บทที่ 7
Probability

คำว่า "**probability**" หรือ "**chance**" หรือ "โอกาส" หรือ "ความน่าจะเป็น" ถูกนำมาใช้ในกรณีที่เหตุการณ์ที่จะเกิดขึ้นนั้นมันไม่แน่ไม่นอน เพราะฉะนั้นเมื่อเกิดความไม่แน่ใจกับเหตุการณ์ที่มันจะเกิดขึ้น ก็จำเป็นจะต้องมีอะไรสักอย่างมาช่วยในการตัดสินใจหรือทำนายว่าเหตุการณ์ที่มันจะเกิดขึ้นได้นั้นมีอะไรบ้าง มีโอกาสมากน้อยแค่ไหน

ความเข้าใจเกี่ยวกับกฎเกณฑ์ของ **probability** เป็นสิ่งที่จำเป็นที่จะช่วยให้เกิดความเข้าใจได้ดีขึ้นถึงขบวนการถ่ายทอดลักษณะต่าง ๆ จะเห็นได้ว่าในวิชาพันธุศาสตร์นั้นจะเกี่ยวข้องกับ **ratio** ของ **phenotypes** และ **genotypes** ต่าง ๆ เสมอ ซึ่ง **ratio** เหล่านี้เกิดขึ้นจากความสัมพันธ์ระหว่าง **probabilities** ด้วยกัน เช่นมี **probability** ที่ยีนส์จะแยกออกจากกันและเข้าจัดเรียงกันใน **gametes** ตามกฎของเมนเดล แล้วมี **probability** ที่ **gametes** จะมารวมกันในการสร้าง **zygote** อีกที ซึ่งสิ่งเหล่านี้เป็นไปโดย **chance** ทั้งสิ้น จึงไม่สามารถจะทำนายการเกิดของมันได้อย่างแน่นอน เช่นในการโยนเหรียญอันหนึ่งไม่สามารถจะรับรองได้ว่ามันจะต้องออกหัวก่อนก้อยเสมอ หรือไม่สามารถจะรับรองได้ว่าจะมี **genotype** ที่แน่นอนอันใดอันหนึ่งเกิดขึ้นมา เมื่อมีหลาย ๆ **genotypes** ด้วยกันที่สามารถจะเกิดขึ้นได้ สิ่งที่จะพูดได้ก็เพียงแต่จะบอกว่ามันมี **probability** เท่าไหร่ที่จะเกิดขึ้น

<u>คำจำกัดความของ **probability**</u>

อาจจะให้คำจำกัดความของ **probability** ว่าเป็นสัดส่วนของจำนวนครั้งที่เหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่งจะเกิดขึ้นได้จากจำนวนเหตุการณ์ทั้งหมด เช่น ถ้าเหตุการณ์ **A** สามารถจะเกิดขึ้นได้ใน **m** ครั้งในจำนวนทั้งหมด **n** ครั้ง **probability** ของมันจะเท่ากับ $\frac{m}{n}$ หรือถ้าให้ **A** เป็นเหตุการณ์ที่เราต้องการให้เกิดขึ้นได้

$$P\,(\text{เหตุการณ์ A}) = \frac{\text{number of favorable cases}}{\text{total number of cases}}$$

<u>ตัวอย่าง</u> สมมุติว่าในถุง ๆ หนึ่งมีลูกบอลล์อยู่ 13 ลูก เป็นสีเหลือง 3 ลูก สีเขียว 4 ลูก และสีขาว 6 ลูก ถ้าหากเราจะล้วงลูกบอลล์ออกมาสักลูกหนึ่ง อยากทราบว่าจะมีโอกาสเท่าไรที่มันจะเป็นสีเหลือง

ถ้าหากว่าคนล้วงไม่มีความลำเอียงหรือลูกบอลล์ทั้งหมดต่างก็มีโอกาสที่จะได้รับการล้วงออกมาเท่า ๆ กัน

∴ โอกาสที่จะได้สีเหลือง = $\frac{\text{จำนวนลูกบอลสีเหลือง}}{\text{จำนวนลูกบอลทั้งหมด}}$ = $\frac{3}{13}$

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้าจะดึงไพ่ใบหนึ่งออกมาจากไพ่หนึ่งสำรับ ถามว่าจะมีโอกาสแค่ไหนที่ไพ่ใบนั้นจะเป็น Ace

ในไพ่หนึ่งสำรับจะมีอยู่ 52 ใบ และมี Ace อยู่ 4 ใบ

ดังนั้น โอกาสที่จะดึงไพ่ออกมาหนึ่งใบเป็น Ace = $\frac{4}{52}$ = $\frac{1}{13}$

<u>ตัวอย่าง</u> ถามว่า sperm ตัวหนึ่งจะมีโอกาสสักเท่าไรที่จะมี x-chromosome ถ้าหากว่า sperm ที่มี x และ y chromosomes ต่างก็ถูกสร้างขึ้นมาในจำนวนเท่า ๆ กัน

