1 ประวัติและตัวอย่างปัญหา
The History and Some Problems

1.1 บทนำ
Introduction

คอมบินาทอริคเป็นสาขาวิชาคณิตศาสตร์ที่กำลังพัฒนาและเติบโตอย่างรวดเร็ว ทั้งนี้เนื่องมาจากพัฒนาการอันรวดเร็วของวิทยาการคอมพิวเตอร์ หลังจากที่มนุษย์เริ่มรู้จักคอมพิวเตอร์ วิชาคอมบินาทอริคและวิทยาการคอมพิวเตอร์ก็ได้พัฒนาควบคู่กันมาโดยตลอด ความรวดเร็วในการทำงานของคอมพิวเตอร์ในปัจจุบัน ได้ช่วยแก้ปัญหาทางคอมบินาทอริคจำนวนมาก ซึ่งส่วนใหญ่เป็นปัญหาที่ไม่เคยคาดคิดกันมาก่อนว่าจะแก้ปัญหาได้ จนกระทั่งเมื่อเร็ว ๆ นี้ ตัวอย่างเช่น **ปัญหาสี่สี** (four color problem) ซึ่งเป็นปัญหาที่รู้จักกันแพร่หลายในหมู่นักคณิตศาสตร์นับตั้งแต่ปีค.ศ. 1850 จนกระทั่งร้อยกว่าปีต่อมา คือในปีค.ศ. 1976 นักคณิตศาสตร์สองท่านคือ Kenneth Appel และ Wolfgang Haken สามารถพิสูจน์ได้ว่า แผนที่ทุกแผนที่สามารถระบาย

ได้ด้วยสีเพียง 4 สี โดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวณ ด้วยเหตุนี้จึงทำให้คนหันมาสนใจแก้ปัญหาทางคอมบินาทอริคมากขึ้น ในขณะเดียวกัน ความพยายามที่จะพัฒนาวิทยาการคอมพิวเตอร์ก็ก่อให้เกิดปัญหาเชิงคอมบินาทอริคเช่นกัน มนุษย์ได้นำคอมพิวเตอร์มาใช้แก้ปัญหาที่มีข้อมูลจำนวนมาก ๆ ทั้งนี้เป็นที่ทราบกันดีแล้วว่า คอมพิวเตอร์ไม่สามารถทำงานด้วยตัวเองได้ จะต้องอาศัยโปรแกรมหรือชุดคำสั่งในการทำงาน ในการเขียนโปรแกรมนั้น สิ่งที่มักต้องคำนึงถึงคือเรื่องความเร็วและโครงสร้างเชิงตรรกะ (logical structure) ของโปรแกรม การเปรียบเทียบความเร็วของโปรแกรมจะต้องอาศัยการนับจำนวนขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม ส่วนการศึกษาโครงสร้างเชิงตรรกะของโปรแกรมจะต้องอาศัยกราฟ เช่น ใช้เขียนแผนภูมิสายงาน (flow chart) เป็นต้น ซึ่งทั้งการนับและกราฟถือเป็นองค์ประกอบสำคัญของวิชาคอมบินาทอริค ดังนั้น จึงเป็นการยากที่จะแยกวิชาคอมบินาทอริคและวิทยาการคอมพิวเตอร์ออกจากกัน

เหตุผลอีกประการหนึ่งที่ทำให้วิชาคอมบินาทอริคเป็นที่สนใจและพัฒนาอย่างรวดเร็ว สืบเนื่องมาจากการที่วิชาคอมบินาทอริคถูกนำไปประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวาง ในศตวรรษที่ 18 และ 19 แฮมิลตัน (Hamilton) และนักคณิตศาสตร์อื่น ๆ ได้นำเทคนิคเชิงคอมบินาทอริคไปประยุกต์ใช้กับการศึกษาปัญหาปริศนาและการเล่นเกมต่าง ๆ ในศตวรรษที่ 19 เคอร์ชอฟ (Kirchhoff) ได้พัฒนาทฤษฎีกราฟเพื่อนำไปใช้กับปัญหาข่ายงานอิเล็คทรอนิค ส่วนเคย์เลย์ (Cayley) ได้พัฒนาเทคนิคการนับและนำไปใช้กับการศึกษาวิชาเคมีอินทรีย์ ในปัจจุบันเทคนิคต่าง ๆ ในวิชาคอมบินาทอริคได้ถูกนำไปประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวาง เช่นนำไปประยุกต์ใช้ในด้านการคมนาคม การวางแผนอุตสาหกรรม การออก

