแก้ปัญหาโดยวิธีนี้ไม่ค่อยสะดวกนัก โดยเฉพาะเมื่อจำนวนเต็มทางขวามือมีค่าสูง ๆ เช่น มีค่า 100 แทนที่จะเป็น 11 เหมือนอย่างในตัวอย่างนี้ จะเห็นว่าปัญหานี้เหมือนกับปัญหาการหาจำนวนชุดผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11 \qquad \text{........(2.5.2)}$$

เมื่อ $x_i \geq 0$ สำหรับ $i = 1,2,3,4$ เพราะเมื่อ $x_4 = 11$ เราได้สมการ $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ เมื่อ $x_4 = 10$ เราได้สมการ $x_1 + x_2 + x_3 = 1$... ในทำนองเดียวกัน เมื่อ $x_4 = 0$ เราได้สมการ $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ เราทราบว่าผลเฉลยของสมการ (2.5.2) มี C(11+4-1,11) = C(14,11) = 1092 ชุด ซึ่งเท่ากับจำนวนชุดผลเฉลยของอสมการ (2.5.1) ดังนั้น C(2,0) + C(3,1) + ... + C(13,11) = C(14,11) = 1092 ■

แบบฝึกหัด

1. ก. จงหาจำนวนวิธีจัดเรียงอักษรในคำ MISSISSIPPI ทีละทั้งหมด
   ข. จงหาจำนวนวิธีจัดเรียงอักษรในคำ MISSISSIPPI ทีละ 5 ตัว
2. จงหาจำนวนวิธีจัดเรียงอักษรในคำ SYSTEM
   ก. โดยไม่มีเงื่อนไขใด ๆ
   ข. เมื่อ S อยู่ติดกัน
   ค. เมื่อ S ไม่อยู่ติดกัน
3. จงหาจำนวนวิธีจัดเรียงอักษรในคำ DECIDED
   ก. โดยไม่มีเงื่อนไขใด ๆ
   ข. เมื่อ D อยู่ติดกัน

ค. เมื่อ D ไม่อยู่ติดกัน

4. จงหาจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 100,000 และ 1,000,000 ซึ่ง

   ก. มีเฉพาะเลข 3, 5 และ 7

   ข. มีเลข 3 สองตัว เลข 5 สองตัว และเลข 7 สองตัว

5. จะมีวิธีเลือกเหรียญ 10 อัน จากกองซึ่งประกอบด้วย เหรียญ 5 สตางค์ เหรียญ 10 สตางค์ เหรียญ 25 สตางค์ และเหรียญ 50 สตางค์ ได้แตกต่างกันกี่วิธี

6. ต้องการสร้างรหัสซึ่งประกอบด้วยอักษร 5 ตัว และเครื่องหมาย - จำนวน 15 เครื่องหมาย โดยมีเงื่อนไขว่าตัวอักษรจะอยู่ติดกันไม่ได้ อยากทราบว่าจะสร้างรหัสซึ่งมีสมบัติดังกล่าวได้แตกต่างกันเป็นจำนวนเท่าใด

7. ชายคนหนึ่งมีเพื่อน 3 คน เขาต้องการเชิญเพื่อนหนึ่งคนมาทานอาหารค่ำเป็นเวลา 6 วัน โดยมีเงื่อนไขว่าจะไม่เชิญเพื่อนคนใดคนหนึ่งเกิน 3 ครั้ง เขาจะมีวิธีเชิญเพื่อนได้แตกต่างกันกี่วิธี

8. ก. จงหาจำนวนวิธีหยิบลูกบอล 10 ลูกจากกองลูกบอลสีแดง ขาว และน้ำเงิน

   ข. จงหาจำนวนวิธีหยิบลูกบอล 10 ลูกจากกองลูกบอลสีแดง ขาว น้ำเงินและชมพู 1 ลูก

   ค. จงหาจำนวนวิธีหยิบลูกบอล 10 ลูก จากกองลูกบอลสีแดง ขาว น้ำเงิน และชมพู 1 ลูก เหลือง 1 ลูก และน้ำตาล 1 ลูก

9. จงหาจำนวนชุดผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ $x + y + z = 10$ เมื่อ $x, y, z \geq 0$

10. จงหาจำนวนชุดผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 28$ เมื่อ

ก. $x_i \geq 0$ สำหรับ $i = 1,2,3,4,5$

ข. $x_i > 0$ สำหรับ $i = 1,2,3,4,5$

ค. $x_i > i$ สำหรับ $i = 1,2,3,4,5$

11. จงหาจำนวนชุดผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \text{ เมื่อ } x_i \geq 0$$