คำตอบคือ $\frac{1}{2}$

จากคำจำกัดความของ probability เราก็สรุปลงได้ว่า

1. probability ของเหตุการณ์ใด ๆ ก็ตามจะมีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ 1 (หรือ 0 และ 100%) ถ้าหากเหตุการณ์นั้นเกิดขึ้นได้แน่นอน probability = 1 (เช่น ล้วงให้ได้ลูกบอลสีขาวในถุงที่มีแต่ลูกบอลสีขาวล้วน ๆ หรือ probability ของ gamete ที่มี allele a จาก genotype aa) และถ้าหากเหตุการณ์นั้นไม่มีโอกาสจะเกิดขึ้นได้เลย probability = 0 (เช่น ล้วงให้ได้ลูกบอลสีแดงในถุงที่มีแต่ลูกบอลสีขาวหรือ probability ของ gamete ที่มี allele A จาก genotype aa)

2. ถ้า probability ของเหตุการณ์ที่จะเกิดขึ้นได้เป็น p probability ของเหตุการณ์ที่ไม่เกิดขึ้นจะเท่ากับ 1-p = q ดังนั้น p+q = 1

เราอาจบอกค่าของ probability เป็นเศษส่วน หรือเปอร์เซ็นต์ หรือจุดทศนิยมก็ได้

<u>**Probability Rules**</u>

ในการหา genetic ratio เราจำเป็นจะต้องเกี่ยวข้องกับกฎของ probability 2 ข้อ คือ

<u>กฎข้อที่หนึ่ง</u> ถ้าเหตุการณ์สองอย่างหรือมากกว่าเป็นอิสระต่อกัน probability ที่เหตุการณ์ทั้งสองหรือมากกว่าจะเกิดขึ้นร่วมกัน จะเท่ากับผลคูณของ probability ของแต่ละเหตุการณ์

ความเป็นอิสระต่อกันหมายความว่าการเกิดขึ้นของเหตุการณ์หนึ่งจะไม่ไปมีอิทธิพลต่อการเกิดขึ้นของอีกเหตุการณ์หนึ่ง

สมมุติผสม **Aa** กับ **aa** จะเห็นว่า **Aa** สร้าง **gametes** ได้สองชนิดใน **ratio** **1:1** หรือโอกาสที่จะได้ **gamete A** $= \frac{1}{2}$ และ **gamete a** $= \frac{1}{2}$ ส่วน **aa** จะให้ **gamete** ชนิดเดียวมีโอกาสที่จะเกิดขึ้น $= 1$ จะเห็นว่าในชั่วลูกโอกาสที่จะได้ **genotype Aa** $= \frac{1}{2}$ (เป็นผลคูณจาก $\frac{1}{2}A \times 1a = \frac{1}{2}Aa$) และโอกาสที่จะได้ **aa** $= \frac{1}{2}$ (เป็นผลคูณจาก $\frac{1}{2}a \times 1a = \frac{1}{2}aa$) หรือโอกาสที่จะได้ **phenotype A** = โอกาสที่จะได้ **phenotype a** $= \frac{1}{2}$

หรือ โอกาสที่จะโยนเหรียญอันหนึ่งให้ได้หัวทั้งสองที $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

โอกาสที่จะโยนเหรียญ 2 อัน พร้อมกันได้หัวทั้งสอง $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

โอกาสที่จะถูกลอตเตอรี่เลขท้าย 2 ตัว $= \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$

ถ้าเรานำผลการทดลองกับถั่วของเมนเดลมาพิจารณาดู

ในการผสมระหว่างต้นถั่วที่มีเมล็ดกลมกับเมล็ดย่นในชั่ว F_2 โอกาสที่จะได้ต้นถั่วเมล็ดกลม $= \frac{3}{4}$ และโอกาสที่จะได้ต้นถั่วเมล็ดย่น $= \frac{1}{4}$ และในการผสมระหว่างต้นถั่วที่มีเมล็ดสีเหลืองกับต้นที่มีเมล็ดสีเขียว ในชั่ว F_2 โอกาสที่จะได้ต้นถั่วที่มีเมล็ดสีเหลือง $= \frac{3}{4}$ และต้นถั่วที่มีเมล็ดสีเขียว $= \frac{1}{4}$

ถ้าหากว่าลักษณะทั้งสองหรือยีนส์ทั้งสองคู่เป็นอิสระต่อกันจริง ๆ แล้ว ใน **dihybrid cross** เราสามารถจะหาโอกาสที่ต้นถั่วจะมีลักษณะสองอย่างมาอยู่ด้วยกันได้ดังนี้