แบบการทดลอง การศึกษาเรื่องรหัส พันธุศาสตร์ ฟิสิกส์กายภาพ และวิศวกรรมอิเล็คทรอนิค เป็นต้น

วิชาคอมบินาทอริคไม่ใช่วิชาใหม่ แต่เป็นวิชาที่เกิดขึ้นและมีวิวัฒนาการมานานแล้ว ดังตำนานที่เล่าสืบต่อกันมาว่า เมื่อประมาณ 2200 ปีก่อนคริสต์ศักราช จักรพรรดิ์ของจีนชื่อ ยู (yu) ได้ศึกษาจัตุรัสมหัศจรรย์บนหลังเต่า ปัญหาจำนวนมากที่ศึกษากันในอดีตมักมีพื้นฐานหรือจุดกำเนิดมาจากการเล่นเพื่อความบันเทิง ซึ่งต่อมาได้กลายเป็นสิ่งสำคัญและเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาวิทยาศาสตร์ ทั้งวิทยาศาสตร์บริสุทธิ์และวิทยาศาสตร์ประยุกต์ เมื่อ 300 ปีก่อนคริสต์ศักราช ยุคลิด (Euclid) ได้ค้นพบสูตรการกระจายทวินาม (Binomial expansion) สูตรสำหรับการคำนวณหาจำนวนเพอร์มิวเทชันได้ถูกค้นพบมากว่า 2,500 ปีแล้ว และในปี ค.ศ.1100 ก็ได้มีการค้นพบสูตรสำหรับคำนวณหาจำนวนคอมบิเนชัน

กล่าวโดยทั่วไปแล้ว คอมบินาทอริคเป็นวิชาที่ศึกษาเกี่ยวกับการจัดสิ่งของให้เป็นไปตามรูปแบบและเงื่อนไขที่กำหนด เช่น การสร้างจัตุรัสมหัศจรรย์ เป็นต้น จัตุรัสมหัศจรรย์ขนาด 3x3 คือตัวเลข 1 ถึง 9 เรียงเป็น 3 แถว 3 คอลัมน์ โดยมีผลบวกของตัวเลขในแต่ละแถว แต่ละคอลัมน์ และแต่ละแนวทแยงมุมเท่ากัน ปัญหาที่พบในวิชาคอมบินาทอริค มักแบ่งออกได้กว้าง ๆ เป็น 3 ประเภท คือ

1. ปัญหาเกี่ยวกับความเป็นไปได้หรือการมีอยู่ (existence problem) ในการจัดสิ่งของให้มีรูปแบบซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ต้องการนั้น มักไม่แน่ชัดเสมอว่าจะกระทำหรือจัดได้หรือไม่ มีความเป็นไปได้มากน้อยเพียงใด สิ่งเหล่านี้จะต้องศึกษาอย่างละเอียด ถ้า

การจัดนั้นเป็นไปได้หรือมีอยู่ จะต้องสามารถแสดงวิธีจัดให้ดูได้ ถ้าการจัดนั้นเป็นไปไม่ได้ ก็มักจะมีคำถามต่อไปว่า ถ้าจะให้การจัดสิ่งของนั้นเป็นไปได้ จะต้องมีเงื่อนไขใดบังคับไว้บ้าง

2. ปัญหาเกี่ยวกับการแจงนับ (enumeration problem) ถ้าการจัดสิ่งของให้สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ต้องการนั้น มีความเป็นไปได้หรือมีอยู่ การจัดนั้นอาจจะทำได้แตกต่างกันหลายวิธี คำถามที่มักจะพบต่อมาก็คือ จะทำหรือจัดได้ทั้งหมดกี่วิธี ดังนั้นจึงจำเป็นจะต้องมีการแจงนับ ซึ่งจะต้องอาศัยเทคนิคต่าง ๆ ช่วยในการนับ ดังงจะได้กล่าวถึงในบทต่อไป