(**ข้อเสนอแนะ** เปลี่ยนตัวแปรใหม่ โดยให้ $y_1 = 2x_1$, $y_2 = x_2$ และ $y_3 = x_3$ แล้วหาผลเฉลยของสมการ $y_1 + y_2 + y_3 = 4$ เมื่อ $y_2 \geq 0$ และ $y_3 \geq 0$ โดยแยกเป็นสามกรณี คือเมื่อ $y_1 = 0$, $y_1 = 2$ และ $y_1 = 4$)

12. จงหาจำนวนชุดผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ $x_1+x_2+x_3 = 0$ เมื่อ $x_i \geq -5$ (**ข้อเสนอแนะ** เปลี่ยนตัวแปรใหม่ โดยให้ $y_1 = x_1+5$, $y_2 = x_2+5$ และ $y_3 = x_3+5$ แล้วหาผลเฉลยของสมการ $(y_1-5) + (y_2-5) + (y_3-5) = 0$ หรือ $y_1+ y_2+ y_3 = 15$ เมื่อ $y_i \geq 0$ สำหรับ $i = 1,2,3$)

13. จงหาจำนวนชุดผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มซึ่งไม่เป็นลบของอสมการ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 < 10$

2.7 การแจกสิ่งของ

Distribution

ที่กล่าวไปแล้วนั้นเป็นเรื่องเกี่ยวกับการนับวิธีจัดเรียงและวิธีเลือกสิ่งของ ในหัวข้อนี้ เราจะพิจารณาถึงการแจกสิ่งของลงในกล่องซึ่งแตกต่างกัน ปัญหาการแจกสิ่งของจะเหมือนหรือใกล้เคียงกับปัญหาการจัด

เรียงและการเลือกสิ่งของ เราจะแยกพิจารณาปัญหาการแจกสิ่งของออกเป็นสองกรณีคือการแจกสิ่งของที่ต่างกันและการแจกสิ่งของที่เหมือนกัน

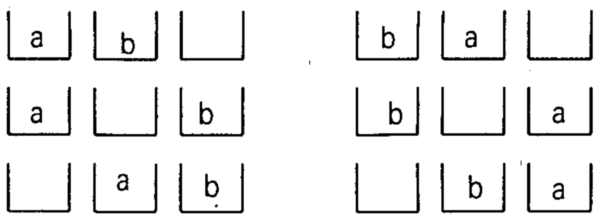
การแจกสิ่งของที่ต่างกัน

Distribution of Distinct Objects

ปัญหาการแจกสิ่งของ k สิ่งที่แตกต่างกันลงในกล่อง n กล่อง ซึ่งแตกต่างกันยังแยกเป็นกรณีย่อย ๆ ได้ 2 กรณี

กรณีที่ 1 เมื่อกล่องแต่ละกล่องจุของได้ไม่เกินหนึ่งชิ้น

เช่น แจกของสองสิ่งแตกต่างกันลงกล่องสามกล่องแตกต่างกัน สมมุติว่าของสองสิ่งนั้นคือ a และ b จะมีวิธีแจกได้ 6 วิธี ได้แก่



ในกรณีทั่วไป ถ้ามีสิ่งของ k สิ่ง ที่จะแจกลงกล่อง n กล่อง จะมีวิธีแจกสิ่งของชิ้นแรกได้ n วิธี เนื่องจากมี n กล่องแตกต่างกัน จะมีวิธีแจกสิ่งของชิ้นที่สองลงในกล่องที่เหลือได้ n-1 วิธี ทั้งนี้เนื่องจากกล่องแต่ละกล่องจุของได้ไม่เกินหนึ่งชิ้น ... และจะมีวิธีแจกสิ่งของชิ้นที่ k ลงในกล่องที่เหลือได้ n-k+1 วิธี ดังนั้น จำนวนวิธีแจกสิ่งของ k สิ่งแตกต่างกันลงในกล่อง n กล่องแตกต่างกัน โดยแต่ละกล่องจุของได้ไม่เกินหนึ่งชิ้น จะเท่ากับ $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = P(n,k)$