เมล็ดกลม สีเหลือง $= \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$

เมล็ดกลม สีเขียว $= \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$

เมล็ดย่น สีเหลือง $= \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$

เมล็ดย่น สีเขียว $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

ได้อัตราส่วนเช่นเดียวกับที่ได้จาก **checkerboard** หรือ **branching**

ส่วนโอกาสที่จะเกิด **genotypes** ต่าง ๆ ก็หาได้เช่นเดียวกัน

$$RR \times rr \qquad 1(R) \quad 1(r) \;\downarrow\; Rr$$

$$Rr \times Rr \qquad \tfrac{1}{2}(R),\ \tfrac{1}{2}(r) \quad \tfrac{1}{2}(R),\ \tfrac{1}{2}(r) \;\downarrow\; \frac{1}{4}RR + \frac{2}{4}Rr + \frac{1}{4}rr$$

$$YY \times yy \qquad 1(Y) \quad 1(y) \;\downarrow\; Yy$$

$$Yy \times Yy \qquad \tfrac{1}{2}(Y),\ \tfrac{1}{2}(y) \quad \tfrac{1}{2}(Y),\ \tfrac{1}{2}(y) \;\downarrow\; \frac{1}{4}YY + \frac{2}{4}Yy + \frac{1}{4}yy$$

$$\frac{1}{4}RR \times \frac{1}{4}YY = \frac{1}{16}RRYY$$

$$\frac{1}{4}RR \times \frac{2}{4}Yy = \frac{2}{16}RRYy$$

$$\frac{1}{4}RR \times \frac{1}{4}yy = \frac{1}{16}RRyy$$

$$\frac{2}{4}Rr \times \frac{1}{4}YY = \frac{2}{16}RrYY$$

$$\frac{2}{4}Rr \times \frac{2}{4}Yy = \frac{4}{16}RrYy$$

$$\frac{2}{4}Rr \times \frac{1}{4}yy = \frac{2}{16}Rryy$$

$$\frac{1}{4}rr \times \frac{1}{4}YY = \frac{1}{16}rrYY$$

$$\frac{1}{4}rr \times \frac{2}{4}Yy = \frac{2}{16}rrYy$$

$$\frac{1}{4}rr \times \frac{1}{4}yy = \frac{1}{16}rryy$$

ได้ผลเช่นเดียวกับวิธี **checkerboard** และ **branching**

<u>กฎข้อที่สอง</u> ถ้าเหตุการณ์หลายอย่างที่เกิดขึ้นเป็น **mutually exclusive probability** ที่เหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่งจะเกิดขึ้นจะเท่ากับผลรวมของ **probability** ของแต่ละเหตุการณ์

เหตุการณ์หลายอย่างที่เป็น **mutually exclusive** หมายความว่ามันไม่สามารถจะเกิดขึ้นร่วมกันได้ ถ้าเกิดเหตุการณ์หนึ่งขึ้นเหตุการณ์อื่น ๆ จะไม่เกิด

เช่น โอกาสที่จะโยนเหรียญอันหนึ่งแล้วออกหัวหรือก้อย $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (ไม่ออกหัวก็ออกก้อยและเมื่อออกหัวแล้วก้อยจะไม่ออกเพราะโยนครั้งเดียวเท่านั้น)

ในถุงหนึ่งมีลูกบอลล์อยู่ 3 ลูก สีขาว เขียว แดง อย่างละลูก ถ้าหากล้วงลูกบอลล์ออกมาหนึ่งลูก โอกาสที่จะได้ลูกสีขาวหรือแดง $= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

ในการผสมระหว่าง **Aa** กับ **Aa** เราจะเห็นว่าจะได้ $\frac{1}{4}AA : \frac{1}{4}Aa : \frac{1}{4}aA : \frac{1}{4}aa$ ถ้าเราถือว่า **Aa** กับ **aA** ไม่เหมือนกัน โอกาสที่ที่คนหนึ่งจะเป็น **Aa** หรือ **aA** $= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ โอกาสที่จะได้ **AA** หรือ **Aa** หรือ **aA** $= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ โอกาสที่จะได้ **AA** หรือ **Aa** หรือ **aA** หรือ **aa** $= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ และโอกาสที่จะได้ **phenotype A** $= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

จากตัวอย่างสำหรับกฎข้อนี้เราเพียงแต่รู้ว่า **probability** ของแต่ละเหตุการณ์เป็นอย่างไร และหากต้องการให้มันมีโอกาสเกิดขึ้นเพียงครั้งเดียวเท่านั้นจะเป็นอะไรก็ได้ในที่เราต้องการ **probability** ที่จะได้จึงต้องนำมาบวกกัน

โดยมากแล้วการคำนวณเกี่ยวกับ **probability** เรามักจะต้องนำกฎทั้งสองข้อมาใช้ร่วมกัน เช่น ถ้าหากเราจะสมมุติว่าในบรรดาครอบครัวที่มีลูกอยู่สองคนนั้น ถามว่าจะมีโอกาสสักเท่าไรที่เราจะพบแต่ครอบครัวที่มีลูกชายทั้งสองคน ลูกชายคนและลูกหญิงคน หรือเป็นลูกหญิงทั้งสองคน ถ้าหากว่าโอกาสที่ลูกชายและลูกหญิงจะเกิดมามีเท่า ๆ กัน คือ 1:1

ครอบครัวที่มีลูกสองคนจะมีได้สี่แบบในจำนวนเท่า ๆ กันโดยพิจารณาดูจากลำดับของลูกที่เกิดมา ถ้าให้ B = ลูกชาย และ G = ลูกหญิง