3. ปัญหาเกี่ยวกับการหาค่าเหมาะที่สุด (optimization problem) การจัดหรือการดำเนินการบางอย่างอาจทำได้หลายวิธี ในจำนวนวิธีที่เป็นไปได้ทั้งหมดนี้ ในบางครั้งเรามักต้องการหาวิธีที่ดีที่สุดที่สอดคล้องกับเกณฑ์ที่ตั้งไว้

1.2 ตัวอย่างปัญหาเชิงคอมบินาทอริค Some Problems of Combinatorics

ปัญหาเชิงคอมบินาทอริคมีจำนวนมากมายนับไม่ถ้วน ตัวอย่างปัญหาที่จะกล่าวถึงในที่นี้ เป็นเพียงส่วนหนึ่งของปัญหาที่ Richard Brualdi ได้ยกตัวอย่างไว้ในหนังสือ Introductory Combinatorics เท่านั้น หลังจากที่ผู้อ่านได้ศึกษาปัญหาเหล่านี้แล้ว คงจะช่วยให้ผู้อ่านเกิดความคิดรวบยอดเกี่ยวกับวิชาคอมบินาทอริคอย่างรวม ๆ ว่าคืออะไร มีความสำคัญอย่างไรและนำไปใช้ประโยชน์ในด้านใดได้บ้าง

ปัญหาการปกคลุมกระดานหมากรุก
Perfect Covers of Chessboards

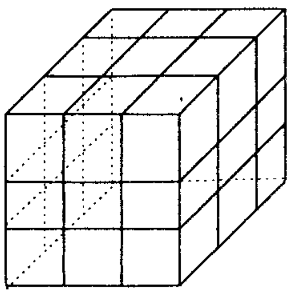
ทุกคนคงจะรู้จักกระดานหมากรุกเป็นอย่างดี กระดานหมากรุกแบ่งออกเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสเล็ก ๆ 64 รูปเรียงกันมี 8 แถวและ 8 คอลัมน์ ระบายแต่ละรูปหรือแต่ละช่องด้วยสี เช่นระบายด้วยสีขาวและสีดำสลับกัน สมมุติว่ามีโดมิโนซึ่งประกอบด้วยสี่เหลี่ยมจัตุรัส 2 รูปต่อเนื่องกัน โดมิโนนี้สามารถวางคลุมตาหมากรุกซึ่งติดกันได้ 2 ช่อง นำโดมิโนซึ่งมีลักษณะดังกล่าว 32 ตัว วางเรียงบนกระดานหมากรุกโดยไม่ให้โดมิโนซ้อนกัน อยากทราบว่าโดมิโนทั้ง 32 ตัวนั้น สามารถปกคลุมกระดานหมากรุกได้ทั้งหมดหรือไม่ ถ้าได้ จะเรียกการปกคลุมดังกล่าวนี้ว่า การปกคลุมที่สมบูรณ์ (perfect cover) คำตอบคือทำได้ ผู้อ่านน่าจะทดลองทำด้วยตนเอง คำถามต่อไปคือ ทำได้แตกต่างกันกี่วิธี ในปี ค.ศ.1961 นักคณิตศาสตร์ชื่อ M.E.Fischer ได้ค้นพบว่ามีวิธีที่แตกต่างกันได้ถึง $2^4 \times (901)^2 = 12,988,816$ วิธี ปัญหานี้สามารถขยายเป็นปัญหาทั่วไปโดยแทนกระดานหมากรุกธรรมดาที่มี 8 แถว 8 คอลัมน์ด้วยกระดานหมากรุกที่มี m แถว n คอลัมน์ อยากทราบว่ากระดานหมากรุกที่มี m แถว n คอลัมน์นี้มีการปกคลุมที่สมบูรณ์หรือไม่ สิ่งที่เห็นได้ชัดอย่างหนึ่งก็คือกระดานหมากรุกที่จะมีการปกคลุมที่สมบูรณ์ได้นั้น จำนวนตาหมากรุกจะต้องเป็นจำนวนคู่ นั่นคือ m หรือ n จำนวนใดจำนวนหนึ่งหรือทั้งสองจำนวนจะต้องเป็นจำนวนคู่ ทั้งนี้เนื่องจากโดมิโนแต่ละตัวปกคลุมตาหมากรุกได้ 2 ช่อง ทั้งนี้มิได้หมายความว่าเมื่อจำนวนตาหมากรุกเป็นจำนวนคู่แล้วกระดานหมากรุกนั้นจะต้องมีการปกคลุมที่สมบูรณ์เสมอไป ลองพิจารณากระดานหมากรุกขนาด 8x8 แต่ละช่องระบายด้วยสีขาวและดำสลับกัน จะเห็นว่ามีช่องสีขาว 32 ช่องและช่อง