ทฤษฎีบท 2.7.1

การแจกของ k สิ่งแตกต่างกันลงในกล่อง n กล่องซึ่งแตกต่างกัน เมื่อกล่องแต่ละกล่องจุของได้ไม่เกินหนึ่งชิ้น จะมีวิธีแจกได้ $P(n,k)$ วิธี

ข้อสังเกต การแจกสิ่งของลักษณะดังกล่าวนี้เหมือนกับการจัดเรียงสิ่งของที่ละ k สิ่ง จากสิ่งของทั้งหมด n สิ่ง การจัดสิ่งของทีละ k สิ่งจากสิ่งของทั้งหมด n สิ่งจะมีความหมายเมื่อ $k \le n$ ส่วนการแจกสิ่งของลงกล่องนั้นจะมีความหมายไม่ว่าจะในกรณี $k \le n$ หรือ $n \le k$ ถ้า $n \le k$ เราอธิบายได้ดังนี้ จะมีวิธีแจกสิ่งของลงในกล่องแรกได้ k วิธี เนื่องจากมีสิ่งของ k ชิ้น แตกต่างกัน จะมีวิธีแจกสิ่งของลงในกล่องที่สองได้ $k-1$ วิธี ... และจะมีวิธีแจกสิ่งของลงในกล่องที่ n ได้ $k-n+1$ วิธี ดังนั้นจำนวนวิธีแจกของทั้งหมดจะเท่ากับ $k(k-1)(k-2) \ldots (k-n+1) = P(k,n)$

กรณีที่ 2 เมื่อกล่องแต่ละกล่องจุของได้มากกว่าหนึ่งชิ้น

เช่น มีของสองสิ่ง คือ a และ b ที่จะแจกลงกล่องสามกล่อง จะมีวิธีแจกได้ 9 วิธี ได้แก่

a b			a	b		b	a	
	a b		a		b	b		a
		a b		a	b		b	a

ในกรณีทั่ว ๆ ไป ถ้ามีสิ่งของ k สิ่ง ที่จะแจกลงกล่อง n กล่อง จะมีวิธีแจกสิ่งของชิ้นแรกได้ n วิธี เนื่องจากมี n กล่องแตกต่างกัน จะมีวิธีแจกสิ่งของชิ้นที่สองลงในกล่องได้ n วิธี เช่นกัน เพราะแจกซ้ำใน

กล่องเดิมได้ จะเห็นว่าเรามีวิธีแจกสิ่งของแต่ละชิ้นได้ n วิธี เหมือนกัน ดังนั้น จำนวนวิธีแจกสิ่งของ k ชิ้น ลงกล่อง n กล่อง เท่ากับ

$$\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{k} = n^k$$

ทฤษฎีบท 2.7.2

การแจกของ k สิ่งแตกต่างกันลงในกล่อง n กล่องซึ่งแตกต่างกัน เมื่ออนุญาตให้กล่องแต่ละกล่องบรรจุของได้มากกว่าหนึ่งชิ้น จะมีวิธีแจกของได้ทั้งหมด n^k วิธี

ตัวอย่าง 2.7.1 จะมีวิธีส่งทูต 100 คน ไปยังประเทศ ต่าง ๆ 5 ประเทศได้กี่วิธี

วิธีทำ คำถามนี้เหมือนกับการแจกของ 100 ชิ้น แตกต่างกันลงในกล่อง 5 กล่องแตกต่างกัน ดังนั้น เรามีวิธีส่งทูตได้ $\underbrace{5 \times 5 \times \cdots \times 5}_{100} = 5^{100}$ วิธี ■

การแจกสิ่งของที่กล่าวมาแล้วข้างต้น เป็นการแจกแบบไม่มีเงื่อนไขใด ๆ ทั้งสิ้น หมายความว่า กล่องบางกล่องอาจจะไม่ได้รับแจกเลยก็ได้ ถ้ามีเงื่อนไขว่ากล่องที่ i จะต้องได้รับแจก k_i ชิ้น การแจกประเภทนี้จะเหมือนกับการจัดเรียงสิ่งของเมื่อมีของซ้ำกันเป็นจำนวนจำกัด เราให้เหตุผลสนับสนุนคำกล่าวอ้างนี้ได้ดังนี้ นำสิ่งของทั้งหมด k ชิ้นมาวางเรียงกัน แทนที่จะเลือกของไปใส่กล่อง เราจะเอาฉลากชื่อกล่องมาติดบนสิ่งของเหล่านั้น สมมุติว่ามีกล่องชื่อ "a" เราจะเอาฉลากชื่อ "a" ไปติดบนของที่ถูกแจกลงในกล่อง "a" จะเห็นว่าของบางอย่างอาจมีฉลากชื่อเดียวกันติดอยู่ก็ได้และการติดฉลากชื่อนั้นจะต้องคำนึงถึงลำดับในการติดด้วยเพราะสิ่งของแต่ละสิ่งแตกต่างกัน สิ่งของที่มีฉลากชื่อเดียวกันติดอยู่ แสดงว่าของนั้นถูกแจกลงในกล่องเดียวกัน ของที่จะแจกมีอยู่ k