1BB:1BG:1GB:1GG

และถ้าหากเราไม่สนใจในเรื่องลำดับการเกิดจะเห็นว่าโอกาสที่ครอบครัวหนึ่งจะมีลูกชายหนึ่งคนและลูกหญิงหนึ่งคน $= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ (เป็น **mutually exclusive** เพราะถ้าครอบครัวหนึ่งเป็น BG จะไม่เป็น GB)

$\therefore$ โอกาสที่จะเป็นชายทั้งสองคน $= \frac{1}{4}$

โอกาสที่จะเป็นชายหนึ่งหญิงหนึ่ง $= \frac{1}{2}$

โอกาสที่จะเป็นหญิงสอง $= \frac{1}{4}$

วิธีที่จะคิดได้อีกวิธีหนึ่งคือเรารู้ว่าโอกาสที่จะได้ลูกชาย $= \frac{1}{2}$ ดังนั้นโอกาสที่จะได้ลูกชายทั้งสองคน $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (เป็นเหตุการณ์อิสระได้ลูกชายคนแรกแล้วมีโอกาสจะได้ลูกชายคนหลังอีก) และเช่นเดียวกันที่โอกาสที่จะได้ลูกหญิงทั้งสองคน $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ แต่โอกาสที่จะได้ลูกชายหนึ่งคนและลูกหญิงหนึ่งคนนั้น $= (\frac{1}{2}B \times \frac{1}{2}G) + (\frac{1}{2}G \times \frac{1}{2}B) = \frac{1}{2}$ หรือจะเขียนเสียใหม่เป็น

$$(\tfrac{1}{2})^2BB + 2(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2})BG + (\tfrac{1}{2})^2GG = \tfrac{1}{4}BB + \tfrac{1}{2}BG + \tfrac{1}{4}GG$$

นั่นก็หมายความว่าถ้าไปสำรวจดูครอบครัวที่มีลูกสองคนแล้วคาดว่าหนึ่งในสี่จะเป็นผู้ชายล้วน และอีกหนึ่งในสี่จะเป็นผู้หญิงล้วน ส่วนที่เป็นผู้ชายคนหญิงคนจะมีอยู่สองในสี่

ถ้าพิจารณาจากครอบครัวที่มีลูกอยู่สามคนตามลำดับการเกิดจะได้ดังนี้

BBB	GBB	BGG	GGG
	BGB	GBG	
	BBG	GGB	
1 :	3 :	3 :	1
(3 boys)	(2 boys, 1 girl)	(1 boy, 2 girls)	(3 girls)
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

หรือ $(\frac{1}{2})^3 + 3(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2}) + 3(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3$

Binomial Expansion

ปัญหาหรือการทดลองหลายอย่างด้วยกันในวิชาพันธุศาสตร์ไม่เพียงแต่จะเกี่ยวข้องกับ probability ของแต่ละเหตุการณ์เท่านั้น แต่มันยังเกี่ยวข้องกับ probability ของ combinations ของเหตุการณ์หลายอย่างที่เกิดขึ้นด้วย ดังนั้นถ้าหากเราจะมัวมาเขียนรายละเอียดหา probability เป็นขั้น ๆ ก็จะเสียเวลามาก จึงมีการหาโดยใช้ binomial expansion

Binomial expansion จะรวมทุก combination ของเหตุการณ์ที่จะเกิดขึ้นได้ไว้หมดจากกลุ่มของเหตุการณ์ที่มีขนาดแตกต่างกันไปโดยจะหา probability ได้จาก $(a + b)^n$ โดย a และ b จะเป็น probability ของเหตุการณ์สองอย่าง n เป็นขนาดของกลุ่มเหตุการณ์ที่เกี่ยวข้อง

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

ใน binomial จะได้ทุก combination ของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้น แต่จะไม่แสดงให้ทราบถึงลำดับของเหตุการณ์

เช่น จากตัวอย่างในครอบครัวที่มีลูกสามคน binomial expansion จะแสดงให้เราทราบถึง combination ของลูกที่จะเกิดจากจำนวนลูกชายและลูกสาวที่แตกต่างกัน

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

ลูกชายทั้งสาม	probability	$= (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$
ลูกชายสองลูกหญิงหนึ่ง	probability	$= 3(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$
ลูกชายหนึ่งลูกหญิงสอง	probability	$= 3(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{8}$
ลูกหญิงทั้งสาม	probability	$= (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$

ค่า coefficients (สัมประสิทธิ์) ของแต่ละตัวใน binomial เมื่อนำมารวมกันจะทำให้ทราบว่า ถ้าคิดถึงลำดับของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นแล้วจะได้ทั้งหมดกี่ combination ด้วยกัน เช่น ในกรณีดังกล่าวลำดับการเกิดของลูกจะเป็นดังนี้