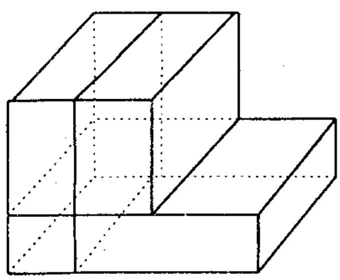
สีดำ 32 ช่องเท่ากัน ถ้าตัดช่อง 2 ช่องที่อยู่ตรงข้ามกันบนแนวทแยงมุมออก นั่นคือตัดช่องที่อยู่มุมบนขวาสุด และช่องที่อยู่มุมล่างซ้ายสุด จำนวนตาหมากรุกซึ่งเดิมมี 64 ช่องจะเหลือเพียง 62 ช่อง อยากทราบว่ากระดานหมากรุกซึ่งมีลักษณะดังกล่าวนี้จะมีการปกคลุมที่สมบูรณ์หรือไม่ เพราะเหตุใด คำตอบคือไม่มี ทั้งนี้เนื่องจากว่าโดมิโนแต่ละตัวจะต้องปกคลุมตาหมากรุกสองช่องติดกันซึ่งมีสีต่างกัน ถ้าพิจารณาให้ละเอียดจะพบว่าช่อง 2 ช่องที่ตัดออกไปนั้นเป็นสีเดียวกัน สมมุติว่าเป็นสีดำทั้งคู่ หลังจากตัดแล้วจะมีช่องสีขาวเท่าเดิมคือ 32 ช่อง ส่วนช่องสีดำจะลดเหลือ 30 ช่อง ซึ่งเป็นไปไม่ได้ที่จะมีการปกคลุมที่สมบูรณ์ ปัญหาการปกคลุมกระดานหมากรุกด้วยโดมิโนนี้จะเหมือนกับปัญหาการดูดซึมไดอะทอมิคโมเลกุล (diatomic molecules) บนพื้นผิวในวิชาฟิสิกส์นั่นเอง

ปัญหาการตัดลูกบาศก์

Cutting a Cube

รูปลูกบาศก์รูปหนึ่งมีขนาด 3x3x3 ลูกบาศก์ฟุต ต้องการตัดออกเป็นรูปลูกบาศก์เล็ก ๆ ขนาด 1x1x1 ลูกบาศก์ฟุต จะได้ลูกบาศก์ทั้งหมด 27 รูป อยากทราบว่าจะต้องตัดกี่ครั้ง วิธีหนึ่งที่ทำได้คือตัดสองครั้งในแต่ละทิศทางรวมทั้งหมด 6 ครั้ง ดังในรูปซ้ายมือ