ชิ้น ดังนั้น $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$ การแจกสิ่งของที่มีเงื่อนไขดังล่าวนี้จึงเหมือนกับการจัดเรียงฉลากชื่อ k ชื่อ โดยมีชื่อแรก k_1 ชื่อ มีชื่อที่สอง k_2 ชื่อ ... ชื่อที่ n เป็นจำนวน k_n ชื่อ ดังนั้น จะมีวิธีจัดเรียงฉลากชื่อได้แตกต่างกัน $P(k;k_1,k_2,\cdots,k_n) = \dfrac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}$ วิธี เมื่อ $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$

ตัวอย่าง 2.7.2 จะมีวิธีส่งทูต 100 คนไปยังประเทศ 5 ประเทศโดยที่แต่ละประเทศจะต้องมีทูต 20 คน ได้กี่วิธี

วิธีทำ $$P(100;20,20,20,20,20) = \frac{100!}{20!20!20!20!!20!}$$ ■

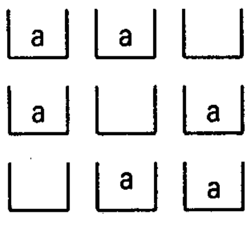
การแจกสิ่งของที่เหมือนกัน

Distribution of Identical Objects

การแจกของ k ชิ้นเหมือนกันลงในกล่อง n กล่องแตกต่างกัน แยกพิจารณาได้เป็นสองกรณีเช่นกัน

กรณีที่ 1 เมื่อกล่องแต่ละกล่องจุของได้ไม่เกินหนึ่งชิ้น

จะเหมือนกับการเลือกกล่อง k กล่อง จากทั้งหมด n กล่อง สำหรับใส่สิ่งของโดยไม่คำนึงถึงลำดับ เพราะสิ่งของที่จะแจกนั้นเหมือนกัน เช่น แจกอักษร a สองตัวเหมือนกันลงกล่องสามกล่องแตกต่างกัน จะแจกได้ 3 วิธี ดังรูป



ดังนั้น การแจกสิ่งของ k สิ่ง ลงกล่อง n กล่องตามเงื่อนไขดังกล่าวนี้มีวิธีแจกได้ C(n,k) วิธี

ทฤษฎีบท 2.7.3

> แจกสิ่งของ k ชิ้นเหมือนกันลงกล่อง n กล่องแตกต่างกัน เมื่อกล่องแต่ละกล่องจุของไม่เกินหนึ่งชิ้น ได้ $C(n,k)$ วิธี

ตัวอย่าง 2.7.3 จงหาจำนวนวิธีจัดเรียงอักษรในคำ CEMETERY โดยที่ E ไม่อยู่ติดกัน

วิธีทำ ขั้นแรก จัดเรียงอักษรห้าตัว คือ C,M,T,R และ Y ได้ 5! วิธี

_ C _ M _ T _ R _ Y _

ขั้นที่สอง นำ E สามตัวเหมือนกัน แจกลงในช่องว่าง 6 ช่อง ที่อยู่หัวท้าย และระหว่างตัวอักษร ซึ่งแจกได้ $C(6,3)$ วิธี ดังนั้น โดยหลักการคูณ จะมีวิธีจัดเรียงอักษรในคำ CEMETERY ได้ทั้งหมด $5!\times C(6,3)$ = 2400 วิธี ■

กรณีที่ 2 เมื่อกล่องแต่ละกล่องจุของได้มากกว่าหนึ่งชิ้น

เช่น แจกอักษร a สองตัวเหมือนกันลงกล่องสามกล่องแตกต่างกัน มีวิธีแจกได้ 6 วิธี ดังนี้

aa				a	a	
	aa			a		a
		aa			a	a

จะเห็นว่าการแจกตามเงื่อนไขดังกล่าวนี้เหมือนกับการเลือกของ n ชิ้นจากของ k ชนิดโดยอนุญาตให้เลือกซ้ำกันได้ คำกล่าวข้างต้นนี้สามารถอธิบายและให้เหตุผลได้โดยใช้วิธีนำฉลากชื่อกล่องไปติดบนสิ่งของ แต่ในที่นี้จะไม่คำนึงถึงลำดับในการติดฉลากเพราะสิ่งของที่แจก