♂ ♂ ♂	♂ ♂ ♀	♂ ♀ ♀	♀ ♀ ♀
	♂ ♀ ♂	♀ ♂ ♀	
	♀ ♂ ♂	♀ ♀ ♂	

Binomial expansion จะมี symmetric อยู่สองอย่าง คือ

1. ค่า coefficient (ค่าสัมประสิทธิ์) สำหรับค่า n ที่มีกำลังแตกต่างกัน จะหาได้จาก Pascal's Triangle

n	Binomial coefficients	Total number of combinations
0	1	1
1	1 1	2
2	1 2 1	4
3	1 3 3 1	8
4	1 4 6 4 1	16
5	1 5 10 10 5 1	32
6	1 6 15 20 15 6 1	64

แต่ละค่าในสามเหลี่ยมจะเป็นผลรวมของเลขสองตัวที่อยู่ข้างบนทั้งซ้ายและขวา

2. Exponents กำลังของ a และ b จะเป็น symmetric กันด้วย โดยกำลังของ a จะเริ่มจาก n แล้วค่อย ๆ ลดลงจนเหลือ 0 ส่วนของ b จะเริ่มจาก 0 ถึง n เช่นเดียวกัน

ตัวอย่าง จงหาโอกาสที่ครอบครัวหนึ่งซึ่งมีเด็ก 5 คน จะเป็นเด็กชาย 2 คน และเด็กหญิง 3 คน

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

โอกาสที่จะเป็นเด็กชาย 2 คน และเด็กหญิง 3 คน $= 10a^2b^3$

$$= 10(\tfrac{1}{2})^2(\tfrac{1}{2})^3$$

$$= \frac{10}{32}$$

$$= \frac{5}{16}$$

ตัวอย่าง ถ้าหากว่าลักษณะสีเขียวของข้าวโพดเป็นลักษณะเด่นต่อลักษณะเผือก เมื่อผสมระหว่างข้าวโพดที่เป็น heterozygous genotype เข้าด้วยกัน แล้วนำเมล็ดมาปลูกในกระถาง 5 เมล็ดด้วยกัน อยากทราบว่าจะมีโอกาสเท่าไรที่

ก. ข้าวโพดทั้งหมดจะมีสีเขียว

ข. ข้าวโพดทั้งหมดจะเป็นลักษณะเผือก

$$Aa \quad \times \quad Aa$$

$$\frac{1}{4}AA + \frac{1}{2}Aa + \frac{1}{4}aa$$

$$\frac{3}{4} \text{ เขียว} + \frac{1}{4} \text{ เผือก}$$

โอกาสที่จะได้ข้าวโพดสีเขียวหมด $= a^5 = (\frac{3}{4})^5 = \frac{243}{1024}$

โอกาสที่จะได้ข้าวโพดเผือกหมด $= b^5 = (\frac{1}{4})^5 = \frac{1}{1024}$

ถ้าหากว่ากำลังของ **binomial** มีค่ามากขึ้นและต้องการที่จะหา **probability** ของบาง **combinations** ของ **phenotype** หรือ **genotype** โดยไม่สนใจลำดับของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นเลย การขยาย **binomial** อาจยุ่งยาก สามารถจะใช้วิธีของ **factorial** มาช่วยในการคำนวณได้ซึ่งมีสูตรดังนี้

$$\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x q^{(n-x)}$$

ให้ **probability** ของเหตุการณ์ $A = p$ ซึ่งเกิดขึ้น x ครั้ง

probability ของเหตุการณ์ $B = q$ ซึ่งเกิดขึ้น $n-x$ ครั้ง

เครื่องหมาย $!$ = **factorial** ถ้าให้ n เป็นเลขตัวหนึ่ง

$$n! = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$0! = 1$$

$$p + q = 1$$

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้ามีทารกเกิดขึ้นในโรงพยาบาลแห่งหนึ่งจำนวน 6 คน ถามว่ามีโอกาสเท่าไรที่จะเป็นชาย 2 คน หญิง 4 คน ถ้าโอกาสที่จะเป็นชาย = โอกาสที่จะเป็นหญิง $= \frac{1}{2}$

โอกาสที่จะเป็นทารกเพศชาย 2 คน
และเพศหญิง 4 คน $= \frac{6!}{2!4!}(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^4$
$= 15(\frac{1}{64})$
$= \frac{15}{64}$

<u>ตัวอย่าง</u> ในบรรดาครอบครัวที่มีลูก 8 คน ที่พ่อแม่เป็น **heterozygous genotype Aa** จะมีโอกาสเท่าใดที่เด็ก 6 คน จะมีลักษณะเด่น และอีก 2 คน มีลักษณะด้อย

โอกาสที่เด็ก 6 คน มีลักษณะเด่น
และ 2 คน มีลักษณะด้อย $= \frac{8!}{6!2!}(\frac{3}{4})^6(\frac{1}{4})^2 = 0.31$

$\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$ ได้มาจากพ่อแม่ที่เป็น **heterozygous (Aa)**

$$\mathbf{Aa} \times \mathbf{Aa} \longrightarrow \tfrac{3}{4}\mathbf{A\text{-}},\ \tfrac{1}{4}\mathbf{aa}$$