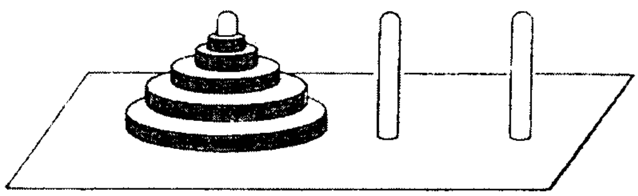


เป็นที่น่าสงสัยว่าจะเป็นไปได้หรือไม่ที่จะใช้การตัดน้อยกว่าหกครั้งเพื่อให้ได้ลูกบาศก์เล็ก ๆ 27 รูปตามต้องการ ถ้าลองนึกภาพการตัดที่อนุญาตให้เคลื่อนย้ายส่วนที่ถูกตัดแล้วมาวางซ้อนกันได้ เพื่อให้การตัดครั้งต่อไปตัดได้เนื้อที่มากกว่าครั้งก่อน ดังรูปทางขวามือ จำนวนการตัดน่าจะน้อยกว่า 6 ครั้ง คำตอบที่แท้จริงคือจะตัดน้อยกว่า 6 ครั้งไม่ได้ เหตุผลที่น่าทึ่งคือเนื่องจากลูกบาศก์รูปเล็กที่อยู่ใจกลางของรูปใหญ่จะต้องมีด้าน 6 ด้าน ดังนั้นการตัดจะต้องเป็น 6 ครั้ง น้อยกว่า 6 ครั้งไม่ได้ การให้เหตุผลทำนองดังกล่าวนี้เราจะกล่าวว่าเป็นการให้เหตุผลเชิงคอมบินาทอริค

ปัญหาหอคอยแห่งฮานอย

Tower of Hanoi

ปัญหาหอคอยแห่งฮานอยมีกำเนิดมาตั้งแต่ปี ค.ศ.1883 ปัญหามีดังนี้ มีหลัก 3 หลัก มีแผ่นกลม n แผ่น แต่ละแผ่นมีขนาดแตกต่างกัน และมีรูตรงกลางสำหรับสวมลงในหลักได้ แผ่นกลมทั้งหมดนี้เรียงซ้อนกันจากใหญ่ขึ้นไปหาเล็กในหลักหลักหนึ่ง แผ่นใหญ่จะอยู่ล่างสุด แผ่นเล็กสุดจะอยู่ที่ยอด ดังรูปข้างล่างนี้



ต้องการย้ายแผ่นกลมทั้งหมดนี้ทีละแผ่นจากหลักเริ่มแรกไปยังอีกหลักหนึ่ง โดยใช้หลักที่เหลือเป็นทางผ่าน ในการย้ายแผ่นกลมทีละแผ่นนั้นมีเงื่อนไขว่า แผ่นใหญ่จะวางซ้อนอยู่บนแผ่นซึ่งเล็กกว่าไม่ได้ อยากทราบว่าจะต้องทำการโยกย้ายแผ่นกลมเป็นจำนวนอย่างน้อยที่สุดกี่ครั้ง

เราจะแสดงการแก้ปัญหาหอคอยแห่งฮานอยนี้โดยอาศัยความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (recurrence relation) ซึ่งจะกล่าวถึงต่อไปในบทที่หก

ปัญหาจัตุรัสมหัสจรรย์

Magic Squares

จัตุรัสมหัศจรรย์ขนาด nxn คือกลุ่มของตัวเลข 1, 2, 3, ... n^2 ซึ่งเขียนเรียงกันเป็นแถวลำดับ จำนวน n แถว แถวละ n ตัว โดยมีเงื่อนไขว่าหลังจากที่จัดเรียงเรียบร้อยแล้ว ผลบวกของตัวเลขที่อยู่ในแต่ละแถว ผลบวกของตัวเลขที่อยู่ในแต่ละคอลัมน์ และผลบวกของตัวเลขที่อยู่ในแต่ละแนวทแยงมุมจะต้องเท่ากัน ผลบวกที่เท่ากันนี้จะเรียกว่า ผลบวกมหัศจรรย์ (magic sum) และจะแทนผลบวกมหัศจรรย์นี้ด้วย S ถ้าบวกตัวเลขทุกตัวในจัตุรัสมหัศจรรย์จะได้

$$1+2+3+\cdots+n^2=\frac{n^2(n^2+1)}{2}$$

ซึ่งเป็นผลบวกของอนุกรมเลขคณิต การหาผลบวกของตัวเลขในจัตุรัสมหัศจรรย์ สามารถทำได้อีกแบบหนึ่งคือ หาผลบวกของตัวเลขในแต่ละแถวก่อน ซึ่งจะเท่ากับ S แล้วจึงนำผลบวกของแต่ละแถวมารวมกัน ซึ่งจะได้ nS เนื่องจากมี n แถว ดังนั้น

$$nS=\frac{n^2(n^2+1)}{2} \qquad \text{หรือ} \qquad S=\frac{n(n^2+1)}{2}$$

สูตรที่ได้นี้จะเป็นสูตรสำหรับหาผลบวกมหัศจรรย์ของจัตุรัสมหัศจรรย์ขนาดต่าง ๆ ตัวอย่างเช่น จัตุรัสมหัศจรรย์ขนาด 2x2 จะต้องมีผลบวกมหัศจรรย์เท่ากับ $\frac{2(2^2+1)}{2}=5$ หมายความว่าผลบวกในแต่