นั้นเหมือนกัน กล่องทั้งหมดมีอยู่ n กล่องแตกต่างกัน นั่นคือมีฉลากชื่ออยู่ n ชื่อแตกต่างกัน ของที่จะแจกมีอยู่ k ชิ้น เราจะต้องเลือกฉลากชื่อ k ชื่อ จาก n ชื่อ โดยเลือกซ้ำกันได้ เพื่อนำไปติดบนของ k ชิ้นเหล่านั้น เราทราบว่าการเลือกของ k ชิ้นจากของ n ชนิด (n ชื่อ) โดยเลือกซ้ำได้ มีวิธีเลือกได้แตกต่างกัน C(k+n-1,k) วิธี ดังนั้น เราได้

ทฤษฎีบท 2.7.4

แจกสิ่งของ k ชิ้นเหมือนกันลงในกล่อง n กล่องแตกต่างกัน เมื่อกล่องแต่ละกล่องจุของได้มากกว่าหนึ่งชิ้น มีวิธีแจกได้ C(k+n-1,k) วิธี

ตัวอย่าง 2.7.4 มีวิธีแจกลูกบอล 6 ลูก(เหมือนกัน)ให้แก่เด็ก 3 คน ได้แตกต่างกันกี่วิธี

วิธีทำ มีวิธีแจกได้ C(6+3-1,6) = C(8,6) = 28 วิธี ■

ตัวอย่าง 2.7.5 จัดเรียงอักษรในคำ CEMETERY โดยที่ E ไม่อยู่ติดกัน ได้กี่วิธี

วิธีทำ ปัญหานี้เป็นปัญหาเดียวกับในตัวอย่าง 2.7.3 ในที่นี้จะแสดงวิธีคิดอีกวิธีหนึ่ง ขั้นแรก จัดเรียงอักษร E สามตัวในแนวเส้นตรงได้หนึ่งวิธี

___ E _x_ E _x_ E ___

ขั้นที่สอง สมมุติว่าอักษร C, M, T, R และ Y เป็นอักษรเหมือนกัน สมมุติว่าเป็น x เหมือนกันห้าตัว ใส่ x ในช่องที่อยู่ระหว่างอักษร E ช่องละหนึ่งตัว เหลือ x สามตัวที่จะต้องนำไปแจกลงในช่องว่าง 4 ช่องที่อยู่หน้า หลัง และระหว่างอักษร E ซึ่งจะมีวิธีแจกได้ C(3+4-1,3) = C(6,3) วิธี หลังจากนั้นเราต้องจัดเรียงอักษรทั้งห้าตัวนั้น ซึ่งจัดเรียงได้ 5! วิธี ดังนั้น จำนวนวิธีจัดเรียงอักษรในคำ CEMETERY เท่ากับ 5!xC(6,3) = 2400 วิธี ■

ตัวอย่าง 2.7.6 จัดเรียงเด็กชาย 7 คน และเด็กหญิง 3 คน ในแนวเส้นตรง โดยต้องมีเด็กชายอยู่หัวแถวและท้ายแถว จะจัดเรียงได้กี่วิธี

วิธีทำ จัดเรียงเด็กหญิง 3 คน ก่อน ซึ่งจัดเรียงได้ 3! วิธี สมมุติว่าเด็กชายทั้ง 7 คนเป็น x เหมือนกัน ใส่ x ในช่องว่างที่อยู่หัวแถวและท้ายแถว

$$\underline{\ x\ }\ ญ_1 \underline{\qquad}\ ญ_2 \underline{\qquad}\ ญ_3 \underline{\ x\ }$$

ช่องละหนึ่งตัว เหลือ x ห้าตัวที่จะต้องนำไปแจกลงในช่องว่างทั้งสี่ช่อง โดยอาจแจกซ้ำช่องได้ ซึ่งมีวิธีแจกได้ C(5+4-1,5) = C(8,5) วิธี นำแต่ละวิธีมาจัดเรียงสลับที่ได้ 7! วิธี ดังนั้น จำนวนวิธีจัดเรียงเด็กทั้งหมด เท่ากับ 3!xC(8,5)x7! = 1693440 วิธี ■