Chance Deviations from Expected Ratios

ในทางทฤษฎีแล้ว เราสามารถจะหา **probability** หรือ **ratio** ของเหตุการณ์ต่าง ๆ ที่จะเกิดขึ้นได้ แต่ไม่จำเป็นที่ว่าเหตุการณ์ที่มันเกิดขึ้นจริง ๆ จะคล้อยตามทฤษฎีเสมอไป ส่วนมากมักจะผิดไปจากที่เราคาดไว้ไม่มากก็น้อย เช่น ถ้าหากเราเอาเหรียญออกมาโยนดูสัก 100 ครั้ง ในทางทฤษฎีแล้วควรจะได้ หัว:ก้อย = **1:1** หรือ 50:50 แต่พอทำเข้าจริง ๆ อาจได้หัว 55 ครั้ง ก้อย 45 ครั้ง หรือ หัว 40 ครั้ง และก้อย 60 ครั้งก็ได้ (ยิ่งทำไปมาก ๆ แล้วหาค่าเฉลี่ยเอาจะยิ่งได้ค่าที่ใกล้เคียงทฤษฎีมาก) หรือถ้าเราผสม **pollen** จากต้นที่มี **genotype Dd** ลงบนต้นที่มี **genotype dd** เราก็คาดว่า **pollen** ที่มี **alleles D** และ d ควรมีในอัตราส่วนเท่า ๆ กัน และชั่วลูกควรมี **genotype Dd:dd = 1:1** แต่ผลที่ได้จริง ๆ อาจไม่เป็นไปตามที่คาดไว้ก็ได้ ดังนั้นจึงมีปัญหาอยู่ว่า เราจะยอมให้มันผิดไปจากกันได้มากน้อยแค่ไหน จึงจะยอมรับว่าเป็นไปตามทฤษฎีหรือไม่ยอมรับ ถ้าไม่ยอมรับก็อาจจะต้องค้นหาสาเหตุว่าทำไมเหตุการณ์ดังกล่าวจึงเกิดขึ้นได้ เช่น ถ้าเราไปเล่นโยนหัวโยนก้อยกับเพื่อน 100 ครั้ง ปรากฏว่าเพื่อนโยนออกแต่หัว เราก็อาจจะสงสัยว่าเหรียญคงผิดปกติหรือไม่ก็คงจะมีหัวทั้งสองข้าง แต่ถ้าออกหัว 90 ก้อย 10 ก็อาจจะเป็นเพราะเหรียญไม่สมดุลย์ ที่นี้เราจะยอมรับ **ratio** ไหนล่ะว่าเป็นไปตามทฤษฎี 80:20 หรือ 70:30 หรือ 55:45

ในทางสถิติแล้วมีวิธีการที่จะตรวจดูว่าความคลาดเคลื่อนไปจากทฤษฎีนั้นมีมากน้อยแค่ไหนพอที่จะยอมรับได้หรือไม่ หรือเหตุการณ์เช่นว่านั้นมีโอกาสที่จะเกิดขึ้นได้มากน้อยแค่ไหน โดยการตั้ง **level of significance** ขึ้นมา เช่น ถ้ามันมีโอกาสที่จะเกิดขึ้นมากกว่าหนึ่งใน 20 ครั้ง (มากกว่า 5% หรือ 0.05) เราก็ถือว่ามันเป็นไปตามที่เราคาดไว้ ความแตกต่างที่เกิดขึ้นเพียงเกิดจาก **chance** เท่านั้น แต่ถ้าโอกาสที่เหตุการณ์อย่างว่าจะเกิดขึ้นมีเพียง 1 ใน 20 ครั้ง หรือน้อยกว่าก็ถือว่ามันแตกต่างจากทฤษฎีอย่างมีนัยสำคัญ **(significant)** หรือถ้ามันมีโอกาสเกิดขึ้นเพียง 1 ใน 100 (1% หรือ 0.01) ก็ถือว่ามันแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญยิ่ง **(highly significant)**

ข้อที่ควรจดจำคือ level of significance นั้นเพียงแต่เป็น probability ที่ใช้ยอมรับหรือไม่ยอมรับ hypothesis แต่ไม่ได้ใช้พิสูจน์ว่า hypothesis นั้นถูกหรือผิด

Chi-Square χ^2 เป็นวิธีการหนึ่งที่ใช้วัดว่าค่าสังเกตที่ได้มานั้นกับค่าที่คาดว่าจะได้ตามทฤษฎีนั้นมันคล้อยตามกันหรือไม่ หรือว่าความแตกต่างระหว่างค่าที่สังเกตได้กับค่าที่ได้จากการคำนวณนั้นเกิดขึ้นจาก chance หรือเกิดจากสาเหตุอื่น (เช่น ยีนส์สองคู่ที่ไม่ได้เป็นอิสระต่อกันจะไม่ให้อัตราส่วน 9:3:3:1)

$$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E} = \frac{(O_1-E_1)^2}{E_1} + \frac{(O_2-E_2)^2}{E_2} + \dots\dots + \frac{(O_n-E_n)^2}{E_n}$$