ละแถว ผลบวกในแต่ละคอลัมน์ และผลบวกในแต่ละแนวทแยงจะต้องเท่ากับ 5 จากการตรวจสอบโดยวิธีลองผิดลองถูก จะพบว่าจัตุรัสมหัศจรรย์ขนาด 2x2 ไม่มี กล่าวคือไม่สามารถสร้างได้ เพราะไม่ว่าเราจะนำตัวเลข 1 และ 2 มาเรียงกันในลักษณะใด ผลบวกในแต่ละแถว ผลบวกในแต่ละคอลัมน์และผลบวกในแต่ละแนวทแยงจะไม่เท่ากัน และไม่เท่ากับ 5 จัตุรัสมหัศจรรย์ขนาดอื่น ๆ ที่นอกเหนือจากขนาด 2x2 สามารถสร้างได้ซึ่งจะมีวิธีสร้างแตกต่างกันออกไป ในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะวิธีสร้างจัตุรัสมหัศจรรย์ซึ่งมีขนาด nxn สำหรับ n ที่เป็นจำนวนคี่จะมีวิธีสร้างคล้ายกัน ในที่นี้จะแสดงวิธีสร้างจัตุรัสมหัศจรรย์ขนาด 5x5 ให้ดูเป็นตัวอย่าง

ภาพแสดงการสร้างจัตุรัสมหัศจรรย์ขนาด 5x5

			2		
		1			
					4
				3	
			2		

(1)

		1	8	
	5	7		
4	6			
				3
			2	

(2)

				9	
		1	8		
	5	7			
4	6				
				3	10
			2	9	

(3)

					16
		1	8	15	
	5	7	14		
4	6	13			
10	12			3	
11			2	9	

(4)

		1	8	15	17
	5	7	14	16	
4	6	13			
10	12			3	
11			2	9	

(5)

	18			
17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

(6)

เริ่มต้นด้วยการสร้างช่องตาราง ซึ่งมี 5 แถว และ 5 คอลัมน์ บนแผ่นกระดาษดังรูป ถ้านำกระดาษที่ทำช่องตารางแล้วนั้นงอโค้งเข้าหากันในแนวนอน แถวที่หนึ่งจะต่อกับแถวที่ 5 ดังนั้นให้ถือว่าแถวที่อยู่ถัดจากแถวที่หนึ่งขึ้นไปด้านบนคือแถวที่ 5 ในทำนองเดียวกัน ถ้างอโค้งกระดาษนั้นในแนวตั้ง คอลัมน์ที่ 1 จะต่อกับคอลัมน์ที่ 5 ดังนั้นให้ถือว่าคอลัมน์ที่ 1 คือคอลัมน์ที่อยู่ถัดจากคอลัมน์ที่ 5 ไปทางด้านขวามือ ต่อไปให้ปฏิบัติดังนี้ ใส่ตัวเลข 1 ลงในช่องกลางของแถวที่หนึ่ง หลังจากนั้นเขียนตัวเลขเรียงตามลำดับในแนวทแยงมุมที่ชี้ไปในทิศตะวันออกเฉียงเหนือ โดยมีเงื่อนไขดังนี้ ถ้าตัวเลขที่จะเขียนต่อไปนั้นไปตกอยู่ในช่องซึ่งมีตัวเลขอยู่ก่อนแล้วให้เลื่อนลงมาเขียนไว้ในช่องที่อยู่ใต้ช่องสุดท้ายที่เพิ่งเติมตัวเลขลงไป ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะครบทุกช่อง

ปัญหานายทหาร 36 นาย

36 officer Problem

ปัญหานี้เกิดขึ้นในศตวรรษที่ 18 โดยนักคณิตศาสตร์ชาวสวิส ชื่อ ออยเลอร์ (Leonhard Euler) ปัญหาคือ มีนายทหาร 36 นายมาจากกรมทหาร 6 กรม กรมละ 6 ยศแตกต่างกัน ในการจัดนายทหารทั้ง 36