ข้อสังเกต จะเห็นว่าปัญหาทั้งสามรูปแบบข้างล่างนี้สมมูลกัน

1. การเลือกสิ่งของ k ชิ้น จากของ n ชนิด โดยอนุญาตให้เลือกซ้ำได้
2. จำนวนผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$ เมื่อ $x_i \geq 0$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, n$
3. การแจกสิ่งของเหมือนกัน k ชิ้น ลงกล่อง n กล่อง เมื่อกล่องแต่ละกล่องจุของได้มากกว่าหนึ่งชิ้น

แบบฝึกหัด

1. แจกของเล่น 6 ชิ้นแตกต่างกันให้แก่เด็ก 5 คน ได้กี่วิธี
   ก. เมื่อเด็กแต่ละคนได้ของเล่นคนละหนึ่งชิ้น
   ข. เมื่อไม่มีเงื่อนไขใด ๆ
2. แจกส้ม 6 ผลเหมือนกันให้แก่เด็ก 5 คน ได้กี่วิธี

ก. เมื่อเด็กแต่ละคนได้ส้มคนละหนึ่งผล

ข. เมื่อไม่มีเงื่อนไขใด ๆ

4. แจกส้ม 20 ผลและมะม่วง 15 ผลให้แก่เด็ก 5 คน ได้กี่วิธี

ก. เมื่อเด็กแต่ละคนได้ส้มหนึ่งผลและมะม่วงหนึ่งผล

ข. เมื่อไม่มีเงื่อนไขใด ๆ

5. จงหาจำนวนวิธีแจกลูกกอล์ฟ 4 ลูก ลงกล่อง 10 กล่อง เมื่อ

ก. ลูกกอล์ฟแตกต่างกันและกล่องแต่ละกล่องจุลูกกอล์ฟได้ไม่เกิน 1 ลูก

ข. ลูกกอล์ฟเหมือนกันและกล่องแต่ละกล่องจุลูกกอล์ฟไม่เกิน 1 ลูก

ค. ลูกกอล์ฟแตกต่างกันและกล่องแต่ละกล่องจุลูกกอล์ฟได้เป็นจำนวนเท่าใดก็ได้

ง. ลูกกอล์ฟเหมือนกันและกล่องแต่ละกล่องใส่ลูกกอล์ฟได้เป็นจำนวนเท่าใดก็ได้

6. แจกของเล่น 20 ชิ้นต่างกันให้แก่เด็ก 5 คน ได้กี่วิธี ถ้า

ก. ไม่มีเงื่อนไขใด ๆ

ข. เด็กสองคนได้ของเล่นคนละ 7 ชิ้น ส่วนอีกสามคนได้คนละ 2 ชิ้น

ค. เด็กแต่ละคนได้ของเล่นคนละ 4 ชิ้น

7. จงหาจำนวนเลขฐานสองซึ่งประกอบด้วย 0 เป็นจำนวน 3 ตัว และประกอบด้วย 1 เป็นจำนวน 5 ตัวโดยไม่มี 0 อยู่ติดกันเลย

8. จงหาจำนวนเลขฐานสองซึ่งประกอบด้วย 0 เป็นจำนวน p ตัว และ 1 เป็นจำนวน q ตัวเมื่อ $q > p-1$ และไม่มี 0 อยู่ติดกันเลย

9. จงหาจำนวนวิธีแจกของเล่น (เหมือนกัน) 40 ชิ้น ให้เด็ก 4 คนโดย

ก. ไม่มีเงื่อนไขใด ๆ

ข. เด็กแต่ละคนได้ของเล่นคนละ 10 ชิ้น

ค. เด็กแต่ละคนได้ของเล่นอย่างน้อย 1 ชิ้น

10. จงหาจำนวนวิธีแจกช็อกโกแล็ต 15 อัน (เหมือนกัน) ให้ลูก 5 คน โดยลูกคนเล็กได้เพียงหนึ่งหรือสองอันเท่านั้น

11. จงหาจำนวนวิธีจัดเรียงอักษรในคำ VISITING โดยที่อักษร I ไม่อยู่ติดกัน

12. จงหาจำนวนวิธีจัดเรียงอักษร a, e, i, o, u, x, x, x, x, x, x, x, x โดยที่สระไม่อยู่ติดกัน