O = Observed number

E = Expected number

ในการคำนวณค่า χ^2 ให้นำค่า deviation หรือความแตกต่างระหว่างค่าที่สังเกตได้กับค่าที่คาดว่าจะได้จากการคำนวณ นำมายกกำลังสองแล้วหารด้วยค่า expected นำผลลัพธ์ที่ได้มารวมกันเป็นค่า χ^2 อันเดียวกัน ยิ่งความแตกต่างระหว่างค่า observed และ expected มีมากเท่าไร ค่า χ^2 จะยิ่งมากขึ้นเท่านั้น นอกจากนั้นจำนวนของ class ของลักษณะที่เรานำค่า χ^2 มารวมกันนั้น ก็มีส่วนที่จะทำให้ได้ค่า χ^2 สูงขึ้นด้วย เพราะยิ่งมีหลาย class ก็จะยิ่งทำให้ค่า χ^2 มากขึ้น เพราะฉะนั้นจึงจำเป็นที่จะต้องพิจารณาจำนวน class เข้าไปด้วย แต่โดยเหตุว่าในการวิเคราะห์ทางสถิติกับผลการทดลองต่าง ๆ หรือผลที่ได้จาก genetic ratios เราถือว่าจำนวนค่าสังเกตที่ได้มาทั้งหมดหรือผลรวมนั้นมีค่าตายตัว เมื่อเป็นเช่นนี้บาง class ของค่าที่ได้มาก็มีความเป็นอิสระที่จะมีค่าเท่าไรก็ได้ บาง class ก็จะไม่มีความเป็นอิสระเหลืออยู่เลย ดังนั้นจึงจำเป็นที่จะต้องมีตัวเลขที่บอกถึงความเป็นอิสระของจำนวน class ขึ้นที่เรียกว่า degrees of freedom เช่น ถ้าเรามีถุงมืออยู่สองข้างซึ่งเป็นจำนวนตายตัวอยู่แล้วในการที่จะสวมถุงมือนั้น ในครั้งแรกเราอาจจะสวมถุงข้างไหนก็ได้ แต่เมื่อสวมลงไปแล้วอีกมือหนึ่งจะต้องสวมถุงข้างที่เหลือ และในทำนองเดียวกันถ้ามี phenotype อยู่หลาย class เมื่อจำนวนค่าสังเกตทั้งหมดถูก fixed ไว้แล้ว class ต่าง ๆ อาจมีจำนวนค่าสังเกตเท่าใดก็ได้ ยกเว้น class สุดท้ายที่จะมีค่าตายตัว

ดังนั้น degrees of freedom = จำนวน class-1

ในทางสถิติแต่ละค่า χ^2 จะมี probability อยู่ค่าหนึ่งซึ่งก็ขึ้นอยู่กับค่า d.f. จึงมีการสร้างตารางสำเร็จขึ้นมาไว้เปรียบเทียบดังตารางที่ 7-1

<u>ตารางที่ 7-1</u> **Probabilities** ที่ค่า χ ที่คำนวณได้จะใหญ่กว่าค่า χ^2 ในตารางที่ d.f. ต่าง ๆ

	Probabilities									
df	.95	.90	.70	.50	.30	.20	.10	.05	.01	.001
1	.004	.016	.15	.46	1.07	1.64	2.71	3.84	6.64	10.83
2	.10	.21	.71	1.39	2.41	3.22	4.61	5.99	9.21	13.82
3	.35	.58	1.42	2.37	3.67	4.64	6.25	7.82	11.35	16.27
4	.71	1.06	2.20	3.36	4.88	5.99	7.78	9.49	13.28	18.47
5	1.15	1.61	3.00	4.35	6.06	7.29	9.24	11.07	15.09	20.52
6	1.64	2.20	3.83	5.35	7.23	8.56	10.65	12.59	16.81	22.46
7	2.17	2.83	4.67	6.35	8.38	9.80	12.02	14.07	18.48	24.32
8	2.73	3.49	5.53	7.34	9.52	11.03	13.36	15.51	20.09	26.13
9	3.33	4.17	6.39	8.34	10.66	12.24	14.68	16.92	21.67	27.88
10	3.94	4.87	7.27	9.34	11.78	13.44	15.99	18.31	23.21	29.59
11	4.58	5.58	8.15	10.34	12.90	14.63	17.28	19.68	24.73	31.26
12	5.23	6.30	9.03	11.34	14.01	15.81	18.55	21.03	26.22	32.91
13	5.89	7.04	9.93	12.34	15.12	16.99	19.81	22.36	27.69	34.53
14	6.57	7.79	10.82	13.34	16.22	18.15	21.06	23.69	29.14	36.12
15	7.26	8.55	11.72	14.34	17.32	19.31	22.31	25.00	30.58	37.70
20	10.85	12.44	16.27	19.34	22.78	25.04	28.41	31.41	37.57	45.32
25	14.61	16.47	20.87	24.34	28.17	30.68	34.38	37.65	44.31	52.62
30	18.49	20.60	25.51	29.34	33.53	36.25	40.26	43.77	50.89	59.70
50	34.76	37.69	44.31	49.34	54.72	58.16	63.17	67.51	76.15	86.66