นายให้ยืนเข้าแถวหน้ากระดานเรียง 6 คือจัดเป็น 6 แถว 6 คอลัมน์ โดยมีเงื่อนไขว่านายทหารทั้ง 6 คนในแต่ละแถวจะต้องมาจากต่างกรมและมียศต่างกัน และนายทหารทั้ง 6 นายในแต่ละคอลัมน์จะต้องมาจากต่างกรมและมียศต่างกัน อยากทราบว่าการจัดนายทหารในลักษณะดังกล่าวจะเป็นไปได้หรือไม่ ปัญหาทำนองนี้เป็นที่สนใจของนักคณิตศาสตร์ เนื่องจากวิธีการแก้ปัญหาดังกล่าวนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในเรื่องการออกแบบการทดลอง (experimental design) ในวิชาสถิติได้

ถ้าแทนนายทหารแต่ละนายด้วยคู่ลำดับ (i,j) โดยที่ i = 1,2,...,6 แทนกรมที่มาของทหาร และ j = 1,2...,6 แทนยศของทหาร ปัญหาดังกล่าวข้างต้นนี้เปรียบเทียบได้กับปัญหาในการหาจัตุรัสละตินขนาด 6x6 สองรูป จัตุรัสแรกใช้อธิบายกรมที่มาของทหาร นั่นคือแต่ละแถวแต่ละคอลัมน์จะต้องประกอบด้วยเลข 1,2,...,6 แตกต่างกัน จัตุรัสที่สองจะมีลักษณะเช่นเดียวกับจัตุรัสแรกแต่ใช้อธิบายยศของนายทหาร นำจตุรัสทั้งสองมาประกบกันเป็นจัตุรัสใหม่ สมาชิกของจัตุรัสใหม่นี้มีลักษณะเป็นเลขคู่ลำดับ (i,j) โดยที่ i มาจากจัตุรัสแรก และ j มาจากจัตุรัสที่สองที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกัน เพื่อให้ง่ายต่อการอธิบาย ขอยกตัวอย่างง่าย ๆ ต่อไปนี้ สมมุติว่ามีนายทหารเพียง 9 นาย ซึ่งมาจาก 3 กรม และมี 3 ยศแตกต่างกัน ลองสังเกตจัตุรัสต่อไปนี้

$$\begin{array}{|ccc|}\hline 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array}\ \begin{array}{|ccc|}\hline 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|ccc|}\hline (1,1) & (2,2) & (3,3) \\ (3,2) & (1,3) & (2,1) \\ (2,3) & (3,1) & (1,2) \\ \hline \end{array}$$

กรม ยศ

เรียกจัตุรัสสองจัตุรัสทางซ้ายมือว่าจัตุรัสละตินขนาด 3x3 (กล่าวสั้น ๆ ว่าขนาด 3) จัตุรัสทางขวามือเกิดจากการประกบกันของจัตุรัสสองจัตุรัสทางซ้ายมือ เราจะกล่าวว่าจัตุรัสละตินทั้งสองนั้นตั้งฉากกัน(orthogonal) ถ้าหลังจากที่ประกบกันแล้วจัตุรัสที่ได้ใหม่ประกอบด้วยคู่ลำดับ (i,j) ที่เป็นไปได้ทั้งหมด นั่นคือไม่มีคู่ลำดับใดซ้ำกันเลย จะเห็นว่าปัญหานายทหาร 36 นายของออยเลอร์นั้นเปรียบได้กับปัญหาการหาจัตุรัสละตินขนาด 6x6 ซึ่งตั้งฉากกันนั่นเอง

เราสามารถตรวจสอบได้ไม่ยากนักว่าไม่มีจัตุรัสละตินขนาด 2x2 ที่ตั้งฉากกัน ทั้งนี้เนื่องจากจัตุรัสละตินขนาด 2x2 มีเพียง 2 จัตุรัสที่ต่างกัน คือ

1	2
2	1

และ

2	1
1	2

เมื่อนำจัตุรัสละตินทั้งสองมาประกบกันจะได้

(1,2)	(2,1)
(2,1)	(1,2)

จะเห็นว่าจัตุรัสที่เกิดจากการประกบกันนี้ มีคู่ลำดับไม่ครบทั้งหมด นั่นคือยังขาดคู่ลำดับ(1,1) และ (2,2)

ออยเลอร์ได้แสดงวิธีสร้างจัตุรัสละตินขนาด n ที่ตั้งฉากกัน เมื่อ n เป็นเลขคี่หรือเป็นเลขที่มี 4 เป็นตัวประกอบ เช่น 8,12,16 เป็นต้น จะเห็นว่าตัวเลขดังกล่าวไม่รวมถึงกรณี n = 6 จากการลองผิดลองถูก ออยเลอร์ได้สรุปและตั้งเป็นข้อคาดเดา (conjecture) ว่าไม่มีจัตุรัสละตินขนาด 6,10,14,18,...,4k+2,... ในปี1901 แทร์รี (G.Tarry) ได้พิสูจน์โดยวิธีแจกแจง

จนหมดสิ้น และสามารถสรุปได้ว่าข้อคาดเดาของออยเลอร์ถูกต้องเมื่อ n = 6 ต่อมาในราวปี 1960 นักคณิตศาสตร์ 3 ท่านคือ R.C.Bose, E.T. Parker และ S.S.Shrikhande สามารถพิสูจน์ได้ว่าข้อคาดเดาของออยเลอร์ไม่ถูกต้องสำหรับ n = 4k+2 เมื่อ k > 2 ในบทที่ 9 เราจะศึกษาถึงวิธีสร้างจัตุรัสละตินและทฤษฎีบทบางบทที่เกี่ยวกับการมีอยู่ของจัตุรัสละตินซึ่งตั้งฉากกัน

ปัญหาสี 4 สี

Four Color Problem

ลองพิจารณาแผนที่แสดงที่ตั้งของประเทศต่าง ๆ บนผิวโลก ปกติแล้วประเทศที่มีพรมแดนติดต่อกันจะถูกระบายด้วยสีต่างกันเพื่อให้สะดวกต่อการอ่านแผนที่ อยากทราบว่าจะต้องใช้สีเป็นจำนวนอย่างน้อยที่สุดกี่สี ปัญหานี้เคยเป็นปัญหาที่นิยมศึกษากันในหมู่นักคณิตศาสตร์ ในปี ค.ศ. 1850 Francis Guthric เป็นผู้ตั้งปัญหานี้ขึ้น ซึ่งขณะนั้นยังเป็นนักศึกษาอยู่ในปี 1890 P.J.Heawood สามารถพิสูจน์ได้ว่าสี 5 สีจะเพียงพอสำหรับการระบายแผนที่เสมอ ต่อมาในปี ค.ศ. 1976 นักคณิตศาสตร์สองท่านคือ Kenneth Appel และ Wolfgang Haken ได้แถลงว่าการใช้สี 4 สีนั้นเพียงพอสำหรับการระบายแผนที่เสมอ การพิสูจน์ของนักคณิตศาสตร์สองท่านนี้ได้ใช้คอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวณโดยใช้เวลาในการคำนวณกว่า 1200 ชั่วโมง

จากตัวอย่างปัญหาที่กล่าวมาทั้งหมดนี้ เราพอจะสรุปได้ว่าปัญหาส่วนใหญ่ในวิชาคอมบินาทอริค จะเกี่ยวข้องกับการจัดเซตจำกัด (finite set) ให้เป็นไปตามรูปแบบที่ต้องการ ในปัจจุบันเป็นที่เข้าใจกันว่า วิชาคอมบินาทอริค แบ่งออกเป็นสามส่วน คือ

1. ปัญหาเชิงคอมบินาทอริคดั้งเดิม ซึ่งได้แก่ ปัญหาการเลือกและการจัดเรียง สัมประสิทธิ์ทวินาม ปัญหาการแจงนับ และเอกลักษณ์เชิงคอมบินาทอริค เป็นต้น

2. โครงรูป (configuration) เชิงคอมบินาทอริค ซึ่งได้แก่ บล็อกดีไซน์จัตุรัสละติน เมทริกซ์บังเกิด (incidence matrix) ฮาดามาร์ดเมทริกซ์ (Hadamard matrix) เรขาคณิตจำกัด การอัด (packing) และการคลุม (covering) เป็นต้น

3. ทฤษฎีกราฟ