← do not reject | reject →

at .05 level

เมื่อคำนวณค่า χ^2 ได้แล้วก็นำไปเปรียบเทียบกับค่า χ^2 ในตาราง ถ้าหากค่า χ^2 ที่ได้มาใหญ่กว่าค่า χ^2 จากตารางที่ probability 0.05 แสดงว่าโอกาสที่จะได้ ratio หรือค่าสังเกตดังกล่าวเกิดขึ้นน้อยกว่า 1 ใน 20 ครั้ง ซึ่งมีโอกาสน้อยมาก เราก็ไม่ยอมรับว่ามันเป็นไปตามทฤษฎี แต่ถ้าค่า χ^2 ที่ได้น้อยกว่า χ^2 ที่ probability 0.05 เราก็พอจะยอมรับได้ว่าความแตกต่างที่เกิดขึ้นเป็นเพราะ chance

<u>ตัวอย่าง</u> (เมื่อมีจำนวน class = 2)

จากการทดลองของเมนเดลที่ทำการผสมถั่วที่มีเมล็ดสีเหลืองกับต้นที่มีเมล็ดสีเขียวเข้าด้วยกัน แล้วนำ F_1 backcross กลับไปหาต้นถั่วที่มีเมล็ดสีเขียว ซึ่งในทางทฤษฎีควรจะได้ต้นถั่วที่มีเมล็ดสีเหลืองและสีเขียวในอัตราส่วน 1:1 ซึ่งผลการทดลองเขาได้ต้นถั่วที่มีเมล็ดสีเหลือง 58 ต้น และต้นถั่วที่มีเมล็ดสีเขียว 52 ต้น ถ้าหากเรานำผลการทดลองดังกล่าวมาทดสอบ χ^2 ดูจะได้ดังนี้

	Yellow	Green	Total
Observed	58	52	110
Expected	55	55	110
(O-E)	3	-3	0
$(O-E)^2$	9	9	-
$\frac{(O-E)^2}{E}$	$\frac{9}{55}$	$\frac{9}{55}$	$\frac{18}{55} = 0.33 = \chi^2$

ค่า χ^2 จากตาราง d.f. 1 ที่ P(0.50) = 0.46

P(0.70) = 0.15

∴ Probability ที่จะได้ค่าสังเกตใน ratio ดังกล่าวจะมีอยู่ 50-70% แสดงว่ามันเป็นไปตามทฤษฎีความแตกต่างที่เกิดขึ้นเป็นผลเนื่องจาก chance แต่เพียงอย่างเดียว

ตัวอย่าง (เมื่อจำนวน class มากกว่า 2)

ในการทดลองผสมต้นถั่วที่มีลักษณะเมล็ดกลมสีเหลืองกับต้นถั่วที่มีเมล็ดย่นสีเขียวเข้าด้วยกันแล้วในชั่ว F_2 ได้ผลดังนี้

เมล็ดกลม สีเหลือง	315	ต้น
เมล็ดกลม สีเขียว	108	ต้น
เมล็ดย่น สีเหลือง	101	ต้น
เมล็ดย่น สีเขียว	32	ต้น
รวม	556	ต้น

ถ้าลักษณะทั้งสองเป็นอิสระต่อกันจริงแล้วในทางทฤษฎีเราควรจะได้ 312.75:104.25:104.25:34.75

$$\chi^2 = \frac{(315-312.75)^2}{312.75} + \frac{(108-104.25)^2}{104.25} + \frac{(101-104.25)^2}{104.25} + \frac{(32-34.75)^2}{34.75}$$

$$= \frac{(2.25)^2}{312.75} + \frac{(3.75)^2}{104.25} + \frac{(-3.25)^2}{104.25} + \frac{(-2.75)^2}{34.75}$$

$$= 0.47$$

ปรากฏว่าที่ d.f. = 3 ค่า χ^2 ที่ได้จะมี probability อยู่ระหว่าง 0.90-0.95 แสดงว่าผลการทดลองเป็นไปตามทฤษฎีที่ว่ายีนส์ทั้งสองคู่เป็นอิสระต่อกัน และใน F_2 จะได้ phenotypic ratio 9:3:3:1

<u>ข้อควรจำ</u> ค่า χ^2 จะต้องหามาจากจำนวนค่าสังเกตที่ได้มาจากการทดลองโดยตรง ไม่ใช่ค่า **percent** หรือ **ratio** มาคำนวณ เช่น เราทดลองแล้วได้ค่าสังเกตออกมาเป็น 8 และ 12 ถ้าคิดเป็นเปอร์เซ็นต์จะได้ 40% (หรือ 0.40) และ 60% (หรือ 0.60) ส่วนค่าที่คาดไว้จะได้ 50% และ 50% (0.5:0.5) เราจะใช้ค่า 8 และ 12 (ค่า **Expected** 10:10) เท่านั้นมาคำนวณ